АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

2568—3416

*

№ 4 1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 3
Преподавание математики 8
Основания математики и математическая логика 10
Теория чисел 13
Алгебра 21
Многочлены и линейная алгебра . . . 21
Группы 23
Поля, кольца и структуры 27
Алгебраическая теория схем связи и управления 32
Топология 34
Теория функций действительного переменного 39
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями 44
Теория функций комплексного переменного 45
Дифференциальные уравнения 58
Обыкновенные дифференциальные уравнения 58
Уравнения в частных производных . . . 68
Приложения к физике, технике и естественным наукам 78
Интегральные уравнения . . . . . —
Приложения интегральных уравнений . —
Вариационное исчисление 81
Анализ (другие вопросы) 83
Числовые ряды 83
Специальные функции 89
Интегральные преобразования и операционное исчисление . . . . . —
Приложения общих методов математического анализа 90
Функциональный анализ 91
Теория вероятностей 102
Математическая статистика 105
Теория игр и математическая экономика 111
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 113
Геометрия 117
Элементарная геометрия 118
Приложения геометрии 119
Проективная и начертательная геометрия 120
Алгебраическая геометрия 122
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 124
Геометрия n-мерного пространства . . . 126
Теория относительности 130
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 135
Метрические методы в геометрии 136
Выпуклые многообразия 138
Численные и графические методы 139
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 150
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 163

Адрес редакции: Москва Д—219, Балтийский пос., д. 42-Б

Технический редактор *Р. М. Денисова*

Подписано к печати 8/IX 1958 г. Тираж 2725 Формат бумаги 84×108 1/16 Зак 652
Печ. л. 16,81 Бум. л. 5 1/4 Уч.-изд. л. 30,9

1-я тип. Издательства АН СССР. Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12.

REFERATIVNYI ZHURNAL MATHEMATIKA

EDITOR *S. M. Nikolsky*

EDITORIAL BOARD: *P. S. Alexandrov, P. S. Finikov, A. N. Kolmogorov, Yu. V. Linnik, A. I. Marcushevich, M. A. Naimark, V. V. Nemycky, S. M. Nikolsky, P. S. Novikov, D. Yu. Panov, K. A. Rybnikov, N. V. Smirnov, I. N. Vekua*

EXECUTIVE SECRETARY *A. A Konjushkov*

CONTENTS

General
- History. Biography
- Teaching of mathematics

Foundations. Mathematical logic

Theory of numbers

Algebra
- Polynomials, linear algebra
- Groups
- Fields, rings, lattices
- Algebraic theory of communication and control circuits

Topology

Theory of functions of real variables
- Theory of sets
- Approximations of functions by polynomials and by their generalizations

Theory of functions of complex variables

Differential equations
- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Applications to physics, technology and natural sciences

Integral equations
- Applications of integral equations

Calculus of variations

Analysis (other aspects)
- Numerical series
- Special functions
- Integral transforms, operational calculus
- Applications of general methods of mathematical analysis

Functional analysis

Theory of probability
- Mathematical statistics
- Theory of games, mathematical economics
- Applications of probabilities and statistical methods

Geometry
- Elementary geometry
- Applications of geometry
- Projective and descriptive geometry
- Algebraic geometry
- Differential geometry of 3-dimensional space
- Geometry of n-dimensional space. Theory of relativity
- Global theory of differentiable manifolds
- Metric methods in geometry
- Convex manifolds

Numerical and graphical methods
- Tables

Computers and mathematical devices
- Application of computer devices

Author index

Editorial Office: Moscow, D-219, Baltijsky poselok, 42-B

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

Рефераты 2568—3416 **№ 4** **Апрель 1958 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

2568. **Итоги 20-го съезда КПСС и задачи учреждений Академии наук УССР на 1956—1960 гг. Палладин** (Підсумки XX з'їзду КПРС і завдання установ Академії наук УРСР на 1956—1960 рр. Паладін О. В), Вісник АН УРСР, 1956, № 4, 10—29 (укр.)

2569. **Сессия Академии наук Азербайджанской ССР по физико-техническим наукам.** АзәрбССР Элмләр Акад. хәбәрләри; Изв. АН АзербССР, 1957, № 6, 229—230

Сессия состоялась 25 — 26 марта 1957 г. В области математики заслушан общий отчет. Отмечена работа по изучению линейных и нелинейных операторов и задач математической физики.

2570. **100-летие со дня рождения А. М. Ляпунова.** Вестн. АН СССР, 1957, № 8, 115—116

Информация о торжественном заседании 6 июня 1957 г. в Московском университете. Содержит аннотации докладов: В. И. Смирнов, Труды Ляпунова по устойчивости, Л. Н. Сретенский, Теория фигур равновесия в работах Ляпунова, С. Л. Соболев, Работы Ляпунова по теории потенциала.

2571. **Столетие со дня рождения А. М. Ляпунова. Калинин С. В.,** Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, № 8, 168

Информация о торжественном заседании и о мероприятиях по увековечению памяти А. М. Ляпунова (1857—1918).

2572. **Восьмой международный конгресс по истории науки. Коржинек** (Osmý mezinárodní sjezd pro dějiny přírodních věd. Kořínék Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 1, 121—123 (чешск.)

Краткая информация о конгрессе, состоявшемся в сентябре 1956 г. во Флоренции и Милане. Перечислены некоторые доклады, посвященные истории математики. Наибольшее место уделено критике доклада Ф. Руссо, посвященного теории параллельных Д. Саккери. Автор критикует докладчика за преувеличение исторической роли этого ученого XVIII в.

В. П. Зубов

2573. **VIII Международный конгресс по истории науки** (VIII Międzynarodowy Kongres Historii Nauki), Kwart. historii nauki i techn., 1957, 2, № 1, 181—189 (польск.)

2574. **Годичная сессия отделения математических и физических наук Венгерской Академии наук, 1956 г.** (A Magyar tudományos akadémia matematikai és fizikai tudományok osztályának az 1956. évi nagygyűlés., 1957, 7, № 1, 109 l.) (венг.)

2575. **Съезд австрийских математиков (Вена, 17—22 сентября 1956 г. Александров П. С.,** Вестн. АН СССР, 1956, № 12, 89—90

Краткие сведения об участниках съезда и характере его проведения.

Б. В. Гнеденко

2576. **Австрийский математический съезд. [Вена, 17—22 сент. 1956 г.] Александров П. С.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 243

2577. **К IV австрийскому математическому съезду. Вена, 17—22 сентября 1956 г. Душек** (Zum IV. österreichischen Mathematikerkongress. Wien, 17. bis 22. September 1956. Duschek A.), Nachr. Österr. Math. Ges., 1957, № 47—48, 1—2 (нем.)

2578. **IV съезд австрийских математиков в Вене (17—22 сентября 1956 г.). Шварц** (IV. sjazd rakúskych matematikov vo viedni. (17—22 sept. 1956 r.). Schwarz Št.), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 1, 123—124 (словацк.)

2579. **Впечатления о съезде в Вене. Штрубекker** (Eindrücke vom Wiener Kongress. Strubecker K.), Nachr. Österr. Math. Ges., 1957, № 47—48, 3—5 (нем.)

2580. **Апрельское собрание Американского математического общества в Нью-Йорке, 1957 г. Шейфер** (The April meeting of the American mathematical Society held in New York, 1957. Schafer R. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 4, 223—255 (англ).

2581. **Апрельское собрание Американского математического общества в Чикаго, 1957 г. Янгс** (The April meeting of the American mathematical Society held in Chicago, 1957. Youngs J. W. T.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 4, 256—279 (англ.)

2582. **Июньское собрание в Пуллмане. Кли** (The June meeting in Pullman. Klee V. L., Jr), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, 63, № 5, 306—315 (англ.)

Сообщение о 536-м собрании Американского математического общества. Рефераты 34 представленных докладов.

2583. **Общество прикладной математики и механики. Научное годичное собрание 23—27 апреля в Гамбурге** (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik. Wissenschaftliche Jahrestagung vom 23. bis 27. April in Hamburg), Phys. Verhandl., 1957, 8, № 3, 37—68 (нем.)

Приведены краткие резюме докладов, прочитанных на годичном собрании общества прикладной математики и механики, проходившем 23—27 апреля 1957 г. в Гамбурге.

2584. **Роль математики и математиков в современной эпохе. Курепа** (Le rôle des mathématiques et du mathématicien à l'époque contemporaine. Kurepa G.), Enseign. math., 1955, 1, № 1—3, 93—111 (франц.)

Доклад на международном математическом конгрессе в Амстердаме в сентябре 1954 г. Излагаются результаты проведенного по инициативе Международной комиссии по преподаванию математики (CIEM — Commission internationale de l'enseignement mathématique) опроса.

Основными референтами по странам были: Германия — Камке (Kamke E., РЖМат, 1956, 7819), Австрия — Вейнбергер (Weinberger O., РЖМат, 1956, 7821), Франция — Дармуа (Darmois G., РЖМат, 1957, 5), Голландия — Данциг (Dantzig D. van., реф. 2653), Италия — Асколи (Ascoli G., РЖМат, 1956, 7820), США — Глисон (Gleason A. M., РЖМат, 1957, 5274). Рассматриваются определения математики и математика, приводится статистика научных учреждений, научных работников и периодических изданий в области математики, статистика занятости математических кадров, различные пути использования математиков в современном обществе. Сравнивается машинная математика и «ручной труд» в математике, индивидуальные и коллективные исследования, конкретная и общая тематика. В заключение делаются некоторые выводы для CIEM. В приложении дан полный текст анкеты, рассылавшейся математикам. В. И. Левин

2585. **Математика как профессия в индустрии в настоящее время. Фрай** (Mathematics as a profession today in industry. Fry Thornton C.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 2, 71—80 (англ.)

Современный технический прогресс достигается не индивидуальными учеными и специалистами, а большими комплексными коллективами. В каждом таком коллективе должны быть математики, роль которых в научно-технических коллективах будет в дальнейшем еще возрастать. В. И. Левин

2586. **В сердце математики. Булиган** (Au coeur de la mathématique. Bouligand Georges), Rev. gén. sci. pures et appl., 1956, **63**, № 9—10, 258—268 (франц.)

Первая часть статьи содержит соображения общего характера о том, что следует считать главным и что второстепенным в математике, о наиболее плодотворных в настоящее время областях математических исследований. Центральными в математике автор считает такие математические теории, которые имеют наиболее разносторонние связи либо с приложениями, либо с другими математическими теориями. Дается обзор нескольких книг, в том числе «Лекций об уравнениях с частными производными» И. Г. Петровского и «Лекций по функциональному анализу» Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя. В. И. Смирнов

2587. **О книге «Элементы математики» Бурбаки. Лонстра** (Beschouwing over «Eléments de mathématique par N. Bourbaki». Loonstra F.), Euclides, 1956, **32**, № 1, 5—14 (гол.)

2588. **Эквивалентны или идентичны закон исключенного третьего и закон запрещенного противоречия? Кох** (Sind die Sätze vom verbotenen Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten äquivalent oder miteinander identisch? Koch Rolf Albert), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, 1952/53, **2**, № 8, Math.-naturwiss. Reihe, № 4, 423—439 (нем.)

Автор пытается решить проблему, поставленную в заглавии, в положительном смысле, т. е. доказать, что эти законы просто полностью идентичны и что, следовательно, не нужно 4 законов логики, но вполне достаточно 3: закона тождества, закона достаточного основания и того нового закона, который идентичен закону исключенного третьего и закону противоречия, или, как его называет автор, закону запрещенного противоречия. С другой стороны, анализируя ту совокупность логических, онтологических и теоретико-познавательных предпосылок, на основе которых он пытается доказать идентичность только что упомянутых законов, автор утверждает, что именно эти предпосылки являются подлинно первичными, невыводимыми из других предпосылок началами, праксиомами (Uraxiom), как он их называет. Таких праксиом будет, конечно, уже не три и даже не четыре, как это думали ранее, но более сорока. Б. Н. Пятницын

2589. **Применение математической логики к теории познания. Мейер** (Application de la logique mathématique à la théorie de la connaissance. Meyer H.), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 145—151 (франц.)

Автор критикует и отвергает философские взгляды, согласно которым отношение между наукой (физикой) и действительностью является тождеством, или сходимостью, или изоморфизмом. Он принимает точку зрения Г. Вейля, согласно которой объективность законов физики состоит в их инвариантности относительно надлежащей группы преобразований, и верит в то, что отношения тождества, сходимости и изоморфизма могут быть найдены в структуре самой науки. Его аргументация туманна и неубедительна и ее нельзя рассматривать как применение математической логики, хотя он и пользуется некоторыми символами последней. R. Suszko

2590. **Элементы эпистемологии математики и физики. Пять критических тем. Раббено** (Elementi di epistemologia matematica e fisica. Cinque temi critici. Rabbeno G.), Publ. fac. sci. e ingegneria Univ. Trieste, 1953, **B**, № 122, 39 pp. (итал.)

Автор ставит себе целью найти более или менее простую и доступную форму изложения основных идей современной математики и физики.

Работа освещает четыре темы и содержит дополнительную часть, посвященную проблеме четырех цветов. В вступительной главе дается характеристика понятия и задач эпистемологии, рассматриваются вопросы, затрагивающие одновременно логику и математику, приводятся некоторые логические софизмы и парадоксы теории множеств, формулировка известного результата Гёделя относительно проблемы непротиворечивости. Чисто математическая трактовка теорий физики квалифицируется как потеря из-за математики цели вычислений (перефразировка афоризма: «потерять из-за жизни цель жизни»).

В первой части разбирается вопрос об отношении между числом и единицей в аспекте сопоставления качества и количества. Отмечается расхождение между интуиционализмом и формализмом в понимании математического существования. В связи с этим противопоставлением указываются, с одной стороны, концепции Пифагора, Пеано, Пуанкаре, а, с другой, Гераклита, Цермело, Гёделя.

Во второй части («бесконечно малые, бесконечное и трансфинитное») рассматриваются проблема непрерывности (в связи с которой указываются на апории Зенона), понятие бесконечного множества, зависимости между бесконечными множествами, указывается проблема континуума. Отмечается разрешение с помощью современной теории множеств ряда больших трудностей, непреодолимых на прежних этапах развития.

Третья часть, посвященная основам физики, затрагивает вопросы классической механики и физики, «принцип неопределенности», проблему причинности в физике, значение понятия вероятности для физики. Приписывается большое значение сопоставлению исследований в области микрофизики и биологии. В четвертой части («современная физика») излагаются элементы релятивистской и квантовой физики, рассматривается принцип Паули и Ферми, «гипотеза» расширяющейся вселенной и т. д. Делается вывод о мнимости противопоставления корпускульного и волнового аспектов. По мнению референта, недостаточно учитывается то обстоятельство, что единство непрерывного и дискретного находит свое проявление как в математике, так и в физике и вовсе не происходит распределение

сфер непрерывности и дискретности между математикой и физикой.

С целью подчеркивания приверженности традиции, исходящей от Леонардо да Винчи, каждая глава снабжена его соответствующим высказыванием, в виде эпиграфа.

Автор стоит на позиции позитивистской «терпимости» и отказывается от высказывания в категорической форме философских оценок. Л. П. Гокиели

2591. Значение психо-лингвистической отправной точки зрения для применения логистики к нематематическим наукам. Вёйше (L'importance du point de départ psycho-linguistique pour l'application de la logistique aux sciences non mathématiques. Vuysje D.), Collect. logique math., 1952, Paris 1954, A5, 155—156 (франц.)

Статья содержит некоторые замечания относительно верности применения символической логики к нематематическим наукам. Автор считает, что формализация этих наук и употребление по отношению к ним понятий математической логики должно быть связано с психолингвистическими исследованиями в естественном языке. R. Suszko

2592. Философская идея одной неаристотелевой логики. Гюнтер (Die philosophische Idee einer nichtaristotelischen Logik. Günther Gotthard), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam—Louvain, 1953, 44—50 (нем.)

С идеалистических позиций критикуется классическая двузначная логика за то, что она «описывает истину только в ее связи с бытием и непригодна для описания истины самой по себе, имеющей божественное происхождение». Классическому исчислению высказываний противопоставляется трехзначное исчисление с двумя различными операциями отрицания и дается таблица значений обоих отрицаний и их комбинаций. А. А. Зыков

2593. Краеугольный камень научной мысли XX века: теорема Гёделя. Нагель, Ньюман (Una pietra angolare del pensiero scientifico del XX secolo: la prova di Gödel. Nagel Ernest, Newman James R.), Industria (Ital.), 1956, № 3, 277—301 (итал.)

2594 К. Логика законов прибыли. Исследование в области мета-экономики. Менгер (The logic of the laws of return. A study in meta-economics. Menger K. Economic activity analysis, pp. 419—482. Edited by Oskar Morgenstern. John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London, 6.75 doll) (англ.)

Дается точная формулировка так называемого закона убывающей прибыли в экономике и тщательно разъясняются связанные с ним положения и их взаимоотношения. Статья представляет собой исправленный вариант опубликованной в «Z. Nationalökonomie», 1936, 7, 25—56, 388—397. S. Ichimura

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 171.

2595 К. Кибернетика круговой причинности и обратный механизм в биологической и социальной системах. Фёрстер (Cybernetics circular causal and feedback mechanisms in biological and social systems. Trans. 10th Conf. Apr. 22, 23, 24, 1953, Princeton, N. J. Ed. Foerster Heinz von. New York, Josiah Macy, Jr. Foundat., 1955, 100 pp., 2.75 doll.) (англ.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

2596. Развитие математики в Китае. Ли Янь, Шусюэ тунбао, 1955, № 7, 1—9 (кит.)

Дается краткий обзор развития математики в Китае от древности до наших дней.

Первый «ранний период древности» (со вр. Хуанди, 2491 г., по 100 г. до н. э.) характеризуется лишь на основании косвенных данных, поскольку математические тексты этого периода не сохранились. Отмечается, что первоначальная запись чисел производилась с помощью узелков; с самых дальних времен употреблялась десятичная система счисления; для построения круга и прямоугольника широко применялись циркуль и наугольник; использовались специальные способы записи дробей. К концу периода математике в школьном образовании уделяют значительное внимание; составляются специальные книги, например самые ранние из дошедших до нас: «Трактат о чжоуби» и «Математика в девяти книгах». Автор указывает на употребление в это время специальной счетной доски, применение которой наложило определенный отпечаток на методы расчетов китайских математиков.

В следующий «средний период древности» (100 г. до н. э. — 600 г. н. э.) появляется ряд ученых, занимавшихся математикой и оставивших в наследство свои сочинения. В это время усиленно комментируется «Математика в девяти книгах», поэтому автор останавливается несколько подробнее на ее описании, отмечая некоторые особенности методов (решения систем линейных уравнений и извлечения корней). Для этого периода характерны работы ряда математиков по вычислению приближенных значений π, из них особенно выделяются Лю Хуэй (III в.) и Цзу Чун-чжи (V в.) проявлением интереса к вопросам практической геометрии и вычислению объемов некоторых тел (например, сферы). К концу периода составляется сборник «Десять математических трактатов», в который входят оба ранее упомянутые сочинения.

Согласно периодизации, предложенной автором, «Период поздней древности» простирается от 600 г. до 1367 г. Это было время расцвета математики в Китае: появляются знаменитые ученые (Цинь Цзю-тао, Чжу Ши-цзе, Шэнь Ко, Го Шоу-цзинь и др.), создавшие ряд замечательных работ (аналог способа Горнера решения уравнений высших степеней и треугольник Паскаля, решение сравнений первой степени с помощью алгоритма Евклида и др.). Отмечаются работы Ван Сяо-туна (VII в.), описывается математическое образование этого периода, говорится о проникновении ислама и буддизма в Китай, а также об установлении связей Китая с Японией (начало VII в.) и Кореей (X в.), обучение математике в которых проводилось по китайской системе и китайским учебникам.

В новый период (1367—1750 гг.) получили широкое распространение китайские счеты, изобретенные, как доказывает автор, не позже средины XV в., и правила — песенки для счета на них. Появление в 1606 г. первого перевода на китайский язык последних шести книг «Начал» Евклида, сделанного проповедником Ли Ма-сюем и Сюй Гуань-ци, положило основание изданию переводной литературы, по которой китайцы стали знакомиться с европейской математикой (логарифмы, тригонометрия и др.)

В новейший период (1750—1949 гг.) работа математиков проводится в двух направлениях: теоретическое обоснование принятых ранее без доказательств западных методов; обработка и развитие старых традиционных методов. Переиздаются произведения классиков. Например, «Десять математических трактатов» были выпущены в сборнике «Сы ку тюань шу», 1774—83 гг. и математики знакомятся с дифференциальным и интегральным исчислением.

Автором использована многочисленная классическая математическая и историческая литература. В статье содержится библиографический материал по данному вопросу. Э. И. Березкина

2597. О математике в древнем Китае. Гуань Чжао-чжи, Народный Китай, 1956, № 15, 29—31

Краткий обзор «Сборника статей по истории математики Китая» проф. Ли Яня, вышедшего на китайском языке в пяти томах (1844 стр.) в издательстве «Наука», 1954—1955. Подчеркивая выдающиеся заслуги Ли Яня в исследовании старинной китайской математики, автор отмечает богатство фактического материала «Сборника», в котором большое место уделено и истории преподавания математики в Китае. В книге Ли Яня приведены данные о системе обучения арифметике с 6—8 лет в эпоху династии Чжоу (1066—403 гг. до н. э.), о серьезной постановке математического образования в период династий Суй, Тан, Сун (581—507 и 960—1279 гг.) и др. Ли Янь прослеживает взаимное влияние математики в Китае и в других странах, особенно в Индии, Средней Азии, Корее и Японии; в последних двух странах влияние китайской системы преподавания и науки было в прежнее время особенно значительно. Указывая на отдельные пробелы в труде Ли Яня, автор, основываясь на ряде фактов, высказывает предположение, что взаимные связи математики в Китае и в других странах (включая Европу) были значительно большими, чем указано в «Сборнике». В целом «Сборник» Ли Яня содержит неопровержимые научные доказательства вклада китайских ученых в развитие мировой математики и богатый материал для лиц, занимающихся историей математики.

А. П. Юшкевич

2598. Прошлое и настоящее китайской математики. Такэда, Сидзэн, 1956, **11**, № 3, 44—47 (японск.)

2599. Математика и астрономия древних арабов. Стипанич (Математика и астрономија старих Арабљана. Стипанић Ернест), Наука и природа, 1956, 9, № 4, 147—151 (сербо-хорв.)

2600. О введении на Западе терминов «теоретическая и практическая геометрия». Барон (Sur l'introduction en Occident des termes «geometria theorica et practica». Baron Roger), Rev. histoire sci., 1955, 8, № 4, 296—302 (франц.)

Выражения Geometria theorica et practica, восходящие к грекам, в средневековую науку ввел впервые, по-видимому, Гюго из аббатства св. Виктора в Париже (ум. в 1141 г.) в сочинении «Practica geometriae». Автор подробно разбирает смысл этих терминов у Гюго и у его младшего современника испанца Доминго Гонзалеца-Гундисальво, в сочинении «De divisione philosophiae».

А. П. Юшкевич

2601. Авраам Савасорда и его алгоризм. Исследование о ранней европейской арифметике. Леви (Abraham Savasorda and his algorism: a study in early European logistic. Levey Martin), Osiris, 1954, **11**, 50—64 (англ.)

Подробно разобран один из отделов энциклопедического труда по арифметике, геометрии, оптике и музыке, составленного в первой четверти 12 в. в Испании Авраамом бар Хийа, известного также под именем Авраама Савасорда. Рукопись сочинения, написанного по древнееврейски и озаглавленного «Основания науки и столп веры», хранится в Мюнхене. Специальному анализу подвергнуты арифметические действия над целыми числами и дробями; отмечается широкое знакомство Савасорды с соответствующей арабской литературой.

А. П. Юшкевич

2602. К вычислению числа π Николаем Кузанским. Земан (Zur Berechnung der Zahl π nach Nicolaus von Cusa. Saemann Willi), Math. und Phys. Schule, 1957, 4, № 8, 405—408 (нем.)

Метод Николая Кузанского (1401—1464) состоит в построении последовательности изопериметрических многоугольников со все возрастающим числом сторон и в определении предела их апофем. Земан воспроизводит этот метод для использования во внеклассной работе со школьниками, снабдив его доказательствами существования и единственности искомого предела. Указывается, как использовать каждую ступень рассуждения для приближенного вычисления школьниками числа π.

З. А. Левашова

2603. Духовная традиция ранних изданий Евклида. Штек (Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben. Steck Max), Forsch. und Fortschr., 1957, **31**, № 4, 113—117 (нем.)

Перечень рукописей и изданий Евклида в XV—XVI вв. (всего 54 названия). Во введении даются краткие сведения об Евклиде, содержащие ряд ошибок: среди сохранившихся сочинений Евклида не упоминается «Data»; сочинение «О делении площадей» считается пропавшим (оно сохранилось в арабском переложении); метод исчерпания приписывается Гиппократу; 10-я книга называется совместным произведением Теэтета и Евдокса; даются «точные» даты жизни Евклида 365—300 гг. и составления «Начал» (около 325 г.); наконец, Евклид считается принадлежащим к Платоновской Академии.

И. Н. Веселовский

2604. Французские переводы произведений Евклида. Лакоарре (Les traductions françaises des oeuvres d'Euclide. Lacoarret Marie), Rev. histoire sci., 1957, **10**, № 1, 38—58 (франц.)

Библиография и краткие сведения о главнейших переводчиках.

И. Н. Веселовский

2605. О доказательстве Валлиса пятого постулата Евклида. Кассина (Sulla dimostrazione di Wallis del postulato quinto di Euclide. Cassina Ugo), Period. mat., 1956, **34**, № 4, 197—219 (итал.)

Анализируется известное доказательство евклидова постулата параллельности, данное Валлисом (опубл. 1693), который опирался на следующий постулат:

А. Всегда существует подобный данному треугольник, определенная сторона которого задана произвольно. В своем доказательстве Валлис исходит из предложения: В. Всегда существует треугольник с двумя данными углами, сумма которых меньше двух прямых. Он выводит его из леммы 7° (нумерация Валлиса), в которой пользуется интуитивным понятием непрерывного движения.

Автор показывает, что предложение В можно доказать, не прибегая к лемме 7°, а используя только постулат А. По-видимому, ему неизвестно, что предложение В является предложением абсолютной геометрии, так что при доказательстве нет необходимости ограничиваться евклидовой геометрией (см., например, теорему 1 на стр. 55 книги Нордена (РЖМат, 1954, 5749 К).

Приведены различные доказательства леммы 7°, опирающиеся на ту или иную форму евклидова постулата параллельности или на свойства трансляций на евклидовой плоскости, тогда как идея доказательства Валлиса основана на непрерывности траектории точки при скольжении плоскости вдоль прямой.

Б. Л. Лаптев

2606. Золотое число. Масс е (Le nombre d'or. Masse Paul), Rev. géom.-experts et topogr. franç., 1957, **119**, № 4, 303—310; № 5, 385—393 (франц.)

Обозначая термином «золотое число» то, что обычно принято называть «золотым сечением», или делением в крайнем и среднем отношении, автор в популярной форме (преимущественно на основе книг по эстетике пропорций М. Гика) стремится показать на примерах, что золотое сечение широко применялось в произведениях искусства с древности до эпохи Возрождения. В конце статьи рассмотрена новейшая теория архи-

тектурных пропорций Ле Корбюзье, доказывающая, по мнению автора, что за 2000 лет нами не было найдено системы, способной заменить систему гармонических отношений, найденную уже в древности. В. П. Зубов

2607. **Средневековый латинский перевод короткого арабского трактата о гиперболе.** К л а д ж е т т (A medieval Latin translation of a short Arabic tract on the hyperbola. C l a g e t t M a r s h a l l), Osiris, 1954, 11, 359—385 (англ.)

Автор недавно обнаружил в Бодлеанской библиотеке латинскую рукопись XIII в., представляющую собой перевод анонимного арабского трактата о гиперболе. Перевод выполнен Иоанном из Палермо, работавшим при дворе Фридриха II Гогенштауфена. Публикация состоит из введения, текста рукописи и английского перевода. Во введении собраны данные об оригинальных или переводных средневековых латинских сочинениях, содержавших сведения по теории конических сечений, в частности трудах по оптике Альгазена (ибн ал-Хайсама) и Вителo. В трактате доказаны 5 предложений, равносильных или близких некоторым предложениям I и II книг «Конических сечений» Аполлония; цель трактата — построение асимптот гиперболы.

А. П. Юшкевич

2608. **Начертательно-геометрическое построение конических сечений у Альбрехта Дюрера.** Э р ф у р т (Eine darstellend-geometrische Konstruktion der Kegelschnitte bei Albrecht Dürer. E r f u r t h H o r s t), Math. und Phys., 1957, 4, № 5, 253—256 (нем.)

Приведены текст и чертежи из книги Дюрера «Наставление к пользованию циркулем и линейкой» (1525), относящиеся к построению эллипса и параболы. Вопрос о происхождении описываемых приемов и об оригинальности Дюрера в этом отношении оставлен открытым. Автор указывает на полезность использования приводимых материалов в преподавании. Библ. 7 назв.

В. П. Зубов

2609. **О построении правильного многоугольника с 17 сторонами, данном Ампером, по документам, сохранившимся в архивах Академии наук.** Л е б е г (Sur une construction du polygone régulier de 17 cotés, due à André—Marie Ampère, d'après des documents conservés dans les archives de l'Académie des sciences. L e b e s g u e H e n r i), Enseign. math., 1957, 3, № 1, 31—34 (франц.)

Заметка о последней незаконченной математической работе (1835) Ампера, умершего в 1836 г., черновики которой сохранились в архивах Академии.

И. Н. Веселовский

2610. **О первых исследованиях Ж. Даламбера и Л. Эйлера по теории линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** С и м о н о в Н. И. В сб.: Историко-математические исследования, вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 789—903

Известно, что Даламбер в «Трактате по динамике» 1743 г. впервые предложил для интегрирования систем линейных обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами так называемый метод множителей. Автор показывает, что в работе «О распространении пульсаций через упругую среду» 1747 г. Эйлер независимо от Даламбера пришел к рассмотрению таких систем с произвольным числом неизвестных функций и дал другой метод интегрирования, представляя искомые решения в виде тригонометрических функций с неопределенными коэффициентами, т. е. по существу метод, употребительный ныне. Это сразу приводит к характеристическому уравнению, получение которого по способу Даламбера менее удобно. А. П. Юшкевич

2611. **Математические работы А. Н. Крылова. (Речь на совместном собрании Академии наук СССР и Народного Комиссариата Военно-Морского Флота 15 декабря 1945 г.).** С м и р н о в В. И., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1956, 15, 13—23

В статье содержится общая характеристика математических работ А. Н. Крылова, направленных на эффективное, доведенное до формулы и нередко до расчетных таблиц, решение отдельных задач механики, физики и техники, а также разбор его математических открытий, изложенных в мемуарах по различным конкретным вопросам теории колебаний, и др. (например, метода улучшения сходимости рядов Фурье и им подобных, нового метода составления в развернутом виде векового уравнения и т. д.). Отмечается выдающаяся роль А. Н. Крылова в распространении и разработке в России и СССР приближенных вычислений. Воспитанник петербургской математической школы А. Н. Крылов всем своим творчеством с особой силой прокладывал пути к проблемам, непосредственно поставленным человеческими потребностями. А. П. Юшкевич

2612. **Заметки о знаменитых проблемах. Задача Кастилльона.** К о р т (Notes on famous questions. Castillon's problem. C o u r t N a t h a n A l t s h i l l e r), Scripta math., 1954, 20, № 3—4, 232—235 (англ.)

Окончание статьи о задаче Кастилльона (РЖМат, 1956, 72). В 1810 г. Жергонн предложил аналогичную задачу об описании вокруг данного круга m-угольника, вершины которого лежат на m данных прямых; эта задача была тотчас сведена с помощью теории полюсов и поляр к уже решенной задаче о вписанном многоугольнике (Анконтр, 1762—1818). В 1822 г. Понселе дал решение обобщенной задачи Кастилльона для вписанного в коническое сечение многоугольника, применив способ, который Шаль назвал геометрическим методом ложного положения и который получил ряд применений у Кремоны; автор приводит решение в случае треугольника. Метод инверсий применил к задаче Кастилльона для круга Петерсен в 1868 г. История вопроса прослежена до 1939 г., когда Лаврусс рассмотрел задачу Кастилльона в пространстве. Ссылаясь на Р. К. Арчибалда, автор указывает, что задачу Паппа для 3 произвольных точек впервые поставил не Крамер, а Симсон (1687—1768). А. П. Юшкевич

2613. **Булево понятие науки.** Т о м а с (Boolés concept of science. T h o m a s I v o), Proc. Roy Irish Acad., 1955, A57, № 6, 88—96 (англ.)

Автор обсуждает философские взгляды Буля на науку. Буль понимал термин «наука» в очень широком смысле и относил к этому термину всю совокупность общих истин. Логика была для Буля тоже наукой, но он рассматривал ее как науку о мышлении. Взгляды Буля на методологическую структуру естественных наук приближались к нашим современным взглядам. Однако Буль придавал особо важное значение теоретическим элементам в науке; он рассматривал образование понятий и процесс абстракции как некоторые предельные схемы. R. Suszko

2614. **Буль как логик.** Ф е й с (Boole as a logician. F e y s R o b e r t), Proc. Roy. Irish Acad., 1955, A57, № 6, 97—106 (англ.)

Статья носит мемориальный характер. Главная работа Буля (Laws of Thought) появилась сто лет назад. Автор обсуждает методы Буля, состоящие в 1) переносе в логику законов обыкновенной алгебры (сложения, умножения, вычитания и деления), 2) добавлении закона $x \cdot x = x$ и 3) удалении из вычислений тех выражений, которые не допускают логической интерпретации. Он также рассматривает связь между методами и результатами Буля и идеями Лейбница и общие идеи, связанные с развитием логики и алгебры после смерти Буля. R. Suszko

2615. Леонард Эйлер (1707—1783). Варвак П. М., Прикл. механіка, 1957, 3, № 3, 352—355 (укр.)

2616. Леонард Эйлер. 250 лет со дня рождения. Шейн (Leonhard Euler — 250 de ani de la naşterea sa. Schein M.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, B8, № 9, 449—455 (рум.)

2617. Карл Фридрих Гаусс. Покорный (Karol Fryderyk Gauss. Pokorny Jerzy), Wiedza i życie, 1957, 24, № 5, 318—319 (польск.)

Популярное изложение важнейших открытий Гаусса в математике, астрономии и физике.

В. Ф. Рогаченко

2618. Николай И. Лобачевский (к столетию со дня смерти). Илич-Дайович (Николај И. Лобачевски (поводом стогодишњице смрти). Илић-Дајовић Милица), Наука и природа, 1956, 9, № 10, 420—426 (сербо-хорв.)

Сжатый популярный очерк развития неевклидовой геометрии, начинающийся с биографических данных о Лобачевском. Отмечается роль и значение исследований Лобачевского в становлении современной математики. Имеется опечатка в дате выхода «Воображаемой геометрии». Б. Л. Лаптев

2619. Великий русский математик. Ятаев М., КазССР гылым Акад. хабаршысы, Вестн. Ан КазССР, 1957, № 9, 118—121

Статья об А. М. Ляпунове (1857—1918) в связи со столетием со дня его рождения.

2620. Бертран Артур Вильям Расселл — великий математик. Леонхард (Bertrand Arthur William Russell—ein großer Mathematiker. Leonhard Susanne), Dtsch. Rundschau, 1957, 83, № 5, 500—504 (нем.)

Статья приурочена к 85-летию со дня рождения Расселла. Приводятся биографические данные. Указывается на продолжение и развитие Расселлом линии Фрэге и Пеано, на значение проделанного совместно с Уайтхедом труда «Principia Mathematica», который квалифицируется как значительнейшее произведение европейской мысли двадцатого века. В качестве крупнейшего достижения Расселла, служащего разрешению антиномий теории множеств и соответствующих логических софизмов, расценивается его теория типов. Сопоставляется логицистический подход Расселла с формалистическим подходом Гильберта.

Отмечается разносторонность научной и общественной деятельности Расселла. Оценка его работ, посвященных социальным и политическим проблемам, имеет тенденциозный характер. Л. П. Гокиели

2621. К 70-летию профессора Д. Г. Гребенюка. Узаков Ю. К., Сб. научно-исслед. работ. Ташкентск. текстильн. ин-та, 1956, вып. 3, 144—146

2622. К 80-летию Эрхарда Шмидта. Неванлинна (Erhard Schmidt zu seinem 80. Geburtstag. Nevanlinna Rolf), Forsch. und Fortschr, 1956, 30, № 2, 60—62 (нем.)

2623. Заметка о Рене-Луи Бэре — члене-корреспонденте по секции геометрии. Лебег (Notice sur René-Luis Baire, correspondant pour la section de géométrie. Lebesgue Henri), Enseign. math., 1957, 3, № 1, 28—30 (франц.)

Выдержка из сообщения в C. r. Acad. sci., 1932, 195, 86—88, являвшегося в то время некрологом Рене-Луи Бэра (1874—1932). Содержит биографический очерк. Кратко излагаются его работы по изучению свойств функций некоторых классов (в классификации Бэра).

А. А. Гусак

2624. Эмиль Борель (1871—1956). Дармуа (Émile Borel 1871—1956. Darmois G.), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 154—156 (франц.)

2625. Фредерик Рейк Брэдли (1904—1953). Уиттекер (Frederick Wrake Bradley. Whittaker J. M.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 122, 251—252 (англ.)

2626. Карл Брюшвейлер (1878—1956). Коллер (Carl Brüschweiler (1878—1956). Koller A.), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 159—160 (франц.)

2627. Эрнст Вагеман (1884—1956). Лангелютке (Ernst Wagemann 1884—1956. Langelütke H.), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 157—159 (нем.)

2628. Вито Вольтерра (1860—1940). Лабрадор (Vito Volterra. Labrador J. F.), Gac. mat., 1957, 9, № 2—3, 39—42 (исп.)

2629. Франтишек Йозеф Герстнер. Вычихло (František Josef Gerstner. Vyčichlo F.), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 2, 249—250 (чешск.)

Краткий обзор жизни и деятельности чешского математика, физика, механика и астронома Ф. Й. Герстнера (1756—1832), в связи с 200-летием со дня его рождения. Список трудов не приведен.

Г. Ф. Рыбкин

2630. Гуннар Дальберг (1893—1956). Валунд (Gunnar Dahlberg (1893—1956). Wahlund S.), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 160—161 (англ.)

2631. Отто Данкел (1869—1951). Райдер (Otto Dunkel. Rider P. R.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 7, Part 2, 1—2 (англ.)

2632. Леонард Юджин Диксон (1874—1954). Альберт (Leonard Eugene Dickson, 1874—1954. Albert A. A.), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 4, 331—345 (англ.)

Очерк жизни и математического творчества американского математика Л. Ю. Диксона (1874—1954). Приложена библиография работ Диксона (285 назв.).

И. Г. Башмакова

2633. Адальберт Душек. Инцингер (Adalbert Duschek. Inzinger R.), MTW-Mitt., 1957, 4, № 5, 310—312 (нем.)

Некролог профессора Высшей технической школы в Вене А. Душека (1895—1957).

2634. Энрико Хаскель Зоннабенд (1901—1956). Джини (Enrico Haskel Sonnabend (1901—1956). Gini Corrado), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 162—164 (англ.)

2635. Клавдия Яковлевна Латышева. Павлюк И. А., Наук. зап. Київськ. ун-та, 1957, 16, № 2, 159—162 См. РЖМат, 1957, 1937.

2636. Анри Лебег — ученый, профессор, человек. Данжуа, Феликс, Монтель (Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme. Denjoy Arnaud, Félix Lucienne, Montel Paul), Enseign. math., 1957, 3, № 1, 1—18 (франц.)

Биографический очерк А. Лебега (1875—1941), члена Парижской академии с 1922 г., одного из основателей современной теории функций. Помимо характеристики научной и педагогической деятельности А. Лебега, авторы приводят его высказывания по вопросам преподавания и дают высокую оценку его личных качеств. Е. С. Шатунова

2637. Профессор д-р Франтишек Радл скончался. Рыхлик, Ригер (Profesor dr František Rádl zemřel. Rychlík Karel, Rieger Ladislav), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 3, 378—382 (чешск.)

Некролог профессора Пражского строительного и электротехнического института Ф. Радла (1876—1957). Библ. 38 назв.

2638. Джино Лория (1862—1954) (Gino Loria (1862—1954)), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 387—392 (итал.)

2639. Некролог Л. Ф. Ричардсона (1881—1953). Тодд (Obituary: L. F. Richardson (1881—1953). Todd J.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, 242—245 (англ.)

2640. Ян Снядецкий. Биттнер (Jan Sniadecki. Bittner Ireneusz), Wiedza i życie, 1957, 24, № 3, 193—194 (польск.)

Краткий очерк жизни и научно-педагогической деятельности крупнейшего польского ученого и просветителя Яна Снядецкого (1756—1830). В. Ф. Рогаченко

2641. Джон Уишарт (1898—1956) (John Wishart (1898—1956), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 161—162 (англ.)

2642. В память о Луиджи Фантаппье. Пеллегрино (In memoria di Luigi Fantappiè. Pellegrino Franco), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 3—4, 505—519 (итал.)

Л. Фантаппье скончался 28 июля 1956 г. в возрасте 55 лет (род. 15 сентября 1901 г.). С 1939 г. он был профессором математического анализа и директором научно-исследовательского института математики Римского университета. Некролог содержит краткую биографию и очерк научной деятельности Л. Фантаппье. Приводится список печатных работ проф. Фантаппье, состоящий из 106 назв. В. И. Левин

2643. Марну Аугусту Тейшейра-ди-Фрейтас (1890—1956). Лопес (Mario Augusto Teixeira de Freitas. (1890—1956). Lopes W.), Rev. Inst. internat. statist., 1956, 24, № 1—3, 153—154 (франц.)

2644. У. Ф. С. Черчилл (1870—1953). Ле-Бо (W. F. S. Churchill. Le Beau G. S.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 122, 256 (англ.)

2645 К. Интегральное исчисление. (В 3-х т.). Т. I. (Где излагаются основные начала метода интегрирования вплоть до интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка). Эйлер Леонард. Перев. с латинск. М., Гостехиздат, 1956, 415 стр., 16 р. 15 к.

Впервые осуществляемый перевод на русский язык фундаментального сочинения «Institutionum calculi integralis» Л. Эйлера является значительным событием в издании историко-математической литературы в Советском Союзе.

В понятие «интегрального исчисления» Эйлер, как и его современники, включал не только интегрирование заданных функций, но и интегрирование дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными. Поэтому три тома «Интегрального исчисления» заключают следующие основные разделы: Интегрирование функций (т. I, ч. 1). Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (т. I, ч. 2). Интегрирование дифференциальных уравнений второго и высшего порядка (т. II). Интегрирование уравнений с частными производными (т. III). Кроме того, в 1794 г. уже после смерти Эйлера Петербургской академией был издан четвертый том «Интегрального исчисления», содержащий дополнения, главным образом, к содержанию первых двух томов.

В реферируемом первом томе после краткого вступления Эйлера «Об интегральном исчислении вообще» следуют 9 глав, составляющих интегральное исчисление в собственном смысле слова, т. е. в смысле учения об интегрировании функции. В этих главах Эйлер с классическим совершенством сумел привести в общую систему огромное число своих собственных результатов и результатов своих современников. Названия этих глав и их последовательность напоминают построение основных разделов любого современного учебного курса интегрального исчисления: Гл. 1. Об интегрировании рациональных дифференциальных выражений. Гл. 2. Об интегрировании иррациональных дифференциальных выражений. Гл. 3. Об интегрировании дифференциальных выражений с помощью бесконечных рядов. Гл. 4. Об интегрировании логарифмических и показательных выражений. Гл. 5. Об интегрировании выражений, содержащих углы или синусы углов. Гл. 6. О разложении интегралов в ряды, расположенные по синусам и косинусам кратных углов. Гл. 7. Общий метод приближенного нахождения каких угодно интегралов. Гл. 8. О значениях, которые интегралы принимают только в определенных случаях. Гл. 9. О разложении интегралов в бесконечные произведения.

Пояснения требует лишь название восьмой главы. Речь в этом случае идет о вычислении определенных интегралов. Здесь излагаются способы вычисления многих определенных интегралов дифференциальных биномов в пределах 0,1 и несобственных интегралов различных тригонометрических функций в пределах 0, ∞ и др.

Второй раздел, состоящий из семи глав, содержит методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Наименования первых четырех глав напоминают названия первых разделов учебных курсов дифференциальных уравнений: Гл. 1. О разделении переменных. Гл. 2. Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи множителей. Гл. 3. Об исследовании дифференциальных уравнений, которые становятся интегрируемыми при помощи множителей заданного вида. Гл. 4. О нахождении частных интегралов дифференциальных уравнений.

Изложение Эйлер начинает с обзора предшествующих результатов. Пользуясь единым приемом, а именно, разделением переменных, он интегрирует все те элементарные дифференциальные уравнения, которые были исследованы ранее Лейбницем и его учениками — Яковом и Иваном Бернулли, — уравнения вида $dy/dx = f_1(x) f_2(y)$, однородные и приводящиеся к ним, линейные уравнения 1-го порядка, «уравнения Бернулли», интегрируемые случаи уравнения Риккати.

Этот обзор сопровождается критическими замечаниями Эйлера, направленными явно в адрес представителей школы Лейбница, полагающих, что «в разделении переменных состоит вся основа решения дифференциальных уравнений» (стр. 227, § 405). В качестве более общего метода Эйлер выдвигает метод интегрирующего множителя. В § 459 (стр. 256) Эйлер делает даже попытку доказать теорему существования интегрирующего множителя для всякого дифференциального уравнения 1-го порядка, существование «полного», т. е. общего интеграла при этом считается очевидным.

Гл. 4 представляет особый интерес для изучения истоков качественной теории дифференциальных уравнений. Уже в своей «Механике», опубликованной в 1736 г., а также в работе «О парадоксах интегрального исчисления» Эйлер исследовал некоторые дифференциальные уравнения с особыми решениями по современной терминологии. В указанной главе «Интегрального исчисления» Эйлер, продолжая исследования, находит критерий, позволяющий отличить частный интеграл от особого, не предполагая при этом известным «полный», т. е. общий интеграл.

Построения Эйлера существенно опираются на рассмотрение соответствующих несобственных интегралов (§ 547, стр. 306) подобно известным современным теоремам единственности.

Гл. 5 и 6 посвящены известным уравнениям Эйлера: $dx/\sqrt{P_4(x)} = dy/\sqrt{P_4(y)}$, где $P_4(z)$ — многочлен 4-й степени по z. Изучение этого класса уравнения было связано с развитием теории эллиптических интегралов.

В гл. 7 «О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений» излагаются классический эйлеровский «метод ломаных» и результаты попыток его

усовершенствования. В частности, в § 656 Эйлер указывает формулы для вычисления коэффициентов ряда, представляющего формальное решение, т. е. ряда, сходимость которого в первой четверти XIX в. была впервые доказана Коши «методом пределов». Применение Эйлером разностей высшего порядка для построения приближенного решения дифференциального уравнения отмечается не всегда. В заключительном разделе изучаются главным образом уравнения, не разрешенные относительно производной dy/dx, однородные по x и y.

На стр. 87 дается примечание: «он (т. е. Эйлер — *Реф.*) вообще оперирует с рядами формально, безотносительно к тому, сходятся ли они или расходятся». Полностью согласиться с этим нельзя, так как иногда Эйлер обращает специальное внимание именно на вопрос сходимости рядов, дающих решение. Так, в § 655 (стр. 379) Эйлер указывает «Всюду [в литературе] излагаются правила для выражения интегралов дифференциальных уравнений через бесконечные ряды; но эти правила по большей части обладают тем недостатком, что они дают лишь частные интегралы, не говоря уже о том, что эти ряды сходятся в определенном случае, а поэтому в других случаях не приносят никакой пользы».

Перевод выполнен тщательно. Авторы перевода (М. Я. Выгодский и С. Я. Лурье), желая точнее выразить мысль Эйлера, не стремились, как правило, к «подстрочному» переводу.

В необходимых случаях указываются различные возможные варианты перевода и приводится текст в оригинале. Перевод сопровождается многочисленными примечаниями его авторов, направленными на уточнение приводимых Эйлером доказательств, исправление опечаток и т. п. В ряде примечаний переводчики стремились дать свою интерпретацию сложных мест оригинального текста. Однако с некоторыми из последних примечаний трудно согласиться (в частности, на стр. 19). Внешнее оформление книги хорошее. Н. И. Симонов

2646 К. **Краткая история математических наук. Окань, Дюга** (Histoire abrégée des sciences mathématiques. Ocagne Maurice de, Dugas René, Paris, Vuibert, 1955, 407 p., 1 350 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 21, 490 (франц.)

2647 К. **Софья Васильевна Ковалевская, ее жизнь и деятельность (1850—1891). Полубаринова-Кочина П. Я.** М., Гостехиздат, 1955, 100 стр., илл., 1 р. 50 к.

2648 К. **Люди русской науки. (Физика и математика). Очерки** (Рус ылмынын, гернукли адамлары. (Физика ве математика). Физ.-мат. ылымларынын гернукли ишгәрлери барада очерклер. Ашгабат, Туркмендевлетнешир, 1956, 76 сах.) (туркм.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

2649. **Общие доклады на педагогических чтениях в Севре (2—4 ноября 1956 г.). Маршан** (Compte-rendu général des journées de Sèvres (2—4 novembre 1956). Marchand A.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 36, № 184, 269—272 (франц.)

Основными вопросами, стоявшими в повестке чтений, организованных Международным центром педагогических исследований, были: 1) пространственное воображение и проблема обучения стереометрии, 2) проблемы, связанные с началом обучения алгебре, и 3) язык и символика в математике.

См. также реф. 2650. В. И. Левин

2650. **Язык и математика. Шварц** (Langage et mathématiques. Schwartz Laurent), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 36, № 184, 262—269 (франц.)

Магнитофонная запись доклада на педагогической конференции в Севре 3 ноября 1956 г. (реф. 2649). В начале обучения математике излишняя требовательность к строгости формулировок непедагогична: учитель должен улавливать в словах ученика вкладываемый последним смысл и оценивать ответ по правильности вложенной идеи, между прочим поправляя, в случае необходимости, и речевую сторону. В школе второй ступени точность выражений в математической речи должна уже настойчиво культивироваться, но излишняя формализация математического языка не нужна. На уровне же высшей школы целесообразно вводить логическую символику и учить ею пользоваться. Приводятся примеры преимущества формализованной записи математических предложений (составление отрицаний более или менее сложных предложений и т. п.). Критикуется употребление в некоторых случаях в математике слова «существование», не отвечающее восприятию реальности учениками (существование несобственных элементов и т. п.) В. И. Левин

2651. **Уравнения и геометрические места точек; логический синтез. Сервэ** (Equations and geometric loci; a logical synthesis. Servais W.), Math. Teacher, 1957, 50, № 2, 114—122 (англ.)

Автор в популярной форме излагает простейшие основные понятия логики, иллюстрируя примерами из математики.

Сначала автор останавливается на логике высказывания свойств, отношений и предложений, где даются примеры единичных и общих высказываний, отмечается, что в высказываниях передается либо истинность, либо ложность отношений, но бывают и условные и неопределенные предложения; потом переходит к развитию понятия «области» на примерах из алгебры и геометрии, попутно останавливаясь на неправильном введении в школе понятия мнимого числа.

Далее рассматривается логика расширения понятий: существование, единственность и тождественность, где автор, в частности, останавливается на трех типах равенств в математике и на необходимости точного указания области, из которой берутся решения. Потом автор переходит к логике подразумеваемых свойств и вхождения в данное множество, где рассматривает известные круги Эйлера, иллюстрирующие взаимную связь логического подлежащего и сказуемого. Излагаются понятия эквивалентности и совпадения множеств, в связи с чем раскрывается логика необходимых и достаточных условий существования тех или иных свойств.

Здесь автор переходит к вопросу о геометрических местах точек, эквивалентных уравнениям, и к аналогичным вопросам арифметики и аналитической геометрии.

Приводятся примеры на соединение высказываний и пересечений множеств, а также разделение высказываний и объединение множеств.

В заключение автор ставит вопрос, почему необходимо более точно изучить общелогическую основу математики. Он считает, что это приближает учащихся к современной математике и отвечает психологии мышления учащихся, пробуждая в них активность и интерес и углубляя их понимание, особенно в изучении геометрических мест точек и уравнений; здесь только необходимо брать понятные, жизненные примеры и излагать на доступном языке для учащихся.

И. К. Андронов.

2652. **Интерпретация постулатов Пеано. Дарков** (Interpretations of the Peano postulates. Darkow M. D.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 270—271 (англ.)

Методическая заметка. Для лучшего усвоения учащимися абстрактной системы постулатов арифмети

натуральных чисел предлагается интерпретировать эти постулаты на двух элементарных моделях:

А. Арифметическая прогрессия $a, a+d, a+2d, \ldots$, где a и d — любые вещественные числа, $d \neq 0$; роль 1 играет a, n' определяется как $n+d$.

В. Геометрическая прогрессия $a, ar, ar^2, \ldots$ ($a \neq 0$, $0 < r \neq 1$), роль 1 играет a, n' определяется как $n \cdot r$. А. А. Зыков

2653. Роль математики в современном обществе и ее влияние на преподавание математики. Данциг (The function of mathematics in modern society and its consequence for the teaching of mathematics. Dantzig D. van), Enseign math., 1955, 1, № 1—3, 159—178; Euclides (Nederl.), 1955—1956, 31, № 2, 88—102 (англ.)

Доклад на Международном конгрессе математиков в Амстердаме в 1954 г. Содержание: 1. Возрастающий спрос на математику в современном обществе. 2. Чистая и прикладная математика. 3. Послевоенное развитие математики в Голландии. 4. Проблема предотвращения наводнений. 5. Общественное положение математиков. 6. Традиционное обучение математике. 7. Желательность новой ориентации в преподавании математики. Приводятся сведения об организации и тематике математических исследований в Голландии. В. И. Левин

2654. О необходимости высшей математики. Татаркевич (O potrzebie matematyki wyższej. Tatarkiewicz Krzysztof), Matematyka, 1957, 10, № 1, 4—8 (польск.)

2655. Вывод математического выражения для погашения задолженности произвольным постоянным взносом p. Хаскинс (A development of a mathematical expression for the liquidation of an indebtedness by a constant arbitrary payment p. Haskins Ethelbert W.), School Sci. and Math., 1957, 57, № 1, 53—58 (англ.)

Решается следующая элементарная задача: сумма P должна быть выплачена равными взносами p через единичные промежутки времени, причем за этот промежуток времени оставшаяся к выплате сумма каждый раз возрастает в $1+r$ раз; сколько взносов надо внести для покрытия всего долга (последний взнос может быть и меньше p). В естественном предположении, что $p > Pr$, количество взносов оказывается равным

$$\left[\left\{\log \frac{p}{p-Pr}\right\} / \log(1+r)\right] + 1.$$

В. И. Левин

2656. Об употреблении счетных досок в основной школе. Лидль (Über die Verwendung von Zahlentafeln in der Grundschule. Liedl Günther), Math. und Phys. Schule, 1957, 4, № 4, 190—202 (нем.)

Описание устройства и употребления счетных досок (таблиц), с помощью которых можно выполнять умножение, деление, возведение чисел в квадрат и куб и извлечение квадратных и кубических корней, а также производить вычисления по различным формулам (например, вычисление объемов тел). Е. В. Вандышева

2657. Примеры упражнений производственного характера по теме «Функциональная зависимость». Мухина Л. М., Уч. зап. Выборгск. гос. пед. ин-т, 1957, 2, 96—107

2658. О преподавании раздела «Элементарные функции» в курсе теории функций комплексного переменного в педагогическом институте. Гинзбург (Про викладання розділу «Елементарні функції» в курсі теорії функцій комплексного змінного в педагогічному інституті. Гінзбург Г. М.), Доповіді та повідомлення. Львівськ. держ. пед. ін-т, 1957, вип. 2, 26—29 (укр.)

2659. О характере упражнений в тождественных преобразованиях. Беляев В. И., Уч. зап. Коломенск. пед. ин-та, 1956, 1, 35—52

Рассматриваются вопросы о месте и роли тождественных преобразований в курсе алгебры средней школы и о подборе упражнений. Указывается, что упражнения зачастую отвлеченны и однообразны и что их следует разнообразить и конкретизировать путем решения задач. Приводятся конкретные примеры упражнений на тождественные преобразования, в том числе практического характера. Е. В. Вандышева

2660. О раскрытии содержания понятий в курсе математики средней школы. Деев А. А., Уч. зап. Омского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 6, 3—17

2661. Обзор исследований, относящихся к обучению арифметике в последних классах начальной школы. Пикал (Review of research related to the teaching of arithmetic in the upper elementary grades. Pikal Frances), School Sci. and Math., 1957, 57, № 1, 41—47 (англ.)

2662. О графической интерпретации преобразований уравнений. Иванов И., Уч. зап. Псковск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, 283—301

Методическая статья о решении уравнений (алгебраических и некоторых трансцендентных) в средней школе.

2663. К вопросу составления программ. Бернацкий (W sprawie projektu programu. Biernacki Stanisław), Matematyka, 1957, 10, № 1, 32—33 (польск.)

2664 К. От Декарта до Ньютона в английской школе. Дюга (De Descartes a Newton par l'école anglaise. Dugas René. Paris, Univ. Paris, 1953, 19 pp.) (франц.)

2665 К. Сборник задач по высшей математике для техникумов. Савчук П. М. М., Гостехиздат, 1957, 132 стр., илл., 2 р. 25 к.

2666 К. Задачи для пропедевтического курса уравнений. Изд. 2-е, переработ. Соминский И. (Новгородск. гос. пед. ин-т). Новгород, «Новгородск. правда», 1957, 15 стр., беспл.

2667 К. Элементарная математика. Алгебра. Изд. 2. Илиев, Манолов (Елементарна математика. Алгебра. 2 доп. и прераб. изд. Илиев Л., Манолов Сп. София, Наука и изкуство, 1956, 340 стр., 10 · 80 лв), Българ. книгоп., 1956, 60, № 11, 8 (болг.)

2668 К. Основы математики для радио и электроники. Колбрук (Basic mathematics for radio and electronics. 3rd ed. Colebrook Francis Morley. London, Iliffe; New York, Philos. Libr., 1957, 359 pp., ill., 17 sh. 6d), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 396, 9 (англ.)

2669 К. Математика. Сем. 5 и 6. Промышленный факультет. Звеж (Matematyka. Sem. 5 i 6. Kierunek przemysłowy. Wyd. 2. Zwierz Zbigniew. Warszawa, Państw. Wydawn. Szkoln. Zawod, 1957, 68 s., il., 2.40 zł.), Przew. bibliogr., 1957, 13, № 5, 65 (польск.)

2670 К. Сборник математических формул. Рингле́б (Mathematische Formelsammlung. Ringleb Friedrich O. 6 erw. vollst. umgearb. Neuausg. Bürklen O. Th. Berlin, de Gruyter, 1956, 287 S. 4,80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr,. 1957, A, № 9, 613 (нем.)

2671 Д. Иррациональные числа и методика их изучения в советской общеобразовательной средней школе с политехническим обучением. Демидович К. А. Автореф. дисс. канд. пед. н., Казанск. гос. пед. ин-т, Казань, 1957

2672 Д. Методы конструктивной геометрии в школьном геометрическом моделировании. Буренин Н. Д. Автореф. дисс. канд. пед. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1957

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, А. С. Есенин-Вольпин*

2673. Импликация как чистое отношение «если—то». Замечание к «основным парадоксам» логики. Линке (Die Implikation als echte Wenn-so-Beziehung. Bemerkungen zu den «Fundamental-Paradoxien» der Logistik. Linke Paul F.), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam—Louvain, 1953, 146—150 (нем.)

Основным парадоксом логики считается необходимость признания истинности предложений такого типа: «если Цезарь не был убит, то Луна состоит из зеленого сыра» и их теоретические предпосылки. Такие парадоксы возникают из сопоставления объективной истины и формальной правильности. Считая, что импликация есть чистое отношение «если—то», автор предлагает для избежания этих парадоксов пользоваться в словесных выражениях не левой частью формулы $p \supset q = \overline{p \cdot \bar{q}}$, а правой. Например, предложение: «если что-нибудь горит, то выделяется флогистон» следует понимать так: «что-нибудь гореть без выделения флогистона не может». Л. Е. Майстров

2674. Тождественность, переменные и непредикативные определения. Хинтикка (Identity, variables, and impredicative definitions. Hintikka K. Jaakko J.), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 3, 225—245 (англ.)

Отмечается возможность различных трактовок утверждений о двух объектах: в некоторых случаях под двумя объектами понимаются обязательно различные объекты (например, в геометрии: «Через каждые две точки проходит единственная прямая»), в других допускается совпадение объектов (например, в алгебре: «Каждой паре элементов соответствует единственный элемент»). Первая из этих трактовок называется эксклюзивной (exclusive), т. е. исключающей совпадения, интерпретацией, вторая — инклюзивной (inclusive), т. е. включающей совпадения, интерпретацией.

Автор предпочитает инклюзивную интерпретацию, так как при эксклюзивной различные переменные не являются независимыми. Зависимость между предметными переменными в логических исчислениях затрудняет преобразования формул. Так, например, формула $(\exists x)(P(x) \& (\exists y)(P(y) \& P(x)))$ сводится к формуле $(\exists x) P(x)$ только при инклюзивной интерпретации.

Отмечается, что при некотором изменении аксиом и правил вывода исчисления предикатов может быть формализована и эксклюзивная интерпретация. Вводятся три типа кванторов:

$(\exists x)$, (x) — инклюзивные кванторы;

(Ex), (Ux) — слабо эксклюзивные кванторы;

(ex), (ux) — сильно эксклюзивные кванторы.

В соответствии с этим расширяется понятие формулы (к обычным правилам образования формул добавляется следующее правило: если K — формула, то $(\exists x) K$; $(x) K$; $(Ex) K$; $(Ux) K$; $(ex) K$; $(ux) K$ также являются формулами); аксиомы и правила вывода исчисления предикатов с равенством формулируются только для инклюзивных кванторов. В этом исчислении эксклюзивные кванторы могут быть элиминированы: для формулы ее части $(Ex) K$ и $(Ux) K$ могут быть заменены соответственно формулами

$$(\exists x)(x \neq y_1 \& \ldots \& x \neq y_n \& K) \qquad (1)$$

и

$$(x)(x = y_1 \vee \ldots \vee x = y_n \vee K), \qquad (2)$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — полный набор свободных переменных формулы $(Ex) K$, а формулы $(ex) K$ и $(ux) K$ — формулами (1) и (2), где $y_1, \ldots, y_n$ — полный набор свободных и связанных переменных, в области действия которых находится заменяемая часть $(ex) K$ или $(ux) K$ (областью действия свободной переменной называется вся формула).

Доказывается, что для каждой замкнутой формулы L, содержащей только инклюзивные кванторы, можно построить эквивалентную ей формулу $\varphi(L)$, содержащую только слабо эксклюзивные кванторы и не содержащую равенств. Отсюда следует, что все, что можно записать в исчислении предикатов с равенством (с инклюзивными кванторами), можно записать и в исчислении без равенства, но со слабо эксклюзивными кванторами.

Различные трактовки кванторов приводят к различным трактовкам «аксиомы абстракции». Известно, что формулировка этой аксиомы в терминах инклюзивных кванторов

$$(\exists x)(y)(y \in x \equiv K), \qquad (3)$$

где K — формула исчисления предикатов с предикатом принадлежности $\in$, не содержащая x, ведет к парадоксу Рассела. Автор предлагает заменить схему (3) схемой

$$(\exists x)(y)(y \neq x \supset (y \in x \equiv L^+)), \qquad (4)$$

где L^+ получена из формулы L исчисления предикатов с предикатами принадлежности и равенства, не содержащей переменной x, путем замены ее частей вида $(\exists z) M$ формулами $(\exists z)(z \neq x \& M)$, а частей вида $(z) M$ — формулами вида $(z)(z \neq x \supset M)$.

Методы, которыми из (3) получаются парадоксы, при применении их к (4) приводят к истинным утверждениям. Однако вопрос о непротиворечивости исчислений, основанных на (4), остается открытым. Систему, основанную на (4), можно рассматривать как наименьшую систему, из которой исключены все непредикативные (в смысле Рассела) определения. Следовательно, противоречивость такой системы свидетельствовала бы о том, что непредикативные определения не являются единственной причиной возникновения парадоксов. В заключение статьи автор приводит различные трактовки понятия непредикативности.

Б. Ю. Пильчак

2675. О подтверждении и рациональном погружении. Леман (On confirmation and rational betting. Lehman R. Sherman), J. Symbolic Logic, 1955, 20, № 3, 251—262 (англ.)

Пусть L — множество выражений некоторой дедуктивной теории, а $C(h, e)$ — действительная функция, определенная для некоторых пар h, e элементов L. Функция C называется функцией рационального погружения (rational betting function), если для всякого множества пар $\langle h_i, e_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, и для всякой системы натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ существует функция F (называемая функцией возможности), определенная в L и такая, что

1) F принимает значения 0, 1,

2) $F(\sim s) = 1 - F(s)$,

3) $F(s, r) = F(s) F(r)$,

4) $\sum_{i=1}^{n} F(e_i) = 0$,

5) $G(F) = \sum_{i=1}^{n} x_i F(e_i) [F(h_i) - C(h_i, e_i)] \geqslant 0$.

Автор доказывает, что если C — функция рационального погружения, то:

(1) C удовлетворяет обычным аксиомам функций подтверждения (см., например, J. Hosiassion—Lindenbaum, J. Symbolic Logik, 1940, 5, 133—148);

(2) функцию C можно расширить до функции, определенной для всех пар h, e в L, в которых e не является отрицанием тавтологии. J. Łoś

2676. Элементарно определимый анализ. Гжегорчик (Elementarily definable analysis. Grzegorczyk A.), Fundam. math., 1955, 41, № 2, 311—338 (англ.)

Вводятся определения. Элементарно определимым соотношением между положительными числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и положительными функциями положительного переменного $f_1, f_2, \ldots, f_k$ называется каждое соотношение R, которое может быть выражено посредством некоторого числа первоначальных соотношений: $x = y+1$, $x > 0$, $x = 0$, $x = y^z$ $(z > 0)$, связанных знаками логических операций; x, y и z — целочисленные переменные. Оператор минимума $(\mu x)\,[R(\ldots x \ldots)]$ определяется как наименьшее целое число x, удовлетворяющее соотношению $R(\ldots x \ldots)$, или как число 0.

Если соотношение R, входящее в формулу, определяющую функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\mu x_0)\,[R(x_0, x_1, \ldots, x_n)],$$

или функционал

$$\Phi\langle f_1, \ldots, f_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = (\mu x_0)\,[R(f_1, \ldots, f_k, x_0, x_1, \ldots, x_n)],$$

элементарно определимы; то функция f и функционал Φ называются элементарно определимыми. Известно, что действительные числа могут быть представлены функциями от натурального переменного. Автор дает 5 способов представления этого вида.

Основным результатом статьи являются теоремы, устанавливающие, что большая часть анализа, в частности анализ непрерывных функций, имеет дело с элементарно определимыми понятиями. Таким образом, предел элементарно определимой сходящейся последовательности есть элементарно определимое действительное число. Каждая действительная функция φ одного переменного, непрерывная в элементарно определимом интервале $[a, b]$, является элементарно определимой и элементарно равномерно непрерывной. Более того, точка, в которой функция φ имеет свой максимум, функция обратная φ, производная и интеграл являются элементарно определимыми. Элементарно определимые разрывные функции не обладают этими свойствами. Например, существует элементарно определимая действительная функция $\varphi(Q)$, которая принимает только значения 0 и 1; 1 будет значением функции только для одного действительного числа a, которое не является элементарно определимым.

Автор доказывает также, что существует элементарно определимое множество, единственный элемент которого есть действительное число, не определимое элементарно. S. Jaśkowski

2677. Об алгоритмической сводимости. Успенский В. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 66—69

Краткое изложение обзорного доклада, прочитанного на съезде. Указываются следующие виды алгоритмической сводимости:

1. Сводимость по вычислимости функции φ и функции ψ: существует частично-рекурсивный оператор T такой, что $\varphi = T[\psi]$.

2. Сводимость по разрешимости предиката P к предикату $Q \equiv$ сводимость по вычислимости характеристической функции предиката P и характеристической функции предиката Q.

3. Сводимость по перечислимости множества R к множеству S: существует вычислимая операция U такая, что $R = U(S)$ (РЖМат, 1956, 5682).

4. Сводимость семейства функций A к семейству функций $B \equiv$ существует частично-рекурсивный оператор T такой, что для всех f: $f \in B \to T[f] \in A$ (РЖМат, 1957, 2845).

Пост и Клини (РЖМат, 1956, 1910) ввели понятие степени невычислимости и исследовали полуструктуру $\mathfrak{S}$ степеней невычислимости.

Остальным концепциям сводимости (2, 3, 4) соответствует понятия степени неразрешимости, неперечислимости и трудности, которые порождают соответствующие полуструктуры P, Π и Ω (последняя оказывается структурой) (РЖМат, 1957, 2845). P была исследована Мучником (РЖМат, 1957, 2851), Ω — Медведевым (РЖМат, 1957, 2845). Имеет место цепочка изотерофизмов $(\simeq)$ и включений: $P \simeq \mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S} \simeq \simeq \Pi \simeq \Pi_2 \subset \Omega$. Б. А. Трахтенброт

2678. Решение проблемы Тарского. Майхилл (Solution of a problem of Tarski. Myhill John), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 1, 49—51 (англ.)

Тарский (реф. 2684 К) поставил следующие проблемы:

1) Всякая ли существенно неразрешимая аксиоматизируемая теория имеет существенно неразрешимую конечно аксиоматизируемую подтеорию?

2) Остается ли в силе следующая теорема (*), если выражение «конечно аксиоматизируемая» заменить на «аксиоматизируемая»:

(*) Пусть T_1 и T_2 — такие совместимые теории, что каждая константа из T_2 является также константой теории T_1. Если T_2 — соответственно неразрешима и конечно аксиоматизируема, то неразрешима T_1 и всякая подтеория T_1, имеющая те же константы, что и T_1.

Крейсел в реферате этой статьи Тарского (см. там же) построил некоторые противоречащие примеры к обеим проблемам Тарского, содержащие бесконечное число констант. Оставались открытыми следующие вопросы:

1') Всякая ли аксиоматизируемая существенно неразрешимая теория с конечным числом констант имеет существенно неразрешимую конечно аксиоматизируемую подтеорию?

2') Остается ли в силе теорема (*), если выражение «конечно аксиоматизируемая» заменить на «аксиоматизируемая» и содержащая только конечное число констант»?

Автор дает отрицательный ответ на оба эти вопроса. H. Rasiowa

2679. Некоторые логические сводимости и проблемы разрешимости. Роджерс (Certain logical reduction and decision problems. Rogers Hartley, Jr.), Ann. Math., 1956, 64, № 2, 264—284 (англ.)

Приводятся некоторые новые результаты о проблеме сводимости для тождественной истинности в любой интерпретации. Проблема общезначимости для формул исчисления предикатов первой ступени сводится к проблеме о тождественной истинности: а) формул с одним двуместным переменным предикатом при всех интерпретациях отношениями частичного порядка на счетной области (теорема 1) или отношениями порядка в структурах (теорема 3); б) формул с двумя двуместными переменными предикатами при всех интерпретациях отношениями эквивалентности на счетной области (теорема 2); в) формул с одним трехместным переменным предикатом при всех интерпретациях предикатами $x \cup y = z$, где $x \cup y$ — сумма элементов структуры, или предикатами $x \cap y = z$, где $x \cap y$ — произведение элементов структуры (следствие 7).

В теореме 4 даются условия, при которых вопрос о тождественной истинности формулы исчисления предикатов первой ступени может быть сведен к вопросу о тождественной истинности формулы с одним n-местным переменным предикатом при всех интерпретациях его предикатами из заданного множества n-местных предикатов над целыми числами.

В силу теоремы Чёрча о неразрешимости проблемы разрешимости (в смысле тождественной истинности) для формул исчисления предикатов первой ступени, каждое из приведенных утверждений влечет за собой неразрешимую проблему. Б. Ю. Пильчак

2680. **Арифметическое представление рекурсивно-перечислимых множеств. Робинсон** (Arithmetical representation of recursively enumerable sets. Robinson Raphael M.), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 2, 162—186 (англ.)

Дейвис показал (РЖМат, 1954, 1532), что всякое рекурсивно-перечислимое множество натуральных чисел представимо в виде

$$n \in S \equiv (Eb)(w)[w \leqslant b \rightarrow \rightarrow (Ex_1, \ldots, x_\lambda)\{P(n, b, w, x_1, \ldots, x_\lambda) = 0\}],$$

где P — многочлен с целочисленными коэффициентами, а λ остается ограниченным для всех рекурсивно-перечислимых множеств.

Автор устанавливает, что точная верхняя грань для $\lambda \equiv 4$ не превосходит 4 и > 0, и считает правдоподобным, что она равняется 4. Б. А. Трахтенброт

2681. **Неразрешимость предложений первого порядка в теории свободных группоидов. Яськовский** (Undecidability of first order sentences in the theory of free groupoids. Jaśkowski S.), Fundam. math., 1956, 43, № 1, 36—45 (англ.)

Ввиду теоремы Чёрча о неразрешимости узкого функционального исчисления, исследования проблем разрешимости можно вести в двух направлениях. С одной стороны, мы ищем конкретные случаи классов выражений, для которых существует рекурсивный алгоритм решения проблемы разрешимости. С другой стороны, ведутся исследования по сведению общей проблемы разрешимости к некоторым специальным классам. Рассматриваемая работа относится к исследованиям второго рода.

Автор рассматривает три вида проблем разрешимости для любого класса выражений, а именно — проблему выполнимости, проблему тавтологии (т. е. невыполнимости отрицания выражений данного класса) и проблему выполнимости в данной модели.

Автор доказывает теоремы, показывающие, что проблемы выполнимости и тавтологии для произвольного класса элементарных утверждений могут быть сведены к проблеме разрешимости в свободном группоиде некоторого класса в функциональном исчислении высшего порядка. Одна из этих теорем (теорема 7) была дана автором без доказательства в более ранней работе (РЖМат, 1955, 2076).

Кроме того, автор получил некоторое обобщение теоремы Пеписа (Pepis, Fundam. math., 1938, **30**, 325, теорема 35), состоящее в том, что проблема выполнимости для элементарных предложений сводима к проблеме выполнимости выражения вида

$$\prod_{y}\sum_{z}\prod_{x} P(x, y, z) \prod_{x_1} \ldots \prod_{x_s} \pi(x_1, \ldots, x_s, P, E)$$

(где E — одноаргументный предикат, а T_1 — открытое выражение), удовлетворяющего некоторому дополнительному условию. H. Rasiowa

2682. **Прямое доказательство общерекурсивной неразрешимости проблемы разрешимости. Калмар** (Közvetlen bizonyítás az eldöntésproblémának általános rekurzív algoritmussal yalo megoldhatatlanságára. Kalmár László), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. kozl., 1956, 6, № 1, 1—25 (венг.)

Настоящая работа была уже опубликована на немецком языке (РЖМат, 1958, 69).

2683 К. **Алгебраическая структура математических теорий. Хенкин** (La structure algébrique des théories mathématiques. Henkin L. Paris, Gauthier—Villars; Louvain, E. Nauwelaerts, 1956, 53 p). (франц.)

Книга состоит из трех частей. В первой части излагается доказательство теоремы Стона о представлении булевых алгебр, причем отмечается, что эта теорема не может быть доказана без помощи аксиомы выбора.

Название второй части совпадает с названием книги (слово «структура» здесь не является термином, принятым в теории структур, а понимается в обычном смысле). Эта часть посвящена изложению некоторых абстрактных алгебр и их связи с математическими теориями, в частности с математической логикой (булевы алгебры, алгебра интуиционизма).

В последней части рассматриваются алгебры нового вида, именуемые цилиндрическими. Определение этих алгебр основано на следующих понятиях:

Пусть X — непустое множество, N — положительное натуральное число. X^N есть множество N-ок вида $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}\rangle$, $a_i \in X$ $(i = 0, \ldots, N-1)$. Диагональное множество d_{ij}/X^N — это множество таких элементов a указанного вида, у которых $a_{i+1} = a_{j+1}$. Операция цилиндрификации $C_i^{(X^N)}$ относит каждому $Y \subseteq X^N$ множество таких элементов X^N, каждый из которых отличается от некоторого элемента Y не более чем $i+1$-м членом N-ки.

Совсем конкретная цилиндрическая алгебра размерности N (algèbre cylindrique très concrète de dimension N) — это алгебра, определяемая некоторым классом A подмножеств X^N, содержащим все диагональные множества, пустое множество, само X^N и замкнутым относительно операций объединения, пересечения, дополнения и цилиндрификации, и только что перечисленными операциями.

Понятие конкретной цилиндрической алгебры размерности N получается из предыдущего путем простого обобщения: вместо X^n рассматривается объединение I попарно непересекающихся множеств вида X^n. Понятие конкретной цилиндрической алгебры размерности N получается далее путем перехода от I к некоторому классу подмножеств I, замкнутому относительно перечисленных выше операций. Алгебраические законы, справедливые во всех цилиндрических алгебрах, называются цилиндрическими законами.

Приводится следующая система аксиом, введенная Тарским и Томпсоном (Tarski A., Thompson F. B., Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, p. 65), определяющая понятие абстрактной цилиндрической алгебры размерности N: P1. $C_i 0 = 0$. P2. $y \cdot C_i y = y$. P3. $C_i(y \cdot C_i z) = C_i y \cdot C_i z$. P4. $C_i C_j y = C_j C_i y$. P5. $d_{ii} = 1$. P6. $i, j \neq k \supset d_{ij} = C_k(d_{ik} d_{jk})$. P7. $i \neq j \supset C_i(d_{ij} y) \cdot C_i(d_{ij} - y) = 0$. (Здесь $\langle B, \cdot, +, -, 0, 1\rangle$ — булева алгебра, $d_{ij} \in B$, C_i — унарная операция на B, переменные $y, z \in B$, $i, j, k > N$). Эти аксиомы определяют (абстрактную) цилиндрическую алгебру размерности N.

Так как цилиндрическая алгебра является булевой, то можно говорить о ее атомах и об атомных цилиндрических алгебрах. Атом называется элементарным, если выполнено условие: $C_j C_{i_1} \ldots C_{i_n} x \cdot C_k C_{i_1} \ldots C_{i_n} x =$

$= C_{i_1} \ldots C_{i_n} x$ для любых j, k, $i_1, \ldots, i_n < N$, $j \neq k$ (при $n = 0$, $C_{jx} \cdot C_{kx} = x$).

Теорема 1. Пусть B — атомная цилиндрическая алгебра размерности N. Для того чтобы B была изоморфна конкретной цилиндрической алгебре A размерности N, достаточно, чтобы каждый атом был элементарен. В таком случае имеется изоморфизм B на A, который каждому атому B ставит в соответствие элемент A, содержащий только одну N-ку.

Теорема 2. Абстрактная цилиндрическая алгебра размерности N изоморфна конкретной тогда и только тогда, когда существует ее атомное расширение, в котором каждый атом элементарен.

Теорема 3. Всякая абстрактная цилиндрическая алгебра обладает атомным расширением.

Теорема 4. Абстрактная цилиндрическая алгебра размерности M изоморфна конкретной тогда, и только тогда, когда для каждого $N > M$ она имеет чистое расширение размерности N, т. е. такое, что для каждого $x \in A$ имеет место $C_i x = x$, $i = M, M+1, \ldots, N-1$.

Последнюю теорему пока что удается доказать только метаматематическими методами. А. С. Есенин-Вольпин

2684 К. **Неразрешимые теории. Тарский (Совместно с Мостовским и Робинсоном)** (Undecidable theories. Tarski Alfred. In collaboration with Andrzej Mostowski and Raphael M. Robinson. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1953, XI+98 pp., 9 florins) (англ.)

Книга дает вводный обзор методов, которые были введены автором для установления неразрешимости некоторых довольно простых разделов математики (теория групп, теория структур, абстрактная проективная геометрия, алгебры замыканий и др.). Методы и цели этой книги, вероятно, понятнее и ближе «обыкновенному» математику, чем методы и цели любой другой области математической логики.

Терминология. Все рассматриваемые системы (или «теории», как их называет автор) формализованы в исчислении предикатов первой ступени с равенством; множество формул (обще) рекурсивно; если рекурсивно множество аксиом, то теория называется аксиоматизируемой; теория T_2 называется расширением (под) теории T_1, если каждая доказуемая формула из T_1 доказуема в T_2; теория называется существенно неразрешимой, если каждое ее непротиворечивое аксиоматизуемое расширение неразрешимо. Константа из T_2 — например, функциональный символ f — (формально) определима в T_1 по отношению к (общему расширению) T, если имеется выражение Φ теории T_1 такое, что $(\forall x)[f(x) = \Phi(x)]$ доказуема в T (стр. 20). (Метаматематическая) определимость функции $F(n)$ вводится на стр. 40 через последовательность Δ_0, Δ_1 символов из T_1 и выражение Φ такие, что для каждого натурального числа n $(\forall v)[\Phi(\Delta_n, v) \longleftrightarrow v = \Delta_{F(n)}]$ доказуема в T_1; все функции, метаматематически определимые в аксиоматизируемой системе, общерекурсивны. $T^{(P)}$ — теория T, переменные которой удовлетворяют условию P. Теория T_2 (слабо) интерпретируема в T_1, если аксиомы T_2 выводимы из аксиом T_1 и надлежащих определений в T_1 констант из T_2 (совместимы с этими аксиомами и определениями); T_2 относительно интерпретируема в T_1, если $T_2^{(P)}$ интерпретируема в T_1.

В части I получаются простые общие результаты, например: если T_2 — неразрешимое конечное расширение T_1, то T_1 неразрешима (теорема 5), или: если T_2 — существенно неразрешима, конечно аксиоматизируема и слабо интерпретируема в T_1, то каждая подтеория T теории T_1 неразрешима (теорема 8); здесь T_1, T_2 и T имеют одни и те же константы.

Для применения этих теорем необходимо иметь простые теории, существенная неразрешимость которых известна. Одна из таких теорий — это система Робинсона (Клини, Введение в метаматематику, § 41); имеется и другая, более слабая теория (R), стр. 53, в которой есть только схема аксиом, выразимых в цифрах. Обе эти теории натуральных чисел существенно неразрешимы, так как в них (метаматематически) определимы все рекурсивные функции. (Элементарная) теория произвольных целых чисел существенно неразрешима, потому что теория натуральных чисел относительно интерпретируема в теории произвольных целых чисел. Несколько более длинное рассуждение устанавливает существенную неразрешимость теории неплотно упорядоченных колец.

В части III показывается неразрешимость теории групп $G[x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad \exists z (x = y \circ z), \exists y (x = y \circ z)]$ (Эта теория не является существенно неразрешимой, потому что теория коммутативных групп разрешима); теория произвольных целых чисел относительно интерпретируема в некотором расширении G_1 теории G; непротиворечивость G_1 устанавливается посредством следующей модели: переменные x, y, z изменяются в области взаимно однозначных функций над целыми числами $(x \circ y)(n) = x[y(n)]$, «целыми числами» модели служат те функции, которые перестановочны с функцией «следующий за» и y «делит» x, если все z, коммутирующие с x, коммутируют также с y.

Простые общие результаты рассматриваются в книге с большим вниманием, чем гораздо более трудные построения, необходимые для применения этих результатов. Поэтому книга не дает полной картины трудной работы, проделанной автором и его сотрудниками, но зато она доступна широкому кругу читателей.

Примечание референта. В связи с усилением теорем 5 и 8, Тарский спрашивает (стр. 19): 1) Верна ли теорема 5 для произвольных аксиоматизируемых расширений? 2) Всякая ли существенно неразрешимая аксиоматизируемая теория имеет конечно аксиоматизируемую существенно неразрешимую подтеорию? На эти вопросы следует дать отрицательный ответ: 1) Одномерное исчисление предикатов M с константами A_i, c_i, $i = 0, 1, \ldots$, разрешимо; если $p_i(n)$ — рекурсивное перечисление примитивно рекурсивных предикатов, то рекурсивны следующие аксиомы: $A_i(c_j)(\neg A_i(c_j))$, если имеет место (не имеет места) $p_i(j)$; M, расширенное путем присоединения этих аксиом, (существенно) неразрешима. Проблема Тарского остается открытой для теорий с конечным числом констант. 2) Упомянутая выше система (R) не имеет существенно неразрешимой подтеории, так как каждая такая подтеория имеет конечную модель. Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 384 G. Kreisel

---

См. также: 2589, 2591, 2592, 2593, 2614, 2652, 2775

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

2685. **О преобразовании некоторых тригонометрических сумм. Корпут** (On the transformation of certain trigonometric sums. Corput J. G. van der), Итон леаналиса математит, J. analyse math., 1955—1956, 4, № 2, 236—245, 6 (англ.; рез. иврит.)

Рассматривается сумма

$$\sum_{n\in(a,\,b)} e^{2\pi i\rho n}\,(n-\beta)^{Q} f_m(\gamma n+c), \qquad (1)$$

где ρ, β, γ, c — вещественные числа, Q — целое неотрицательное число $\leqslant 1$, m — натуральное число $\leqslant 1$ и $f_m(x)$ обозначает любую из функций $\sin^{-m}\pi x$, $(\cos\pi x)\times\times\sin^{-m}\pi x$. Если ρ — целое число или же $b-a\leqslant 1$, то сумма (1), называется «элементарной»; ее асимптотическую оценку можно получить формулой Эйлера—Маклорена. Посредством дифференциальных тождеств функции f_m заменяются линейными выражениями косеканса, котангенса и их производных; получаются суммы вида

$$\sum_{n\in(a,\,b)} e^{2\pi i\rho n}\,(n-\beta)^{Q} f(\gamma n+c), \qquad (2)$$

где через $f(x)$ обозначается любая из функций $\operatorname{cosec}\pi x$, $\operatorname{ctg}\pi x$ или их производная произвольного порядка. Автор доказывает тождество (слишком длинное, чтобы его привести здесь), применяя которое, разлагает (2) на «элементарные» суммы. Частный случай тождества открыли Шотт и Уотсон (Schott G. A., Watson G. N., Quart. J. Pure and Appl. Math., 1916, 47, 313—314). Э. К. Фогелс

2686. Применение $\zeta(s)$ к решету Эратосфена. Виноградов А. И., Матем. сб., 1957, 41, № 1, 49—80

Письмо в редакцию. Виноградов А. И., Матем. сб., 1957, 41, № 3, 415—416

Обобщается «решето Эратосфена» по идее А. Сельберга. Дается общий вид оценки сверху и снизу функции $N(z,\theta)$, выражающей число членов последовательности целых $\{a_\nu\}$, $\nu=1,\ldots,N$, не сравнимых с данными вычетами заданной конечной системы простых чисел $p_r\leqslant z^{\theta}$, $z<N$, $\theta\leqslant 1\,2$ по $\bmod p_k$, $k=1,\ldots,r$. Для получения более точного выражения нижней границы $N(z,\theta)$ применяется теория $\zeta(s)$.

Следствием является решение бинарной задачи для «почти простых» чисел и для «почти простых» близнецов (число простых множителей «слагаемых» не больше 3). В. М. Архангельская

2687. Некоторые асимптотические формулы аддитивной теории чисел. Субханкулов М. А., Уч. зап. Тадж. ун-та, 1957, 10, 15—22

В работе выводятся асимптотические формулы для числа решений следующих уравнений:

$$n=x^2+Q,\quad n=x^2-Q,\quad n=p-Q,$$

где p — простое, Q — бесквадратное, x — целое с условием $p\leqslant X$, $Q\leqslant X$, $x^2\leqslant X$.

Приведем одну из них. Пусть $n>n_0$ — любое натуральное число, $n=n_1n_2$, $(n_1,\,n_2)=1$ и n_2 — наибольший бесквадратный делитель n; (n/p) — символ Якоби; p — простое;

$$\gamma=\begin{cases}2/3, & \text{если } n\equiv 0,1\ (\bmod 4),\\ 4/3, & \text{если } n\equiv 2,3\ (\bmod 4).\end{cases}$$

Тогда для $J(n)$ — числа решений уравнения $n=x^2+Q$ имеет место равенство

$$J(n)=\frac{6\gamma n^{1/2}}{\pi^2}\,\sigma(n)+O\left(n^{1/3+\varepsilon}\right),$$

$$\sigma(n)=\prod_{\substack{p\mid n\\ p\geqslant 3}}\left(1-\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{p^2-1}\right)\times$$

$$\times\prod_{\substack{p\mid n_1\\ p\geqslant 3}}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\prod_{\substack{p\mid n_2\\ p\geqslant 3}}\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right).$$

Метод работы основан на разложении функции $\psi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu^2(m)\,x^m$ ($\mu(m)$ — функция Мёбиуса), для которой окружность $|x|=1$ является естественной границей, в ряд простейших дробей.

Автор отмечает, что такого рода ряды впервые рассматривались Н. П. Романовым (Матем. сб., 1948, 23, 652) и интересны, в частности, тем, что ясно показывают характер роста функции, разложенной в ряд, при приближении к любой из ее особенностей.

Примечание референта. Статья содержит много опечаток, затрудняющих чтение. А. Ф. Лаврик

2688. О фундаментальной теореме из теории простых чисел. Эррера (Sur le théorème fondamental des nombres premiers. Errera M. A.), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955, CBRM. Liège—Paris, 1956, 11—118 (франц.)

Излагается новый вариант вывода теоремы Адамара из теории простых чисел, примыкающий к доказательству Э. Ландау—Икехара. Как и в доказательстве Ландау—Икехара, автор исходит из легко доказываемого равенства

$$\int_0^{\infty}[H'(u)-1]\,\frac{2\sin^2\lambda(y-u)^2}{\lambda(y-u)^2}\,du=$$

$$=\int_{-2\lambda}^{2\lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\lambda}\right)h(t)\,e^{yti}dt,$$

где $h(t)=-\dfrac{1}{1+ti}\,\dfrac{\zeta'}{\zeta}(1+ti)-\dfrac{1}{ti}$.

$$H(u)=e^{-u}\sum_{n\leqslant}\Lambda(n).$$

В отличие от других изложений, в которых λ и y считаются независимыми параметрами, он полагает с самого начала $\lambda=y^2$. Приведенное выше равенство упрощается в том смысле, что становится однопараметрическим, но нужный для дальнейшего вопрос о стремлении к нулю правой части этого равенства при $y\to\infty$ усложняется. Вместо легко доказываемых соотношений вида $\int_a^b f(t)e^{iyt}dt\to 0$ приходится выводить оценки типа $\int_a^b f(y,t)\,e^{ig(y)t}dt=O(1/g(y))$, которые вряд ли можно доказать, не опираясь на оценки логарифмической производной дзета-функции Римана вдоль единичной прямой, так как $f(y,t)$ содержит здесь $\zeta'/\zeta(1+ti)$.

Примечание референта. Внесение вопроса о росте $\zeta'/\zeta(1+ti)$ является явным шагом назад в доказательстве теоремы Адамара по сравнению с доказательствами, данными Н. Винером и Икехара, которым удалось обойти вопрос о росте $\zeta'/\zeta(s)$. Автор формально избавляется от упомянутых затруднений, пользуясь леммой общего характера, согласно которой из ограниченности $\dfrac{\partial}{\partial t}f(y,t)$ должна следовать оценка $\int_a^b f(y,t)\,e^{ig(y)t}dt=O(1/g(y))$. На самом деле

эта оценка следует только из равномерной (по отношению к y) ограниченности $\frac{\partial}{\partial t} f(y, t)$. Н. П. Романов

2689. О густоте совершенных чисел. Хорнфек, Вирзинг (Über die Häufigkeit vollkommener Zahlen. Hornfeck Bernhard, Wirsing Eduard), Math. Ann., 1957, **133**, № 5, 431—438 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}_\varkappa = \{n;\ \sigma(n) = \varkappa n,\ n > 0,$ целое$\}$ и $\mathfrak{S} = \{n;\ n \mid \sigma(n),\ n > 0,$ целое$\}$, а $A_\varkappa(x)$ и $S(x)$ — их сумматорные функции. С помощью элементарных средств доказано, что $A_\varkappa(x)$ и $S(x)$ суть $O(x^\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное (указывается, что даже $O(\exp \varepsilon \log x \times (\log\log x)^{-1} \log\log\log x)$). Б. В. Степанов

2690. Некоторые теоремы о k-свободных числах. Фолькман (Einige Sätze über k-freie Zahlen. Volkmann Bodo), J. reine und angew. Math., 1957, **198**, № 1—2, 7—9 (нем.)

Пусть для фиксированного целого числа $k \geqslant 2$ натуральное число a представлено в виде $a = t_k(a) P_k(a)^k$, где $P_k(a)^k$ входит множителем в разложение a как наибольшая k-я степень. Числа a, для которых $P_k(a) = 1$, называются k-свободными. Множество всех k-свободных чисел обозначим через $\mathfrak{C}^k$.

Пусть f и d — натуральные числа с $(f, d) = 1$, $\mathfrak{C}_f^k$ — множество k-свободных чисел a с $(a, f) = 1$, $\mathfrak{T}_k$ — множество чисел a с $(a, f) = 1$ и $P_k(a) = d$, $\mathfrak{A}_{f,d}^k$ — множество чисел a с $(a, f) = 1$ и $P_k(a) \geqslant d$.

Для этих множеств $\mathfrak{M}$ обозначим через $M(N)$ число элементов $\leqslant N$ (N — положительное) и предельное значение $\lim_{N\to\infty} M(N)/N$, если оно существует, примем за плотность $D^*(\mathfrak{M})$.

Пусть $\zeta(k)$ — дзета-функция Римана.

Доказывается:

$$D^*(\mathfrak{C}^k) = \frac{1}{\zeta(k)},$$

$$D^*(\mathfrak{C}_f^k) = \frac{1}{\zeta(k)} \prod_{p \mid f} \frac{p^{k-1}}{1 + p + \ldots + p^{k-1}},$$

$$D^*(\mathfrak{T}_{f,d}^k) = \frac{1}{\zeta(k)\, d^k} \prod \frac{p^{k-1}}{1 + p + \ldots + p^{k-1}},$$

$$D^*(\mathfrak{A}_{f,d}^k) = \prod_{p \mid f} \frac{p^{-1}}{p} -$$

$$- \frac{1}{\zeta(k)} \prod \frac{p^{k-1}}{1 + p + \ldots + p^{k-1}} \sum_{\substack{b=1 \\ (b,f)=1}}^{d-1} \frac{1}{b^k}.$$

С. В. Огай

2691. О гармоническом среднем делителей натуральных чисел. Канольд (Über das harmonische Mittel der Teiler einer natürlichen Zahl. Kanold Hans-Joachim), Math. Ann., 1957, **133**, № 4, 371—374 (нем.)

Гармоническое среднее делителей натуральных чисел определяется по формуле

$$\frac{1}{H(n)} = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} \frac{1}{d}.$$

Относительно $H(n)$ доказаны две теоремы:

Теорема 1. Существует конечное число достаточно больших натуральных чисел, для которых, при любом постоянном C имеет место равенство $H(n) = C$.

Далее, если $\mathfrak{M}$ обозначает множество натуральных чисел, для которых $H(n)$ — целое число, то имеет место

Теорема 2. Пусть $A_H(x)$ обозначает число натуральных чисел $n \in \mathfrak{M}$, $n \leqslant x$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ имеем

$$A_H(x) = O\left(x^{1/2} 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log x}{\log\log x}}\right).$$

А. П. Лурсманашвили

2692. Об одном приложении операторной дзета-функции. Нарзуллаев Х. Н., Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 131—140

В одной из предыдущих работ (О некоторых приложениях функционального уравнения для операторной дзета-функции, Тр. Узбекского ун-та, сер. матем., 1951) автор показал, что бесконечное произведение Эйлера для синуса и функциональное уравнение для тэта-функции Якоби являются непосредственным следствием из операторного аналога функционального уравнения Римана для дзета-функции, полученного референтом ранее (Изв. Н.-и. ин-та матем. и механ. при Томск. ун-те, 1945, 3 : 1, 145—173).

В рассматриваемой работе из тех же источников выводится формула для сумм вида $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) f(nx)$. ($\tau(n)$ — число делителей n) (Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ОГИЗ, 1948).

Н. П. Романов

2693. Некоторые общие тождества операторной дзета-функции. Сабиров М. С., Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 141—146

Пользуясь методом, развитым референтом (Изв. ин-та матем. и механ. при Томск. ун-те, 1945, 3 : 1, 145—173), автор получает тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} f(x^n) = (s + \lambda) \int_1^x \frac{[u]}{u^{s+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^{un})}{n^s} \Lambda(n)\, du$$

$$\left(\lambda = -x \log \frac{d}{dx}\right),$$

а также тождество Ламберта и некоторые его видоизменения. Н. П. Романов

2694. ζ-функции алгебраических кривых и многообразий. Дёйринг (The Zeta-functions of algebraic curves and varieties. Deuring M.), J. Indian Math. Soc., 1956, **20**, № 1—3, 89—101 (англ.)

Пусть k — конечное поле, q — число его элементов, k_f — его расширение степени f. V — абсолютно-неприводимое многообразие размерности d, не имеющее особых точек, N_f — число точек V, рациональных над k_f. Полагаем

$$\frac{Z'}{Z}(U, V) = \sum_{f=1}^{\infty} N_f U^{f-1}. \qquad (1)$$

Равенство (1) определяет функцию $\zeta(s, V) = Z(U, V)$, где $U = q^{-s}$. Вейль высказал об этой функции гипотезы, касающиеся области сходимости ряда (1), существования функционального уравнения и аналитических свойств самой $\zeta(s, V)$. В частности, он предполагает, что $Z(U, V)$ — рациональная функция аргумента U (для $d = 1$ все утверждения Вейля уже доказаны). В реферируемой статье дается обзор попыток обобщить указанные выше исследования на поля нулевой характеристики. Пусть теперь k — поле алгебраических чисел, $k_\mathfrak{p}$ — поле классов вычетов по простому $\mathfrak{p}$. V — абсолютно-неприводимое многообра-

зие, определенное над k и не имеющее особых точек. $V_{\mathfrak{p}}$ — проекция $V \bmod \mathfrak{p}$ (т. е. гомоморф V по $\bmod \mathfrak{p}$). Высказывается гипотеза, что для почти всех $\mathfrak{p}$ степени многочленов, образующих $Z(U, V_{\mathfrak{p}})$, совпадают с числами Бетти многообразия V, если это последнее рассматривать над полем комплексных чисел (это утверждение доказано для некоторых частных случаев грассмановских многообразий). Если принять эту гипотезу, а также и все утверждения Вейля, то относительно функции

$$\zeta(s, V) = \prod_{\mathfrak{p}} \zeta(s, V_{\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p}} Z(U, V_{\mathfrak{p}}),$$

где $U = N\mathfrak{p}^s$, можно высказать гипотезы, аналогичные случаю конечного поля; в частности есть основание думать, что

$$\zeta(d - s, V)\zeta^{-1}(s, V)$$

выражается в конечном виде через показательные функции и Г-функцию. В заключительной части статьи функция $\zeta(s, V)$ вычисляется для некоторых частных случаев многообразия V. Н. Г. Чудаков

2695. Представители связной компоненты группы классов иделей. Артин (Representatives of the connected component of the idèle class group. Artin Emil), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 51—54 (англ.)

k — поле алгебраических чисел, r_1 — число бесконечных действительных простых $\mathfrak{p}$, r_2 — комплексное, $r = r_1 + r_2 - 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ — тотально-положительные единицы. J — группа всех иделей $\mathfrak{a}$ поля k, $P(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} |a|_{\mathfrak{p}}$. C — группа классов иделей. Если $a \in C$, то $P(a) = P(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a} \in a$. J_0 и C_0 — ядра гомоморфизма P в группах J и C. $V = R \oplus \bar{Z}$, где R — поле действительных чисел, $\bar{Z}$ — топологическое замыкание кольца Z целых рациональных (топология Z определяется условием: все идеалы Z суть окрестности 0). Идель $\mathfrak{a} = \Phi_j(t)$ выбирается так, чтобы $u_j = \exp 2\pi i t k$ ($j = 1, 2, \ldots, r_2$), t — действительное, а все остальные компоненты $\mathfrak{a}$ равны 1; гомоморфизм

$$\varepsilon_1^{\lambda_1} \ldots \varepsilon_r^{\lambda_r} \Phi_1(t_1) \ldots \Phi_{r_2}(t_{r_2}), \qquad (1)$$

где $\lambda_i \in V$, $t_j \in R$ отображает свободную группу $rV + r_2 Z$ в J_0. Это отображение продолжается естественным гомоморфизмом $J_0 \to C_0$ до непрерывного отображения $rV/Z + r_2 R/Z \to C_0$. Ядром этого последнего является группа $rZ + r_2 Z$, что через факторизацию по Z влечет отображение

$$rV/Z + r_2 R/Z \to C_0. \qquad (2)$$

Пусть D_0 — образ левой части (2). В работе изучается структура D_0; в частности показывается, что D_0 — связная компонента группы C_0 и отображение (1) дает явное выражение для D_0. Связная компонента C отличается от D_0 на прямую, т. е. она изоморфна прямой сумме r соленоидов, r_2 окружностей и одной прямой. Н. Г. Чудаков

2696. Расслояемые пространства и блоки в теории чисел. Ямадзаки (Fibre spaces and sheaves in number theory. Yamazaki Keijiro), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 93—101 (англ.)

Пусть k — поле алгебраических чисел конечной или бесконечной степени и k^* — мультипликативная группа k, W — совокупность всех корней из 1; $K = k(W)$. $S(k)$ и $S(K)$ — соответственно совокупности конечных простых дивизоров полей k и K. $\mathfrak{p}$ — простой дивизор K, $K(\mathfrak{p})^*$ — мультипликативная группа классов вычетов $\bmod \mathfrak{p}$. Существует такой изоморфизм $\iota_{\mathfrak{p}}$ группы $K(\mathfrak{p})^*$ в W, что для $\iota_{\mathfrak{p}}(c)$ принадлежит классу c, где $c \in K(\mathfrak{p})^*$. Пусть $f \in k^*$; полагаем $f(\mathfrak{p}) = 0, \infty, \iota_{\mathfrak{p}}(f)$ соответственно условиям: $|f|_{\mathfrak{p}} < 1$, $|f|_{\mathfrak{p}} > 1$, $|f|_{\mathfrak{p}} = 1$, где $\bar{f}$ — класс $f \bmod \mathfrak{p}$. Полагаем теперь $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$, если $f(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{q})$ для всех $f \in k^*$. Тогда множество всех простых конечных дивизоров поля K распадается на классы по этому отношению эквивалентности. Множество этих классов $S(K)$ наделяем топологией (T-топологией), считая замкнутыми множествами все конечные множества. Автор использует идеи А. Вейля (Weil A., Fibre spaces in algebraic geometry. Lecture notes at University of Chicago, 1952) для построения расслояемых пространств над W и $S(K)$.

Основной результат работы состоит в установлении классификационной теоремы для так называемых главных расслояемых пространств, состоящей в том, что группа классов изоморфных пространств сама изоморфна фактор-группе A_m/S_m, где A_m — группа всех дивизоров k, простых с данным m, а S_m — группа таких главных дивизоров f поля k, которые удовлетворяют условию: $f \equiv 1 \pmod m$.

Во 2-й части статьи развитые идеи переносятся на аддитивную группу поля k. Н. Г. Чудаков

2697. О некоторых арифметических функциях. Делаж (Sur certaines fonctions arithmétiques. Delange Hubert), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 6, 611—614 (франц.)

Рассматриваются множества E простых чисел вида $E = E_1 \cup E_2 - E_3$, где E_1 — непустое множество простых чисел, принадлежащих одной или нескольким заданным арифметическим прогрессиям, $E_3 \subset E_1$, E_2 и E_1 не имеют общих элементов, E_j ($j = 2, 3$) — пустое, конечное или бесконечное множество простых чисел, причем в последнем случае такое, что ряд $\sum_{p \in E_j} p^{-\sigma}$ сходится при некотором $\sigma < 1$. Пусть $\omega_E(n)$ — число различных, а $\Omega_E(n)$ — число всех простых делителей n, принадлежащих E; $f(n)$ — одна из функций $\omega_E(n)$, $\Omega_E(n)$. Обозначим через A одно из следующих множеств: 1) множество всех натуральных бесквадратных чисел, если $f(n) = \omega(n)$; 2) множество всех натуральных чисел, если $f(n) = \Omega_E(n)$; 3) множество всех натуральных n, $n \equiv l \pmod k$, если $f(n) = \Omega_E(n)$ и E — множество всех простых чисел. Доказано, что сумма по всем $n \leqslant x$, $n \in A$

$$\sum z^{f(n)} = xF(z)(\ln x)^{\alpha(z-1)} + O(x(\ln x)^{\alpha \operatorname{Re} z - \alpha - 1}), \qquad (1)$$

где α — плотность множества E относительно множества всех простых чисел. $F(z)$ в случае 1) является целой функцией и оценка в (1) равномерна при $|z| \leqslant R$, R — фиксированное. В случаях 2), 3) $F(z)$ — мероморфна, причем ее полюсами являются в случае 2) точки множества E; а в случае 3) — все простые числа, не делящие $k/(k, l)$; оценка в (1) равномерна при $|z| \leqslant R < p_0$, где p_0 — наименьший из полюсов функции $F(z)$.

Отсюда следует, что число натуральных $n \leqslant x$ таких, что $n \in A$, $f(n) = m$, где m — натуральное число, равное

$$\{F(m/\alpha \ln_2 x) + O(m/\ln_2^2 x)\}\, \alpha^m x (\ln_2 x)^m / m! \ln^{\alpha} x,$$

если $\alpha < 1$, и равно

$$\{F_1(m-1)/\ln_2 x) + O(m/\ln_2^2 x)\}\, x (\ln_2 x)^{m-1}/(m-1)! \ln x,$$

если $\alpha = 1$. Здесь $\ln_2 x = \ln\ln x$, $F_1(z) = F(z)/z$, причем оценки равномерны при $1 \leqslant m \leqslant \lambda \ln_2 x$, где $\lambda > 0$ — любое фиксированное число, если $F(z)$ — целая, и $\lambda < \alpha p_0$, если $F(z)$—мероморфная функция.

Дается также асимптотическая формула для числа натуральных $n \leqslant x$, $n \in A$, $f(n) \equiv r \pmod q$.

Доказательства отсутствуют. Более частные результаты были получены ранее А. Селбергом, автором и Аддисоном (РЖМат, 1956, 135; 1957, 5320; 1958, 964).

И. П. Кубилюс

2698. О сильно аддитивных арифметических функциях. Деланж (Sur les fonctions arithmétiques fortement additives. Delange Hubert), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 12, 1604—1606 (франц.)

Пусть $f_j(n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — линейно независимые вещественные сильно аддитивные арифметические функции,

$$A_j(x) = \sum_{p \leqslant x} f_j(p)/p, \quad B_j(x) = \Big(\sum_{p \leqslant x} f_j^2(p)/p\Big)^{1/2}.$$

При достаточно больших x положим:

$$R_{jk}(x) = \big(B_j(x)\, B_k(x)\big)^{-1} \sum_{p \leqslant x} f_j(p)\, f_k(p)/p,$$

$$Q(x, u) = \sum_{j,\,k=1}^{m} R_{jk}(x)\, u_j u_k,$$

$Q_1(x, u)$ — обратная к $Q(x, u)$ — квадратичная форма, $\Delta(x)$ — определитель формы $Q(x, u)$; $N_x(t_1, \ldots, t_m)$ — число натуральных $n \leqslant x$, для которых $f_j(n) \leqslant A_j(x) + t_j B_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Основной результат: Пусть $f_j(p) = o(B_j(p))$ $(j = 1, \ldots, m)$ при $p \to \infty$. Тогда

$$\frac{1}{x} N_x(t_1, \ldots, t_m) = (2^m \pi^m \Delta(x))^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{t_1} \ldots \int_{-\infty}^{t_m} e^{-Q_1(x,\,u)/2}\, du_1 \ldots du_m + o(1);$$

$N_x(t_1, \ldots, t_m)/x$ при $x \to \infty$ сходится к предельной функции тогда и только тогда, когда все $R_{jk}(x)$ стремятся к некоторым пределам r_{jk}. Если определитель $|r_{jk}|_1^m$ отличен от нуля, то предельная функция является m-мерным нормальным законом со вторыми моментами r_{jk}. Аналогичный результат получен также для случая, когда аргумент функций $f_j(n)$ пробегает некоторую подпоследовательность натурального ряда.

Доказательства лишь намечены и основаны на применении метода моментов.

Примечание референта. Результаты статьи перекрываются с более общими результатами референта (РЖМат, 1957, 1116). И. П. Кубилюс

2699. Несколько замечаний об асимптотических функциях распределения. Кёйперс (Some remarks on asymptotic distribution functions. Kuipers L.), Arch. Math., 1957, 8, № 2, 104—108 (англ.)

Рассматривается вещественная последовательность $x(t)$ $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Пусть $N\{T, x < \xi\}$ — число членов последовательности $x(t)$, подчиненных условиям $|t| \leqslant T$, $x(t) < \xi$. Функция $\sigma(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$, $\sigma(\xi) \to 0$ при $\xi \to -\infty$, $\sigma(\xi) \to 1$ при $\xi \to \infty$, называется асимптотической функцией распределения (а. ф. р.) последовательности $x(t)$, если $N\{T, x < \xi\}/(2t + 1) \to \sigma(\xi)$ при $T \to \infty$. В точках разрыва $\sigma(\xi)$ полагается $\sigma(\xi) = \{\sigma(\xi + 0) + \sigma(\xi - 0)\}/2$.

Предполагая, что последовательность $x(t)$ имеет а. ф. р. $\sigma(\xi)$, удовлетворяющую некоторым весьма общим условиям, автор находит выражения через $\sigma(\xi)$ а. ф. р. следующих последовательностей: $1/x(t)$, $|x(t)|$, $((x(t)))$, $(((1/x(t))))$, где $((x))$ означает дробную часть числа x. Вычисляются также а. ф. р. последовательностей $|\sin t|$, $1/|\sin t|$. И. П. Кубилюс

2700. Математическая смесь. XXVI. К принципу «ящиков» в некотором линейном интервале. Островский (Mathematische Miszellen. XXVI. Zum Schubfächerprinzip in einem linearen Intervall. Ostrowski Alexander), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, 60, № 1, Abt. 1, 33—39 (нем.)

Если справа открытый интервал $[0, 1)$ разделим на n частей и обозначим наименьшую из них u_n, то получим, очевидно, $u_n \leqslant 1/n$. Эта оценка может быть улучшена, если отрезок делится бесконечным числом точек

$$0, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

Получим $nu_n \leqslant \omega$, где $\omega < 1$ — абсолютная константа. Доказаны теоремы, из них интересны:

1. Если натуральные числа n и N и положительные числа x, y такие, что $n < N < 2n$, $nu_n \geqslant x$, $Nu_N \geqslant y$, $y/N \leqslant x/n \leqslant 2y/N$, то $2(1 - n/N)\, y + (2 - N/n)\, x \leqslant 1$.

4. Существует бесконечная последовательность (1), для которой $\lim nu_n = 1/2$, $n \to \infty$. В. А. Голубев

2701. Об уточнении принципа разбиения линейного интервала. Островский (Eine Verschärfung des Schubfächerprinzips in einem linearen Intervall. Ostrowski Alexander), Arch. Math., 1957, 8, № 1, 1—10 (нем.)

Рассматривается последовательность отличных друг от друга чисел

$$a_1 = 0, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

из полуинтервала $< 0, 1)$. Первые n элементов из последовательности (1) разбивают интервал $< 0, 1)$ на n подинтервалов.

Минимальная длина из этих n подинтервалов обозначается через u_n и рассматривается предел $\lim nu_n$ $(n \to \infty)$. Автор в предыдущей работе (реф. 2700) показал, что $\lim nu_n \leqslant 0{,}854, \ldots$ $(n \to \infty)$.

Рассматривается вопрос о существовании точной границы, т. е. о существовании такой постоянной Ω, что для любой последовательности (1) имеет место неравенство $\lim nu_n \leqslant \Omega$ $(n \to \infty)$.

Доказано, что $1/2 \leqslant \Omega \leqslant 1/\ln 4 = 0{,}7213\ldots$, причем верхняя оценка дается в настоящей статье, а нижняя оценка, как указывает автор, следует из его предыдущей работы. А. П. Лурсманашвили

2702. Об одном вопросе диофантовых приближений линейных форм. Обрешков (Sur une question de l'approximation diophantique des formes linéaires. Obrechkoff N.), Докл. Болг. АН, 1956, 9, № 4, 1—4 (франц.; рез. русск.)

Пусть даны два вещественных числа α и β. Тогда существуют целые числа x, y и z, не равные одновременно нулю такие, что

$$|\alpha x + \beta y + z| < \frac{\theta}{N^2}\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}$$

и $|x| \leqslant N$, $|y| \leqslant N$, $|z| \leqslant N$, а θ — некоторая константа (константа Бореля). Для константы Бореля известна оценка $\theta < \sqrt{3}$ (РЖМат, 1956, 1948). В настоящей работе доказывается, что $\theta = 1$. В. Д. Подсыпанин

2703. Замечание о распределении цифр в канторовских рядах вещественных чисел. Сюс (Bemerkung uber die Verteilung der Zifern in der Cantorschen Reihe reeller Zahlen. Szüsz P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 1—2, 163—168 (нем.)

Пусть x — вещественное число с условием $0 < x < 1$. Изучаются представления чисел x канторовским рядом:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \cdots q_k},$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ — какая-нибудь последовательность натуральных чисел ($q_k \geqslant 2$) и $\varepsilon_k(x)$ принимают значения $0, 1, \ldots, q_k - 1$.

Известно, что если последовательность $q_1, q_2, \ldots$ удовлетворяет некоторым условиям, то для всех чисел x из $(0, 1)$ с точностью до множества меры нуль, в их канторовских рядах «почти все цифры» (т. е. значения $\varepsilon_k(x)$) встречается асимптотически одинаково часто.

Доказывается, что для всех цифр это утверждение неверно.

Теорема. Пусть x — любое с $0 < x < 1$, $c_1, c_2, \ldots$ — наперед заданная последовательность натуральных чисел ($c_k \geqslant 2$, $k = 1, 2, \ldots$). Тогда существует последовательность $q_1, q_2, \ldots$ такая, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x)/q_1 q_2 \cdots q_k,$$

причем

$$\begin{aligned} &0 \leqslant q_k - c_k < 16 \quad (k = 2, 3, \ldots), \\ &1 \leqslant \varepsilon_k(x) \leqslant q_k - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{1}$$

т. е., что в этом канторовском ряде совсем не встречается цифра 0.

Ставится вопрос о замене в (1) постоянной 16 на наименьшую, годную для каждого x и числовых последовательностей $c_1, c_2, \ldots$ Г. В. Емельянов

2704. Степенные ряды и алгебраические числа. Редхеффер (Power series and algebraic numbers. Redheffer R. M.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 1, 25—27 (англ.)

Доказывается, что формулируемая ниже теорема эквивалентна известной теореме Линдемана.

Теорема. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — рациональная функция с алгебраическими коэффициентами, регулярная при $z = 0$ и не являющаяся многочленом, а m — наибольшая из кратностей полюсов $f(z)$. Тогда при каждом алгебраическом значении z, за исключением самое большее m значений z, значение функции $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ трансцендентно.

А. Б. Шидловский

2705. Об иррациональности некоторых рядов. Эрдёш (On the irrationality of certain series. Erdös P.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1957, A60, № 2, 212—219; Indagationes math., 1957, 19, № 2, 212—219 (англ.)

Доказаны

Теорема 1. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1/t^{\varphi(n)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 1/t^{\sigma(n)}$ иррациональны (при целом положительном $t > 1$). Здесь $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\sigma(n)$ — сумма делителей n.

Теорема 2. Пусть $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ — бесконечная последовательность целых чисел, удовлетворяющая условию $\limsup n_k/k^l = \infty$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/t_k^n$ не может удовлетворять алгебраическому уравнению степени $s \leqslant l$ с целыми коэффициентами.

В. Д. Подсыпанин

2706. Заметка о представлениях квадратичных форм. Карлиц (A note on representations of quadratic forms. Carlitz L.), Portugaliae math., 1956, 15, № 3—4, 79—81 (англ.)

Пусть $A = A(r, s)$ означает матрицу с r строками и s столбцами, с целыми элементами; $A_s = A(s, s)$, а также I_s — квадратная матрица порядка s.

Зигель (Siegel C. L., Ann. Math. (2), 1935, 36, 527—606) нашел, что число решений уравнения $UI_5U' = B$, где U' — транспозиция U, $B = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, равно $80 \sum_{d \mid m} d$ при положительном нечетном m. Автор получает этот результат элементарным путем и обобщает его. В. А. Голубев

2707. Заметка о суммах четырех и шести квадратов. Карлиц (Note on sums of four and six squares. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 120—124 (англ.)

Пользуясь тождествами, соответствующими формулам

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)} \text{ и } \wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)},$$

выведенными без применения эллиптических функций Добби (РЖМат, 1956, 4288), автор находит известные формулы для числа представлений целых положительных чисел суммой четырех квадратов и четырех нечетных квадратов. Кроме того, автор просто выводит известную формулу $\vartheta_3^4(q) = \vartheta_0^4(q) + \vartheta_2^4(q)$, не опираясь на теорию эллиптических функций. Пользуясь этой формулой и тождествами Добби, автор получает также известные формулы для числа представлений целых положительных чисел суммой шести квадратов и шести нечетных квадратов. Попутно получаются формулы для числа представлений целых положительных чисел квадратическими формами $4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + u_1^2 + u_2^2$ и $4(x_1^2 + x_2^2) + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, где u_i — нечетные, x_i — произвольные.

Б. В. Левин

2708. Наименьшие решения однородных квадратичных уравнений. Уотсон (Least solutions of homogeneous quadratic equations. Watson G. L.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. sci., 1957, 53, № 2, 541—543 (англ.)

В статье Касселса (РЖМат, 1956, 147) рассматривается диофантово уравнение

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \leqslant j} f_{ij} x_i x_j = 0 \tag{1}$$

(f_{ij} — целые, не все равные нулю) и доказывается, что если (1) имеет нетривиальное решение, то оно также имеет решение, удовлетворяющее условию

$$0 < \max |x_j| \leqslant k_n F^{(n-1)/2}, \tag{2}$$

где $F = \max |f_{ij}|$ и k_n зависит только от n. Там же приводится пример, данный Кнезером, показывающий, что показатель $(n-1)/2$ является наименьшим возможным.

Положим $f = \xi_1^2 + \ldots + \xi_r^2 - (\xi_{r+1}^2 + \ldots + \xi_{r+s}^2)$, где $\xi_1, \ldots, \xi_{r+s}$ — действительные, линейно независимые, линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$ и $r + s \leqslant n$. В примере, данном Кнезером, $(r, s) = (n-1, 1)$ или $(1, n-1)$.

В реферируемой статье показано, что если исключить этот случай, показатель $(n-1)/2$ в (2) может быть улучшен. Именно, доказываются теоремы:

1) Если f нетривиально представляет нуль, то $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ для целых $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию

$$0 < \max |x_j| \leqslant k_n' F^{\theta}, \tag{3}$$

где $\theta = \max(2, r/2, s/2)$ и k_n' зависит только от n.

2) Пусть $h = h(f)$ — целое, удовлетворяющее условию $h \min(r, s) \leqslant \max(r, s) < (h+1)\min(r, s)$.

Тогда показатель θ в (3) не может быть заменен никаким числом, меньшим чем $h/2$.

• Наконец, найдены лучшие результаты в двух случаях: $r = 2$, $s = n - r = 2, 3$. Г. А. Ломадзе

2709. Заметка о треугольных числах. Столт (A note on triangular numbers. Stolt B.), Portugaliae math., 1956, 15, № 3—4, 87—88 (англ.)

Пусть $\Delta_k = k(k+1)/2$. Элементарно доказывается, что любое натуральное число можно представить в виде суммы не более 11 треугольных чисел вида Δ_{3n+1}. Для доказательства используется теорема Гаусса: любое натуральное число $m \equiv 3 \pmod 8$ есть сумма трех нечетных квадратов. В. А. Голубев

2710. Исследование специальных семейств унитарных матриц. Касара И. Я., Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 113—129

В работе референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, 10, 3—34) доказано, что бесконечная матрица C_ω с элементами

$$c_{ik} = [\omega(k)/\sqrt{\sigma\Omega(i)}] \sum_{d/(i,\,k)} \mu(i\,d)\,|\omega(d)|^{-2},$$

где $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} |\omega(n)|^2$, $\Omega(n) = \sum_{d/n} \mu(n/d)\,|\omega(d)|^{-2}$ — любая функция, удовлетворяющая условиям $\omega(ab) = \omega(a)\,\omega(b)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\omega(n)|^2 < \infty$, является унитарной. В рассматриваемой работе исследуются унитарные матрицы вида $C_\omega C_{\omega_1}^{-1} (C_{\omega_2} C_{\omega_3}^{-1})^{-1}$ и преобразовывается к простейшей форме их общий элемент, причем используется обобщенное тождество Эйлера. В конце работы указывается, что дальнейшее изучение рассмотренных в ней матриц должно привести к обобщению процесса ортогонализации функциональных последовательностей, данного в вышеупомянутой работе референта. Н. П. Романов

2711. О диофантовых уравнениях. Кэ Чжао (On the Diophantine equations. Ko Chao), Сычуань дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 1, 33—40 (кит.; рез. англ.)

Доказываются, что диофантово уравнение

$$x^y y^x = z^z$$

при $x > 1$, $y > 1$ и $(x, y) = 1$ не имеет других целочисленных решений, кроме следующих

$$x = 2^{n(2^{2n} - 2^n)}(2^n + 1)^{2^n},$$

$$y = 2^{n(2^{2n} - 2^n - 2)}(2^n + 1)^{2^n + 1},$$

$$z = 2^{n(2^{2n} - 2^n - 1)}(2^n + 1)^{2^n + 1}.$$

Доказывается еще две аналогичных теоремы об уравнениях

$$x^y y^z = z^x$$

и

$$x^x y^z = z^y.$$

Г. В. Емельянов

2712. Число точек на некоторых кубических поверхностях над конечным полем. Карлиц (The number of points on certain cubic surfaces over a finite field. Carlitz Leonard), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 1, 19—21 (англ.)

Даны явные формулы для числа решений уравнения $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'x + 2b'y + 2c'z = 2dxyz + e$ в конечном поле. Г. А. Ломадзе

2713. Рациональные решения диофантова уравнения $\eta^2 = \xi^3 - D$ для $|D| \leqslant 100$. Сельмер (The rational solutions of the diophantine equation $\eta^2 = \xi^3 - D$ for $|D| \leqslant 100$. Selmer Ernst S.), Math. scand., 1956, 4, № 2, 281—286 (англ.)

Работа референта (Матем. сб., 1949, 24, 391—403) заканчивается таблицей основных рациональных решений уравнения, указанного в заглавии, для всех $|D| \leqslant 89$. Однако при составлении этой таблицы референт допустил ряд ошибок. В настоящей работе автор исправляет эти ошибки и продолжает таблицу до $|D| \leqslant 100$. В. Д. Подсыпанин

2714. Проблемы Эскотта-Тарри и Пруэ-Тарри. III. Палама (I problemi di Escott-Tarry e di Prouhet-Tarry. Palamà Giuseppe), Giorn. mat. Battaglini, 1957, 85, № 1, 80—94 (итал.)

Гл. I, II см. РЖМат, 1957, 7615, 8422.

В III главе рассматриваются специальные многостепенные системы уравнений, например,

$$x_1^k + \ldots + x_p^k = y_1^k + \ldots + y_p^k \quad (k = m_1, \ldots, m_n \text{ — натуральные}) \quad x_1 \ldots x_p = y_1 \ldots y_p.$$

Теоремы даны без доказательств. Дано много примеров целочисленных решений, в частности, решений многостепенных систем уравнений в простых числах. Описан графический способ С. Гутмана. В. А. Голубев

2715. О неопределенном уравнении $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y^2 = (n+1)x_1 \ldots x_n$ и других подобных ему. Палама (Sull'equazione indeterminata $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y^2 = (n+1)x_1 \ldots x_n$ e su altre analoghe. Palamà Giuseppe), Riv. Mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 1—2, 89—123 (итал.)

Рассмотрим последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, в которой n первых членов даны, а остальные определяются по формуле $a_{m+1} = pa_m \ldots a_{m-n+2} - a_{m-n+1}$. Любые n последовательных членов этой последовательности являются решением уравнения

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + R = px_1x_2 \ldots x_n \qquad (1)$$

при любом R. Это позволяет по одному известному решению уравнения (1) получить серию новых решений.

Для уравнения, стоящего в заглавии, устанавливается, что если $(n+1)a_2 \ldots a_n$ — четное число и $(a_1, a_2, \ldots, a_n, N)$ есть решение уравнений, то решением будет также

$$\left(a_2, \ldots, a_n, \frac{1}{2}(n+1)a_2 \ldots a_n \pm N, \frac{1}{2}(n+1)a_2 \ldots a_n - a_1\right)$$

Рассматриваются многочисленные частные случаи. Для $n = 2$ в некоторых случаях уравнения (1) доказано отсутствие решений методом спуска. В. Д. Подсыпанин

2716. Обобщение теоремы Ферма. Нивен, Уорен (A generalization of Fermat's theorem. Niven Ivan, Warren Leroy J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 306—313 (англ.)

Пусть I — класс всех целых рациональных чисел, I/m — кольцо целых по модулю m (элементы I/m: $0, 1, \ldots, m-1$). В кольце R полиномов $g(x)$ с коэффициентами из I/m выделяется множество $\tilde{g}(m)$ полиномов $f(x)$ таких, что $f(a) = 0$ для всех $a \in I/m$. Множество $\tilde{g}(m)$, очевидно, идеал в R.

Целью работы является изучение структуры идеала $\tilde{g}(m)$. Если $m=p$ — простое, то $\tilde{g}(p)$ — главный идеал с образующим x^p-x. Если m — составное, то $\tilde{g}(m)$ — не главный идеал. В случае $m=p^n$ доказывается, что полиномы

$$g_s(x)=\prod_{j=0}^{sp-1}(x-j),\quad g_k(x)=p^{n-t(k)}\prod_{j=0}^{kp-1}(x-j),$$
$$k=1,2,\ldots,s-1,$$

образуют базис для идеала $\tilde{g}(p^n)$ в кольце I/p^n. Дальнейшее обобщение основано на следующем результате: Если $m=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_r^{n_r}$, тогда

$$I/m=I/p_1^{n_1}+\ldots+I/p_r^{n_r}$$

и идеал $\tilde{g}(m)$ будет:

$$\tilde{g}(m)=\tilde{g}\left(p_1^{n_1}\right)+\ldots+\tilde{g}\left(p_r^{n_r}\right).$$

П. Н. Реморов

2717. Арифметическое свойство одного замечательного определителя, связанного с проблемой Ферма. Басков Б. М., Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 61—92

Если произвести исключение z из системы уравнений:

$$x^p+y^p+z^p=0,\quad mz^2+(nx+ay)z+(nx^2+$$
$$+bxy+cy^2)=0,$$

где p — простое $\geqslant 3$, $xyz\neq 0$ и x, y, z, m, n, a, b, c — целые числа, то получается целочисленное уравнение:

$$R(x,y)=Q_0x^{2p}+Q_1x^{2p-1}y+\ldots+Q_{2p}y^{2p}=0, \quad (1)$$

в котором

$$Q_0=Q_0(m,n)=\begin{vmatrix} n&0&0&0&\ldots&0&0&-m&-n\\ n&n&0&0&\ldots&0&0&0&-m\\ m&n&n&0&\ldots&0&0&0&0\\ 0&m&n&n&\ldots&0&0&0&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ 0&0&0&0&\ldots&m&n&n&0\\ 0&0&0&0&\ldots&0&m&n&n \end{vmatrix}$$

Вопрос о разрешимости уравнения Ферма автором сводится к вопросу о разрешимости уравнения (1) в целых числах. Для этой цели рассматриваются арифметические свойства определителя $Q_0(1,\nu)=D_p(\nu)$. Основными из рассмотренных свойств $D_p(\nu)$ являются следующие: 1. При $p\geqslant 5$ и при любом целом ν определитель $D(\nu)$ является нечетным числом. 2. Если $p\geqslant 3$ и ν — любое целое, то всякий простой нечетный делитель $D_p(\nu)$ имеет вид $2pk+1$. П. Н. Реморов

2718. К арифметике многочленов. Knapowski S. (Zur Arithmetik der Polynome. Knapowski S.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 319—321 (нем.)

Целое число k назовем делителем целочисленного примитивного неприводимого многочлена $f(x)$ степени n, если существует решение сравнения $f(x)\equiv 0\pmod k$.

Для наименьшего простого делителя Q_x, не входящего в $\prod_{m=1}^{x}f(m)$, установлены следующие границы: $x<Q_x\leqslant((n-1)n+\varepsilon)x\log x$ для $x>x_0$ и $\varepsilon>0$ сколь угодно малого, зависящего от x_0. Б. В. Степанов

2719. Об обобщении на многочлены одной теоремы Сильвестра—Шура — Эрдёша. Кудзани (Sulla estensione ai polinomi di un teorema di Sylvester—Schur—Erdös. Cugiani M.), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 3—5, 261—268 (итал.)

Пусть $F(x)=a_0x^g+a_1x^{g-1}+\ldots+a_g$ — неприводимый многочлен с целыми взаимно простыми коэффициентами и $g\geqslant 1$. Пусть далее $G(x,y)=F(x-y+1)F(x-y+2)\cdots F(x)$ и P — наибольший простой делитель $G(x,y)$. Доказаны две теоремы.

Теорема А. Пусть постоянные δ и ε определены неравенствами $0<\delta<1$, $\delta<\varepsilon g$. Тогда можно найти такие x_0 и y_0, что для любой пары (x,y), удовлетворяющей неравенствам $x\geqslant x_0$; $y_0\leqslant y<x^{\delta}$, имеет место неравенство $P>(1-\varepsilon)y\log y$.

Теорема В. Пусть постоянные η и σ определены неравенствами $\eta<1$, $\sigma<(1-\eta)g/2$. Тогда можно найти такие x_0 и y_0, что для любой пары (x,y), удовлетворяющей неравенствам $x\geqslant x_0$; $y_0\leqslant y<\exp\{(\sigma\log x\log\log x)^{1/2}\}$ имеет место неравенство $P>y(\log y+\eta\log\log y)$. В. Д. Подсыпанин

2720. Некоторые большие простые числа. Ризель (Några stora primtal. Riesel Hans), Elementa, 1956, **39**, № 4, 258—260 (швед.)

Используя счетную машину BESK, автор нашел много простых чисел вида 2^eh-1 (РЖМат, 1956, 1015). В первой части настоящей работы автор продолжил исследование на простоту числа вида $N=2^eh-1$, $h\not\equiv 0\pmod 3$ для $h=5$, $e\leqslant 413$ и $h\leqslant 77$, $e\leqslant 150$. Во второй части доказана теорема, утверждающая, что существует бесконечное множество значений h таких, что при любом e все числа вида $N=2^eh-1$ будут составными. В частности такими значениями h будут числа, удовлетворяющие сравнению $h\equiv 509203\pmod{5592405}$. В. Д. Подсыпанин

2721. Циклические перестановки с секвенциями и связанные с ними задачи. Хеемерт (Cyclic permutations with sequences and related problems. Heemert A. van), J. reine und angew. Math., 1957, **198**, № 1—2, 56—72 (англ.)

Пусть $\Gamma_{n_1},\ldots,\Gamma_{n_j}$ — циклически упорядоченные системы, состоящие соответственно из $n_1,\ldots,n_j$ элементов, попарные пересечения которых пусты, G — их теоретико-множественная сумма, и πG — некоторая циклическая перестановка элементов G. Если элемент p' следует за p в Γ_{n_i} и перестановка π не меняет этого отношения, то пара p, p' образует по определению i-секвенцию в πG. Рассматривается задача об определении числа циклических перестановок элементов G с заданными числами i-секвенций ($i=1,\ldots,j$). Автор без труда выводит результаты, полученные ранее для менее общих случаев иным способом Армсеном и Рорбахом (Armsen P., Rohrbach H., Arch. Math., 1948, **1**, 106—112; Armsen P., J. reine und angew. Math., 1952, **189**, 77—99).

В. С. Равин

2722. Признаки делимости. Рансом (Divisibility tests. Ransom William R.), School Sci. and Math., 1957, **57**, № 3, 208 (англ.)

Описывается следующий известный признак делимости на 7: от данного числа без его последней цифры вычитаем удвоенную последнюю цифру и т. д. После ряда вычитаний получим однозначное или двухзначное число, делимость которого очевидна. Дано обобщение на случай нечетных простых делителей.

В. А. Голубев

2723. Множители чисел Ферма. Робинсон (Factors of Fermat numbers. Robinson Raphael M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 57, 21—22 (англ.)

Сообщаются результаты делимости чисел $F_m=2^{2^m}+1$ на числа вида $N=k2^n+1$, полученные при помощи вычислительных машин SWAC:

$$21\cdot 2^{41}+1\mid F_{39},\quad 29\cdot 2^{57}+1\mid F_{55},\quad 9\cdot 2^{67}+1\mid F_{63},$$
$$7\cdot 2^{120}+1\mid F_{117},\quad 5\cdot 2^{127}+1\mid F_{125},\quad 17\cdot 2^{147}+1\mid F_{144},$$

$1575 \cdot 2^{157}+1 \mid F_{150}$, $3 \cdot 2^{209}+1 \mid F_{207}$, $15 \cdot 2^{229}+1 \mid F_{226}$, $29 \cdot 2^{231}+1 \mid F_{228}$, $21 \cdot 2^{276}+1 \mid F_{268}$, $7 \cdot 2^{290}+1 \mid F_{284}$, $7 \cdot 2^{320}+1 \mid F_{316}$, $27 \cdot 2^{455}+1 \mid F_{452}$.

Установлена простота следующих чисел $k2^n+1$ — при $k=3$: $n=30$, 36, 41, 66, 189, 201, 209, 276, 353, 408, 438, 534.
при $k=5$: $n=25$, 39, 55, 75, 85, 127.
при $k=7$: $n=26$, 50, 52, 92, 120, 174, 180, 190, 290, 320, 590, 342, 616, 830. П. Н. Реморов

2724. О вычетах биномиальных коэффициентов. Робертс (On binomial coefficient residues. Roberts J. B.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 3, 363—370 (англ.)

Обозначим через $\theta_j(n)$ число биномиальных коэффициентов $\binom{u}{v}$, $0 \leqslant v \leqslant u < n$, которые сравнимы с j по простому модулю p при $0 \leqslant j \leqslant p-1$.

Даны системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, решения которых выражают $\theta_j(n)$. При этом доказан ряд лемм при помощи леммы Люка о биномиальных коэффициентах. Вычислены $\theta_j(n)$ во всех случаях для $p=2$ и $\theta_j(p^k)$, $k>0$ при $p=3$ или 5. Доказано также, что каждое простое число делит «большую часть» биномиальных коэффициентов, т. е. $\lim_{n\to\infty} \theta(n)/\theta_0(n)=0$, где $\theta(n)=\sum_{j=1}^{p-1}\theta_j(n)$. В. А. Голубев

2725. Доказательство формулы Диксона. Кульберг (Et bevis for Dixons formel. Kolberg Oddmund), Nord. mat. tidskr., 1957, 5, № 2, 87—90, 120 (норв.; рез. англ.)

Рассматривается оператор $D=x\frac{d}{dx}$. Применение этого оператора позволяет вывести формулу

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^3}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n!)^3}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n!)}{(n!)^3\,(2n!)^3}x^{2n},$$

из которой легко получается формула Диксона

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3=(-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

В конце работы отмечается, что этим методом могут быть получены три обобщения формулы Диксона. Одно из них найдено Фьельстедтом (РЖМат, 1955, 3278). Два других имеют вид

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{\binom{2n}{k}\binom{2n+2a}{k+a}}{\binom{2n+2b}{k+b}}=$$

$$+\frac{b!\,(n+b)!\,(n+a-b-1)!\,(2n)!\,(2n+2a)!}{(a-b-1)!\,n!\,(n+a)!\,(2n+a)!\,(2n+2b)!}$$

и

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n+2a}{k+a}\binom{2n+2b}{k+b}}=$$

$$+\frac{a!b!\,(n+a)!\,(n+b)!\,(2n)!\,(2n+a+b+1)!}{n!\,(n+a+b+1)!\,(2n+2a)!\,(2n+2b)!}$$

В. Д. Подсыпанин

2726. Замечания к магическому квадрату с тремя полями. Мёснер (Einige Bemerkungen zu dem magischen Quadrat mit 3 Feldern. Moessner Alfred), Euclides, 1957, **17**, № 191—192, 6—8 (нем.)

Приведено без вывода несколько тождественно равных сумм некоторых линейных выражений. Один элемент каждого из этих выражений является определенным числом магического квадрата, составленного из первых девяти натуральных чисел. Эти суммы обладают той особенностью, что они остаются тождественно равными при замене слагаемых их квадратами, а в некоторых случаях кубами и четвертыми степенями. Б. А. Кордемский

См. также 3036

АЛГЕБРА

Редакторы: *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2727. Элементарное введение в матричное исчисление. Георгиу (Introducere elementară în calculul matricial. Gheorghiu Gh. Th.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, A9, № 8, 401—413 (рум.)

2728. Пределы для корней детерминанта электрической цепи. Папулис (Limits on the zeros of a network determinant. Papoulis A.), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 2, 193—194 (англ.)

Свойства электрической цепи с двумя типами элементов связаны с расположением корней z_i уравнения

$$\det(a_{ik}z+b_{ik})_{i,\,k=1}^{n}=0,$$

где $a_{kk}\geqslant 0$, $b_{kk}\geqslant 0$ $(k=1,\ldots,n)$.

Устанавливается, что

$$a\leqslant|z_i|\leqslant A,\ |\arg(-z_i)|\leqslant\alpha,$$

где

$$a=\min_k\frac{b_{kk}-P_k}{a_{kk}+R_k},\quad A=\max_k\frac{b_{kk}+P_k}{a_{kk}-R_k},$$

$$\alpha=\max_k(\theta_k+\varphi_k),$$

$$R_k=\sum_{r\neq k}|a_{kr}|,\quad P_k=\sum_{r\neq k}|b_{kr}|,$$

$$\theta_k=\arcsin\frac{R_k}{a_{kk}},\quad \varphi_k=\arcsin\frac{P_k}{b_{kk}}.$$

В частности, если

$$R_k<\frac{1}{\sqrt{2}}|a_{kk}|,\ P_k<\frac{1}{\sqrt{2}}|b_{kk}|,$$

то $\theta_k < \frac{\pi}{4}$, $\varphi_k < \frac{\pi}{4}$ и $\alpha < \frac{\pi}{2}$. В этом случае все корни имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, получаются очень простые достаточные условия устойчивости. Эти условия, конечно, не являются необходимыми. Ф. Р. Гантмахер

2729. Две заметки о матрицах. Дионизиу (Two notes on matrices. Dionísio J. Joaquim), Portugaliae math., 1954, 13, № 1, 141—144 (англ.)

Пусть A, B и D — три $n \times n$-матрицы, p — целое положительное число, $D^p \neq 0$ и ранг матрицы A не превосходит дефекта матрицы D^p. Основным результатом работы является доказательство существования матрицы A_1, подобной матрице A, такой, что

1) все элементарные делители матрицы A_1B, соответствующие ненулевым характеристическим числам, будут содержаться среди элементарных делителей матрицы $A_1B + D^p$;

2) если характеристический полином матрицы A_1B равен $\lambda^{n-\rho}\varphi(\lambda)$, то характеристический полином матрицы $A_1B + D^p$ равен $\varphi(\lambda)\psi(\lambda)$, где полином $\psi(\lambda)$ имеет степень $n - \rho$;

3) при нильпотентной матрице D элементарные делители, отвечающие ненулевым характеристическим числам, у матриц A_1B и $A_1B + D^p$ одинаковы.

Ф. Р. Гантмахер

2730. О спектрах матриц. Исхак (Sur les spectres des matrices. Ishaq M.), Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 9, № 14, 1—14 (франц.)

Обзорная статья, содержащая результаты, полученные в 1-й половине XX в., по оценкам расположения в комплексной плоскости, оценкам модулей, вещественных и мнимых частей характеристических чисел $\lambda(A) = \alpha + i\beta$ квадратной матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$.

Приводятся оценка Бендиксона (Bendixson I., Acta math., 1902, 25, 359—365) и ее обобщение Гиршем (Hirsch A., Acta math., 1902, 25, 367—370) и Бромвичем (Bromwick T. J. I. A., Acta math., 1906, 30, 295—304):

$$\min \lambda \left[\frac{1}{2}(A + A^*)\right] \leqslant \alpha \leqslant \max \lambda \left[\frac{1}{2}(A + A^*)\right],$$

$$|\beta| \leqslant \max |\lambda \left[\frac{1}{2}(A - A^*)\right]|$$

Лучшая оценка $|\beta|$ была дана Пиком (Pick G., Z. angew. Math. und Mech., 1922, 2, 353—357): $|\beta| \leqslant K |\operatorname{ctg} \pi/2n|$, где $K = \max \frac{1}{2} |a_{ik} - \bar{a}_{ki}|$.

Приводятся оценки $|\lambda(A)|$, принадлежащие Броуну (Browne E. T., Bull. Amer. Math., Soc., 1928, 4, 363—366):

$$\min \lambda(AA^*) \leqslant |\lambda(A)|^2 \leqslant \max \lambda(AA^*);$$

(Bull. Amer. Math. Soc., 1930, 36, 705—710): $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}(R+T)$, Паркеру (Parker W. V., Duke Math. J., 1937, 3, 484—487): $|\lambda| \leqslant S$, Фарнеллу (Farnell A. B., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 789—794): $|\lambda| \leqslant (RT)^{1/2}$, Баранкину (Barankin E. W., Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 767—770): $|\lambda| \leqslant \max (R_i T_i)^{1/2}$, Паркеру (Duke Math. J., 1943, 10, 479—482): $|\lambda| \leqslant \min(R, T)$ и Брауэру (Brauer A., Duke Math. J., 1946, 13, 387—395): $|\lambda| \leqslant (M_r)^{1/2r}$, где

$$R_i = \sum_j |a_{ij}|, \quad T_j = \sum_i |a_{ij}|, \quad S_i = \frac{1}{2}(R_i + T_i),$$

$$R = \max R_i, \quad T = \max T_j, \quad S = \max S_i,$$

а M_r — наибольшая из сумм модулей элементов строки матрицы $A^{1/2r}$.

Далее излагается результат Гершгорина (Изв. АН СССР, 1931, 749—754), согласно которому каждое характеристическое число $\lambda(A)$ лежит в одном из кругов $|\lambda - a_{kk}| \leqslant R_k - |a_{kk}|$ $(k = 1, \ldots, n)$. В обзоре этот результат приписывается Брауэру (Brauer A., Duke Math. J., 1946, 13, 387—393). Затем в обзоре даются теорема Брауэра (Duke Math. J., 1947, 14, 21—26), в которой круги Гершгорина заменены овалами Кассини, и некоторые следствия из этой теоремы.

В конце обзора даны оценки, относящиеся к стохастическим матрицам и к матрицам Адамара, т. е. матрицам, у которых все элементы равны ± 1 и определитель равен $n^{n/2}$.

В обзоре указаны только две работы, опубликованные после 1950 г. Ф. Р. Гантмахер

2731. Заметки по теории матриц. IX. Беллман (Notes on matrix theory. IX. Bellman Richard), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 3, 189—191 (англ.)

Предыдущие части см. РЖМат, 1953, 76; 1956, 2779, 7113, 7878.

Пусть A и B — две положительно определенные матрицы n-го порядка и $C = \lambda A + (1 - \lambda) B$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Обозначим через $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$ матрицы, получающиеся из A, B, C путем отбрасывания первых $j - 1$ строк и первых $j-1$ столбцов $(j = 1, 2, \ldots, n)$. В частности, $A^{(1)} = A$, $B^{(1)} = B$, $C^{(1)} = C$. Доказывается, что при любых вещественных числах $k_1, k_2, \ldots, k_n$, для которых $\sum_1^n k_j \geqslant 0$, имеет место неравенство

$$\prod_{j=1}^n |C^{(j)}|^{k_j} \geqslant \prod_{j=1}^n |A^{(j)}|^{\lambda k_j} |B^{(j)}|^{(1-\lambda)k_j}.$$

Ф. Р. Гантмахер

2732. Теорема о функциональной независимости для квадратных матриц. Мендел, Барнетт (A functional independence theorem for square matrices. Mendel C. W., Barnett I. A.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 4, 709—720 (англ.)

Рассмотрим $n \times n$-матрицу A и ее степени $A^k = \| a_{rs}^{(k)} \|$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Обозначим через T совокупность следов матриц $A, A^2, \ldots, A^n$, рассматриваемых как функции элементов матрицы A, через S — совокупность n произвольных элементов $a_{r_1 s_1}, a_{r_2 s_2}, \ldots, a_{r_n s_n}$ матрицы A, среди которых имеется хотя бы один диагональный, и, наконец, через $\frac{\partial T}{\partial S}$ — соответствующий якобиан. Перрон дал индуктивное доказательство для неравенства

$$\frac{\partial T}{\partial S} \not\equiv 0.$$

В статье дается новое обоснование для этого неравенства, выявляющее ряд свойств матриц и использующее выражение якобиана через обобщенный определитель Вандермонда:

$$\frac{\partial T}{\partial S} = n! \det \left(a_{r_i s_i}^{(k)}\right)_{i,\,k=1}^n$$

Ф. Р. Гантмахер

2733. Теоремы Ледермана и Островского о положительных матрицах. Брауэр (The theorems of Ledermann and Ostrowski on positive matrices. Brauer Alfred), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 265—274 (англ.)

Квадратная матрица A называется положительной (соответственно неотрицательной), если все ее элементы

положительны (соответственно неотрицательны). Перрон установил, что существует характеристическое число ω положительной матрицы A, которое вещественно, положительно и превосходит модули всех других характеристических чисел. Фробениус установил дополнительно, что $\omega > a$, где a — наибольший элемент матрицы A. В случае неотрицательной матрицы $\omega \geqslant a \geqslant 0$. Пусть m — наименьший элемент положительной матрицы A, а r и R — наименьшая и наибольшая из сумм всех элементов, стоящих в одной строке. Тогда Ледерман (Ledermann W., J. London Math. Soc., 1950, 25, 265—268) в предположении $\delta = r/R < 1$ установил неравенство:

$$r + m\left(\frac{1}{\delta^2} - 1\right) < \omega < R + m\left(\delta^2 - 1\right).$$

Это неравенство было улучшено Островским (Ostrowski A., там же, 1952, 27, 253—256):

$$r + m(\sigma^{-1} - 1) \leqslant \omega \leqslant R + m(\sigma - 1),$$

$$r + m''(\sigma_1^{-1} - 1) \leqslant \omega \leqslant R + m''(\sigma_1 - 1),$$

где m' (соответственно m'') — наименьший из элементов на главной диагонали (соответственно из элементов, стоящих не на главной диагонали) и

$$\sigma = \left(\frac{r-m}{R-m}\right)^{1/2}, \quad \sigma_1 = \left(\frac{r-m'}{R-m'}\right)^{1/2}$$

В статье оценки Ледермана и Островского еще улучшаются и устанавливаются три неравенства:

1) $r + m(h-1) \leqslant \omega \leqslant R - m(1 - g^{-1})$,

где

$$h = \frac{-r + 2m + \{r^2 + 4m(R-r)\}^{1/2}}{2m},$$

$$g = \frac{R - 2m + \{R^2 - 4m(R-r)\}^{1/2}}{2(r-m)},$$

2) $r + \{r^2 + 4m_k(R-r)\}^{1/2} \leqslant 2\omega \leqslant R + \{R^2 - 4m_e(R-r)\}^{1/2}$

и

3) $r - m'_\nu + a_{\nu\nu} + \{(r - a_{\nu\nu} - m'_\nu)^2 + 4m'_\nu(R_\nu - a_{\nu\nu})\}^{1/2} \leqslant$

$$\leqslant 2\omega \leqslant R - m'_\nu + a_{\nu\nu} + \{(R - a_{\nu\nu} - m'_\nu)^2 + 4m'_\nu(R_\nu - a_{\nu\nu})\}^{1/2},$$

где R_ν — сумма элементов ν-й строки, m_ν — наименьший из всех элементов ν-й строки, m'_ν — наименьший из элементов ν-й строки, не стоящих на главной диагонали, k и l — такие индексы, что $R_k = R$ и $R_l = r$, а ν — произвольный индекс.

Неравенство 1) справедливо для произвольной положительной, а неравенства 2) и 3) — для произвольной неотрицательной матрицы.

Поскольку модуль любого характеристического числа комплексной матрицы A не превосходит наибольшего по модулю характеристического числа ω для матрицы mod A (т. е. матрицы, составленной из модулей элементов матрицы A), то неравенства 1), 2) и 3) могут быть использованы для оценки сверху модулей характеристических чисел комплексной матрицы.

Ф. Р. Гантмахер

2734 К. Неравенства для матриц Минковского — Леонтьева. В а н (Inequalities for Minkowski—Leontief matrices. W o n g Y. K. Econ. activity analysis. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1954, 201—281) (англ.)

Автор рассматривает неравенства для матриц $A = (a_{ij})$. В ч. I вводится норма, удовлетворяющая обычным аксиомам и дополнительно для матриц A, B с неотрицательными элементами неравенству

$$\| A + B \| \geqslant \max(\| A \|, \| B \|).$$

Результаты ч. I по существу известны и представляют собой краткое изложение обычных простых свойств норм в банаховых алгебрах. В ч. II рассматриваются неравенства для матриц с неотрицательными элементами, удовлетворяющих условию $\| A^q \|^{1/q} < 1$ (матриц Минковского—Леонтьева). Получены некоторые границы для определителей матриц $I - A$. Некоторые характерные результаты в этом направлении: 1) Если d_k — минор определителя $\| I - A \|$, стоящий на пересечении k первых строк и столбцов, то $d_n \leqslant d_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant d_1 = 1 - a_{11}$ и $d_k < d_{k-1}$, если $a_{kk} > 0$. Отсюда следует, что все главные миноры определителя $\| I - A \|$ положительны, если матрица $I - A$ невырождена. 2) Если $c_j = |a_j| + s_j \leqslant 1$, $s_j = \Sigma_i |a_{ij}|$, то $\Sigma |a_i| |b_{ij}| \leqslant c_j |d|$, где $B = (b_{ij})$ есть присоединенная матрица к матрице $I - A$ и $d = \det B$. Даны многочисленные другие неравенства такого же типа.

S. Karlin

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 558

ГРУППЫ

2735. Общая формула для круговых перестановок. С я В е н ь - х о у (A general formula for circular permutations. S h i a W e n - H o u), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 5, 347—348 (англ.)

Выводится формула для круговых перестановок с повторениями. Если среди n элементов — r_1, равных a_1, r_2, равных a_2, ..., r_p, равных a_p, и h, о. н. д. $r_1, r_2, \ldots, r_p$, — простое, то число всех возможных круговых перестановок

$$P = 1/n \left\{ \frac{n!}{r_1! \ldots r_p!} - \frac{(n/h)!}{(r_1/h)! \ldots (r_p/h)!} \right\} + \frac{(n/h-1)!}{(r_1/h)! \ldots (r_p/h)!}.$$

В общем случае, когда $h = h_0 h_1 \ldots h_m$, $h_0 = 1$, $h_1, \ldots, h_m$ — простые, и $H_i = h_0 h_1 \ldots h_i$

$$P = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{n/H_i} \left\{ \frac{(n/H_i)!}{(r_1/H_i)! \ldots (r_p/H_i)!} - \frac{(n/H_{i+1})!}{(r_1/H_{i+1})! \ldots (r_p/H_{i+1})!} \right\} + \frac{(n/h-1)!}{(r_1/h)! \ldots (r_p/h)!},$$

А. Г. Школьник

2736. О циклических группах. С а с (On cyclic groups. S z á s z F.), Fundam. math., 1956, **43**, № 2, 238—240 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Если каждая подгруппа H группы G порождается k-ми степенями всех элементов группы G (k зависит от H), то G будет циклической группой.

J. Łoś

2737. Об абелевых группах, в которые может быть вложен всякий их гомоморфный образ. Ф у к с, К е р т е с, С е л е (On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded. F u c h s L., K e r t é s z A., S z e l e T.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 3—4, 467—475 (англ.; рез. русск.)

Находятся все абелевы группы, обладающие тем свойством, что для всякого гомоморфного образа группы в ней найдется подгруппа, ему изоморфная (свойство Q). Такими группами оказываются:

I) периодические группы, у которых каждая примарная компонента G_p обладает прямым слагаемым вида $\sum_{\mathfrak{m}} C(p^\infty)$, где $C(p^\infty)$ — группы типа p^∞, а $\mathfrak{m}$ — финальный ранг группы G_p (РЖМат, 1956, 5113); к этому классу групп относятся, в частности, все редуцированные примарные группы с ограниченными в совокупности порядками элементов;

II) группы, у которых 1) ранг $\mathfrak{r}$ фактор-группы по периодической части бесконечен, но не больше финального ранга $\mathfrak{p}_i$ p_i-компоненты периодической части группы для любого простого числа p_i, и которые 2) обладают прямым слагаемым вида $\sum_{\mathfrak{r}} R \dotplus \dotplus \sum_i \sum_{\mathfrak{p}_i} C(p_i^\infty)$, где R — аддитивная группа всех рациональных чисел;

III) группы, у которых ранг $\mathfrak{r}$ фактор-группы по периодической части конечен, имеющие вид $G = F \dotplus \dotplus \sum_{i=1}^{\infty} T_i$, где при каждом i T_i есть p_i-группа с неограниченными в совокупности порядками элементов, обладающая свойством Q, а $F = R(\sigma_1) \dotplus \ldots \dotplus R(\sigma_\nu)$, где $R(\sigma_i)$ — группа без кручения ранга 1 типа σ_i, причем $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_\nu$. А. П. Мишина

2738. **Автоморфизмы полной линейной группы над областью главных идеалов. Ландин, Рейнер** (Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain. Landin Joseph, Reiner Irving), Ann. Math., 1957, 65, № 3, 519—526 (англ.)

Пусть $GL_n(K)$ — группа всех обратимых квадратных матриц порядка n с элементами из произвольного, вообще говоря, некоммутативного кольца главных идеалов K. В статье найдена группа автоморфизмов группы $GL_n(K)$. Строение ее аналогично строению группы автоморфизмов полной линейной группы над телом (РЖМат, 1956, 5101 К). Л. М. Глускин

2739. **О характерах по модулю. Маутнер** (On congruence characters. Mautner F. L.), Monatsh. Math., 1954, 57, № 4, 307—316 (англ.)

Пусть U_p — группа единиц p-адического замыкания ρ_p поля рациональных чисел ρ.

Тогда каждый неединичный характер $\hat{u}_p$ бикомпактной топологической группы U_p индуцирует на подгруппе $U_p \cap \rho$ собственный характер $\chi(a)$ с ведущим модулем p^n. Наоборот, каждый собственный характер группы $U_p \cap \rho$ с ведущим модулем p^n может быть однозначно продолжен до характера группы U_p.

Далее можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством неглавных характеров прямого произведения U групп U_p (по всем простым p) и множеством собственных теоретико-числовых характеров с ведущими натуральными модулями m.

Каждый элемент $u \in U$ однозначно определяется своими компонентами $u_p \in U_p$.

Простому числу q можно сопоставить элемент $u(q) \in U$, компоненты которого задаются так:

$$u(q)_p = \begin{cases} q, & \text{если } p \neq q, \\ \varepsilon_q, & \text{если } p = q, \end{cases}$$

где ε_q — произвольный, но фиксированный элемент группы U_q.

Если разложение произвольного рационального числа a ($a \neq 0$) в произведение степеней простых чисел имеет вид $a = \eta \prod_j q_j^{l_j}$ ($\eta = \pm 1$), то этому элементу соответствует элемент $u(a) = u(\eta) \prod_j u(q_j)^{l_j} \in U$ ($u(1)_p = 1$, $u(-1)_p = -1$ для всех простых p). При этом отображение $u \to u(a)$ определяет изоморфное вложение мультипликативной группы рациональных чисел ρ^* в группу U, а функция $\hat{u}(u(a))$ является характером группы ρ^*, который на всех рациональных числах a, взаимно простых с m, совпадает с характером $\chi(a)$ с ведущим модулем m, соответствующим характеру $\hat{u}$ группы U (Характер $\hat{u}(u(a))$ группы ρ^* зависит от выбора элементов $u_q \in U$).

Пусть n пробегает все натуральные числа, а q_n — все простые числа. Доказывается, что

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \hat{u}(u(n)) = 0 \text{ и } \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \hat{u}(u(q_n)) = 0 \quad (1)$$

для любого неглавного характера $\hat{u}$ группы U.

Отсюда вытекает, что последовательности $u(1), \ldots, u(n), \ldots$ и $u(q_1), \ldots, u(q_n), \ldots$ равномерно распределены в группе U (Последовательность $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ элементов бикомпактной группы G называется равномерно распределенной, если для любого замкнутого подмножества $X \subseteq G$ $\lim_{N \to \infty} \frac{|X|_N}{N} = \mu(X)$, где $\mu(X)$ — мера Хара множества X, а $|X|_N$ — число элементов q_i ($i \leqslant N$), содержащихся в X).

Указаны приложения формул (1) к теории рядов Дирихле.

В заключительном параграфе работы приведенные результаты для поля рациональных чисел обобщаются на поле K алгебраических чи ел и поле K алгебраических функций над конечным полем констант со степенью трансцендентности 1.

При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между характерами поля K по модулю целых идеалов поля и характерами фактор-группы J/K^*D, где J — мультипликативная группа идеальных элементов Шевалле, соответствующих полю K (Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, М., Изд-во ин. лит., 1947, стр. 214), D — связная компонента единицы группы J, а K^* — мультипликативная группа поля K, рассматриваемая как подгруппа «главных» идеальных элементов группы J.

С. Д. Берман

2740. **Структурный гомоморфизм структурно упорядоченной группы. Гофман** (A lattice homomorphism of a lattice ordered group. Goffman Casper). Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, №3, 547—550 (англ.)

Рассматривается структура L положительных элементов архимедовой структурно упорядоченной группы. Утверждается, что существует единственный такой структурный гомоморфизм α с нулевым ядром структуры L на структуру нитей (РЖМат, 1955, 3635) в L, что 1) $\alpha(x \cup y) = \alpha(x + y)$ для всех $x, y \in L$; 2) если $x = \sup[x_i \mid i \in I]$, то $\sup[\alpha(x_i) \mid i \in I]$ существует и $\alpha(x) = \sup[\alpha(x_i) \mid i \in I]$.

Приведенные в работе примеры показывают независимость условий 1) и 2) друг от друга и от условий, определяющих гомоморфизм как структурный. Также отмечено, что структурный гомоморфизм с нулевым ядром не определяется однозначно условиями 1) и 2) в структуре (цепи) положительных элементов неархимедовой упорядоченной группы.

Референту осталось непонятным доказательство леммы, на которой основаны результаты работы, а именно: неясно, почему $nu < y$ для каждого n.

А. А. Виноградов

2741. Остаточные свойства бесконечных разрешимых групп. Грюнберг (Residual properties of infinite soluble groups. Gruenberg K. W.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 25, 29—62 (англ.)

Группа G называется остаточно P-группой, где P — некоторое теоретико-групповое свойство, если для любого отличного от единицы элемента $g \in G$ существует гомоморфизм группы G на некоторую P-группу, ядро которого не содержит элемента g. Доказывается, что следующие группы являются остаточно конечными p-группами: 1) свободные нильпотентные группы (для любого p), 2) свободные разрешимые группы (для любого p); 3) нильпотентные произведения (в смысле О. Н. Головина) абелевых остаточно конечных p-групп; 4) группы вида $X/X_{i_1,\ldots,i_r}$ (для $p \geqslant \max(i_1, \ldots, i_{r-1})$, где X — свободная группа, а $X_{i_1,\ldots,i_r}$ — ее нормальный делитель, определенный индуктивными соотношениями: а) X_{i_1} — i_1-й член убывающего центрального ряда группы X_j; б) $X_{i_1,\ldots,i_r}$ — i_r-й член убывающего центрального ряда группы $X_{i_1} \ldots X_{i_{r-1}}$. Доказательство основывается на некоторых общих условиях, достаточных для того, чтобы регулярные произведения остаточно P-групп были остаточно P-группами. Доказывается также, что для групп с конечным числом образующих класс остаточно конечных p-групп (по разным p) совпадает с классом остаточно нильпотентных групп и приводится пример неостаточно конечной разрешимой группы с условием максимальности для нормальных делителей.

Б. И. Плоткин

2742. О свободных произведениях групп. Вагнер (On free products of groups. Wagner Daniel H.), Phys. Rev., 1957, 106, № 1, 352—378 (англ.)

Применяя идущие от Нильсена методы работы Федерера и Йонссона (Federer H. and Jónsson B., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 1—27), автор передоказывает теорему референта о подгруппах свободных произведений групп. Основным результатом работы является обобщение теоремы Грушко о гомоморфизмах свободной группы на группу, разложенную в свободное произведение — именно, автор освобождает эту теорему от предположения о конечности числа образующих. Из этого результата выводится следующая теорема Федерера и Йонссона: если G и H — свободные группы и f — гомоморфизм G на H, то $G = S * Z$, причем f отображает S изоморфно на H, а Z переводит в единицу. Приведен пример, показывающий, что в обобщенной теореме Грушко нельзя свободную группу заменить произвольной группой. Рассмотрены, наконец, некоторые алгоритмические вопросы, относящиеся к используемым в работе конструкциям.

А. Г. Курош

2743. Условия упорядочиваемости группы. Подерюгин В. Д., Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, № 2, 199—208

Пусть G — группа с областью операторов Ω. Через $\bar{\Omega}$ обозначается множество эндоморфизмов группы G, соответствующих операторам из Ω. Группа G с областью операторов Ω называется Ω-упорядоченной, если она упорядочена и образ любого положительного элемента при любом эндоморфизме из $\bar{\Omega}$ неотрицателен. Конечная система элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из группы G с областью операторов $\bar{\Omega}$ называется правильной, если ни одно из равенств $a_i\omega = 1$, $a_i\omega = a_k$, $a_i\omega = a_k^{-1}$ ($i \neq k$, $\omega \in \bar{\Omega}$) не выполняется ни при каких i, k, ω. Правильная система элементов называется независимой, если никакое произведение, составленное из элементов вида $a_i\omega$, не равно 1. В реферируемой работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если $\bar{\Omega}$ есть подгруппа группы автоморфизмов группы G, содержащая все внутренние автоморфизмы, то для того чтобы G могла быть Ω-упорядочена, необходимо и достаточно, чтобы для любой правильной системы элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ этой группы в ней нашлась хотя бы одна такая независимая система элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, что $b_i = a_i$ или $b_i = a_i^{-1}$.

Элемент g группы G с областью операторов Ω называется Ω-периодическим, если существуют такие $\omega_i \in \bar{\Omega}$, что имеет место равенство $g \cdot g\omega_1 g\omega_2 \ldots g\omega_n = 1$.

Теорема 2. Если $\bar{\Omega}$ есть абелева подгруппа группы автоморфизмов абелевой группы G и группа G не содержит Ω-периодических элементов, отличных от 1, то группа G может быть Ω-упорядочена.

Подгруппа H группы G с областью операторов Ω называется Ω-изолированной, если из равенства $g\omega_1 \ldots g\omega_{l-1} g \cdot g\omega_l \ldots g\omega_n = h$, где $g \in G$, $h \in H$, $\omega_i \in \bar{\Omega}$, $1 \leqslant l \leqslant n+1$, всегда следует $g \in H$, $g\omega_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если $\bar{\Omega}$ совпадает с группой всех внутренних автоморфизмов группы G, то Ω-изолированная подгруппа H называется строго изолированной.

Теорема 3. Для того чтобы группа G могла быть упорядочена, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала разрешимая нормальная система Σ, удовлетворяющая следующим условиям: 1) если $A \in \Sigma$, то и $g^{-1}Ag \in \Sigma$ для любого $g \in G$; 2) если $A \subset B$ — соседние подгруппы из Σ, $N(A)$ — нормализатор подгруппы A в группе G и $C(A) = [N(A), N(A)]$, то $[C(A), B] \subseteq A$; 3) все подгруппы из Σ строго изолированы.

В конце работы доказано, что абелевы группы без кручения ранга 1, и только они, допускают архимедову линейную упорядоченность, но не допускают никакой неархимедовой линейной упорядоченности.

А. А. Виноградов

2744. О просто вырожденных косых произведениях Редеи. Рюс (Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte. Rühs Fritz), J. reine und angew. Math., 1957, 198, № 1—2, 81—86 (нем.)

Косое произведение групп G и Γ (РЖМат, 1955, 3633) называется k раз вырожденным, если в нем тождественно выполняются точно k из соотношений

$$b^\alpha = b,\ \beta^\alpha = e,\ a^b = \varepsilon,\ \alpha^b = \alpha,$$

где e и ε — единицы групп G и Γ.

В статье дано подробное описание всех просто вырожденных косых произведений, аналогичное описанию дважды вырожденных произведений $G_1\Gamma$, $G_2\Gamma$, $G_3\Gamma$, $G_4\Gamma$ (РЖМат, 1955, 3633, 3634).

Л. М. Глускин

2745. О существовании инвариантных мер на некоторых типах бикомпактных полугрупп. Шварц Штефан, Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 2, 165—182 (рез. англ.)

Пусть S — бикомпактная хаусдорфова полугруппа, $\mathfrak{S}$ — σ-алгебра, порожденная всеми бикомпактными подмножествами полугруппы S (РЖМат, 1954, 3653 К). Определенная на S мера μ называется инвариантной справа, если для любого элемента $a \in S$ из E, $Ea \in \mathfrak{S}$ следует $\mu(Ea) = \mu(E)$.

Пусть μ — инвариантная справа мера полугруппы S, $C = C(\mu)$ — множество всех таких элементов $x \in S$, что $\mu(U) > 0$ для всякого открытого множества U, содержащего x. Тогда 1) C — замкнутый правый идеал полугруппы S, 2) $Ca = C$ для любого $a \in S$, 3) если $(S \setminus C)_a \in \mathfrak{S}$, то $\mu[C \cap (S \setminus C)a] = 0$.

Полугруппа S называется полугруппой типа P, если она бикомпактна и если для каждого открытого

множества $E \subseteq S$ и для любого $a \in S$ множество Ea также является открытым. Полугруппа S типа P допускает правое μ-разложение, если $S = R \cup (S \setminus R)$, где $R \neq \emptyset$ и $S \setminus R$ — правые идеалы полугруппы S, R замкнут и $Ra = R$ для любого $a \in S$. Если полугруппа типа P имеет хотя бы одну инвариантную справа и одну инвариантную слева меру, то она является группой. Если полугруппа S типа P допускает хотя бы одно правое μ-разложение, то она допускает и такое правое μ-разложение, в котором R является группой. Для того чтобы полугруппа S типа P имела инвариантную справа меру, необходимо и достаточно, чтобы она допускала хотя бы одно правое μ-разложение.

Пусть S — полугруппа типа P, N — ее ядро в смысле А. К. Сушкевича (Теория обобщенных групп, Харьков—Киев, 1937). Для того чтобы полугруппа S имела инвариантную справа меру, необходимо и достаточно, чтобы ядро N было минимальным левым идеалом полугруппы S и $N \setminus [(S \setminus N) S] \neq \emptyset$.

Пусть $S = R \cup (S \setminus R)$ — правое μ-разложение. Если правый идеал R содержит лишь конечное число идемпотентов, то для S существует инвариантная справа мера μ такая, что $C(\mu) = R$.

Рассмотрен ряд других свойств бикомпактных полугрупп, на которых определена инвариантная справа мера. Л. М. Глускин

2746. Замечание о непрерывности операции взятия обратного элемента. Эллис (A note on the continuity of the inverse. Ellis Robert), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 372—373 (англ.)

Пусть в локально бикомпактном хаусдорфовом пространстве X задано непрерывное умножение, относительно которого X является алгебраической группой. Доказывается, что при этих условиях операция перехода к обратному элементу непрерывна, т. е. X является топологической группой. А. С. Шварц

2747. Об одном комбинаторном свойстве свободных полугрупп. Шютценбергер (Sur une propriété combinatoire des demi-groupes libres. Schützenberger Marcel-Paul), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 1, 16—18 (франц.)

Пусть S — свободная полугруппа, порожденная m образующими, $|s|$ — длина слова $s \in S$. Два подмножества W, $W' \subseteq S$ называются коммутативно эквивалентными порядка n, если между словами из W и W' длины $\leqslant n$ существует такое взаимно однозначное соответствие $w_j \leftrightarrow w'_j$, что $\alpha w_j = \alpha w'_j$ для всякого гомоморфизма α полугруппы S на коммутативную полугруппу. Пусть k — натуральное число, P — свободная подполугруппа полугруппы S, причем для каждого $s \in S$ можно найти такие элементы s', $s'' \in S$, что $|s'| + |s''| \leqslant k$ и $s' s s'' \in P$. Тогда для любого натурального числа n можно построить свободную подполугруппу $P' \subset S$, коммутативно эквивалентную порядка n полугруппе P, унитарную слева (РЖМат, 1955, 4908) и чистую справа (РЖМат, 1955, 1115). Л. М. Глускин

2748. Стабильность в полугруппах. Кох, Уоллес (Stability in semigroups. Koch R. J., Wallace A. D.), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 193—195 (англ.)

Моб S (РЖМат, 1956, 1108) называется стабильным, если для любых a, $b \in S$ из $Sa \subseteq Sab$ следует $Sa = Sab$ и из $aS \subseteq baS$ следует $aS = baS$. Обобщая результат Грина (Green J. A., Ann. Math., 1951, 54, № 1, 163—172), автор доказывает, что в стабильном мобе D-классы совпадают с F-классами и каждый элемент a моба S такой, что $a \in SaS$, регулярен (F-классом полугруппы называется непустое множество ее элементов, порождающих один и тот же главный двусторонний идеал; определение D класса и регулярности см. в РЖМат, 1957, 2924). S является стабильным в каждом из следующих случаев: 1) S коммутативен, 2) S бикомпактен, 3) S является объединением групп, 4) для каждого $x \in S$ замыкание циклической подполугруппы $\{x\}$ бикомпактно и каждый F-класс содержит идемпотент. Л. М. Глускин

2749. К теории полугрупп. VI. Исэки (Contributions to the theory of semi-groups. VI. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 1, 29—30 (англ.)

Предыдущие части см. РЖМат, 1957, 164, 1182, 2925, 2926, 8465. Соответствие Галуа между идеалами полугруппы S и полугруппы ее характеров (РЖМат, 1956, 3695) установлено в случае, когда S — коммутативная периодическая полугруппа с конечным числом идемпотентов. Л. М. Глускин

2750. Упорядоченные полугруппы. Хион Я. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, № 2, 209—222

Изучаются ассоциативные упорядоченные (у.) полугруппы с нулем и с законами сокращения. Предполагается, что $0 \leqslant a$ для всякого элемента a полугруппы. Обычным способом по выпуклому двустороннему идеалу I у. полугруппы P получается у. фактор-полугруппа P/I. Аналогично соответствующим понятиям теории колец определяются понятия делителя нуля, нильпотентного элемента, нильпотентного идеала и ниль-идеала. Элемент $a \in P$ называется целым, если $a^2 \leqslant a$. Он называется единицей, если $a^2 = a$ и $a \neq 0$. У. полугруппа может иметь не более одной единицы. Если полугруппа P не содержит делителей нуля без единицы и состоит только из целых элементов, то она называется целой. У. полугруппа, не содержащая нетривиальных двусторонних идеалов, по определению является простой.

В статье показано, что изучение у. полугрупп сводится к изучению у. ниль-полугрупп, у. целых полугрупп, простых у. полугрупп и к обозрению всех у. полугрупп с данным двусторонним идеалом и данной фактор-полугруппой по этому идеалу.

Относительно простой у. полугруппы установлено, что она не содержит нетривиальных выпуклых односторонних идеалов.

В у. полугруппе определяются архимедовские классы, состоящие либо только из целых, либо только из нецелых элементов. Два целых элемента α и β ($\alpha \geqslant \beta$) отнесены к одному классу, если существует такое натуральное число n, что $\alpha^n \geqslant \beta$. Два нецелых элемента α и β ($\alpha \geqslant \beta$) отнесены к одному классу, если существует такое натуральное число n, что $\alpha \leqslant \beta^n$. Это отношение разбивает полугруппу на непересекающиеся архимедовские классы, являющиеся выпуклыми подмножествами. Совокупность этих классов упорядочивается, причем считается, что один класс больше другого, если всякий элемент первого класса больше всех элементов второго класса. Установлено, что всякое разбиение у. полугруппы на попарно не пересекающиеся выпуклые подполугруппы может быть продолжено до разбиения на архимедовские классы.

Будем говорить, что разбиение у. полугруппы на непересекающиеся классы определяет в ней отношение конгруэнтности, если множество классов упорядочено и из $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$ следует $\overline{\alpha_1 \beta} = \overline{\alpha_2 \beta}$ и $\overline{\beta \alpha_1} = \overline{\beta \alpha_2}$, а из $\bar{\alpha}_1 \geqslant \bar{\alpha}_2$ следует $\bar{\alpha}_1 \geqslant \bar{\alpha}_2$ ($\bar{\alpha}$ обозначает класс, содержащий элемент α). Если в множестве классов отношения конгруэнтности определить умножение формулой $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \overline{\alpha\beta}$, то получается новая полугруппа, называемая фактор-полугруппой у. полугруппы по данному отношению конгруэнтности. Выяснено, что разбиение

целой у. полугруппы P на архимедовские классы определяет в ней отношение конгруэнтности вместе с фактор-полугруппой по этому отношению. Для всякого упорядоченного множества с наименьшим элементом существует целая у. полугруппа, для которой данное упорядоченное множество является множеством архимедовских классов.

У. полугруппа называется архимедовской, если она не имеет делителей нуля и, кроме классов нуля и единицы, содержит не больше одного архимедовского класса, состоящего из целых элементов, и не больше одного архимедовского класса, состоящего из нецелых элементов. В реферируемой статье доказано, что для того чтобы целая у. полугруппа P была архимедовской, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала нетривиальных выпуклых простых идеалов. (Идеал I называется простым, если из $\alpha \notin I$, $\beta \notin I$ следует $\alpha\beta \notin I$.)

Элементы α и β ($\alpha \geqslant \beta$) целой архимедовской у. полугруппы называются близкими, если для любого натурального числа n выполняется соотношение $\alpha^n \geqslant \beta^n \geqslant \alpha^{n+1}$. Отношение близости двух элементов определяет разбиение целой архимедовской у. полугруппы на непересекающиеся классы близких элементов, являющимися выпуклыми подмножествами. Совокупность этих классов упорядочивается подобно упорядочению архимедовских классов. Установлено, что разбиение целой архимедовской у. полугруппы P на классы близких элементов определяет в P отношение конгруэнтности, фактор-полугруппа по которому изоморфна подполугруппе мультипликативной полугруппы неотрицательных действительных чисел. Для любого упорядоченного множества существует целая архимедовская у. полугруппа, для которой это множество является одним из классов близких элементов.

В конце работы доказано, что если в у. полугруппе P выполнено условие обрыва убывающих цепей для выпуклых левых идеалов, то любой идеал полугруппы P, содержащий только целые неединичные элементы, нильпотентен. А. А. Виноградов

2751. Группоиды с циклической группой автоморфизмов. Сад (Groupoïdes automorphes par le groupe cyclique. Sade A.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 3, 321—335 (франц.)

Пусть Q — аддитивная циклическая группа, T — ее подгруппа, и пусть на множестве Q определена бинарная однозначная операция x, причем всякое отображение $q \to q + t$ ($t \in T$) является автоморфизмом множества Q относительно операции x. Множество Q автор называет группоидом с циклической группой автоморфизмов T. В работе приведено большое число предложений о таких множествах в случае, когда Q — квазигруппа (РЖМат, 1955, 4909) относительно операции x; в большей части из них предполагается, что Q — конечная квазигруппа, и $T = Q$.

Л. М. Глускин

2752. О некоторых множествах со случайным законом композиции. Гуревич (Sur certains ensembles à loi de composition aléatoire. Gourevitch Georges), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 6, 614—617 (франц.)

Пусть E_n — множество n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Любой паре элементов $a_i, a_j \in E_n$, расположенных в данном порядке, поставлен в соответствие каждый из элементов $a_k \in E_n$ с вероятностью p_{ij}^k, причем $\sum_k p_{ij}^k = 1$. Множество E_n можно погрузить в группоид $\mathcal{E}$, т. е. в множество с однозначным бинарным действием. Рассмотрены различные условия, которые нужно наложить на вероятности p_{ij}^k, чтобы группоид $\mathcal{E}$ был ассоциативным, коммутативным, чтобы в $\mathcal{E}$ выполнялся закон сокращения, чтобы в нем существовала левая единица и т. д. Если при $n=2$ группоид $\mathcal{E}$ является полугруппой, то эта полугруппа коммутативна. Л. М. Глускин

2753 К. Введение в теорию конечных групп. Ледерман (Introducción a la teoría de los grupos finitos. Lederman Walter. Trad. del alem. Madrid, Dossat, (s. a.), XII, 184 p.), Bibliogr. hisp., 1957, 16, № 4, 97 (исп.)

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

2754. Зависимость между 2-мерной группой когомологии и дифферентой. Мория (Zusammenhang zwischen 2-Kohomologiegruppe und Differente. Moriya Mikao), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 247—249 (нем.)

Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо, k — его поле отношения, K/k — конечное сепарабельное расширение, $\mathfrak{O}$ — кольцо целых элементов поля K, $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P}$ — простые идеалы колец $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{O}$ соответственно, причем $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ — $\mathfrak{p}$-адическое пополнение кольца $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ — $\mathfrak{P}$-адическое пополнение кольца $\mathfrak{O}$. Тогда в обозначениях предыдущей работы автора (РЖМат, 1956, 2012) имеет место естественный изоморфизм $H^2(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}_\mathfrak{P}) \approx H^2(\mathfrak{O}_\mathfrak{P}, \mathfrak{o}_\mathfrak{p}; \mathfrak{O}_\mathfrak{P})$. Далее, $\mathfrak{P}$-показатель дифференты поля K/k равен длине композиционного ряда $\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$-модуля $H^2(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}_\mathfrak{P})$.

З. И. Боревич

2755. Теорема о пересечении в нётеровых кольцах. Йосида, Сакума (The intersection theorem on Noetherian rings. Yoshida Michio, Sakuma Motoyoshi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, A17, 317—320) (англ.)

Теорема о пересечении в простейшей форме утверждает, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (0)$, где $\mathfrak{a}$ — собственный идеал нётеровой области. Более сложная форма касается $\bigcap_{n=2L}^{\infty} (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^n)$, т. е. замыкания идеала $\mathfrak{b}$ в топологии, определяемой степенями идеала $\mathfrak{a}$. Эти классические результаты распространены на случай нётерова кольца $\mathfrak{o}$ без единичного элемента. Две леммы касаются поведения главных и примарных идеалов при добавлении единичного элемента к кольцу $\mathfrak{o}$. P. Samuel

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 560.

2756. Обобщение полиномиальных тождеств в кольцах. Дрейзин (A generalization of polynomial identities in rings. Drazin M. P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 352—361 (англ.)

Пусть λ_i ($i = 1, 2, \ldots, t$) — некоторое множество некоммутативных переменных и π — некоторый одночлен от переменных λ_i. Через P_π обозначается множество всех одночленов от тех же переменных, отличных от π и каждого из одночленов вида π_1, где $\pi = \pi_1\pi_2$, а через S_π — подмножество всех одночленов множества P_π, степени которых не меньше степени одночлена π.

Пусть далее R — некоторое ассоциативное кольцо и x_i ($i = 1, 2, \ldots, t$) — фиксированное множество его элементов. Замена λ_i на x_i приводит к элементу $\pi(x)$ и множествам $P_\pi(x)$, $S_\pi(x)$ элементов кольца R. Если для любого набора элементов x_i элемент $\pi(x)$ лежит в правом идеале, порожденном множеством $R_\pi(x)$ (соответственно $S_\pi(x)$), то одночлен π называется опорным (соответственно, строго опорным), а само кольцо R — кольцом с опорным (строго опорным) одночленом.

Показывается, что класс колец со строго опорными одночленами включает в себя кольца с условием ми-

нимальности для правых идеалов и кольца с полиномиальными тождествами. Показывается также, что существование для данного кольца R опорного или строго опорного одночлена влечет существование соответствующего одночлена, линейного по каждому переменному.

Указывается, что при некоторых сильных дополнительных ограничениях можно обобщить теорему Капланского о локальной конечности алгебраических алгебр с полиномиальным тождеством, однако перенести этот результат на рассматриваемые классы колец автору не удается.

Изучаются примитивные кольца с опорными многочленами и, в частности, доказывается, что каждое такое кольцо является простым кольцом с условием минимальности.

В конце работы автор рассматривает еще более общий класс колец «с множеством опорных одночленов».

При новых дополнительных ограничениях доказывается, что полупростые в смысле Джекобсона кольца этого класса изоморфны подпрямым суммам полных матричных колец (ограниченных порядков) над телами.

А. И. Ширшов

2757. **Некоторые подполя полей рациональных функций.** **Куниёси** (Certain subfields of rational function fields. Kuniyoshi Hideo), Proc. Internát. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 241—243 (англ.)

Пусть $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ — чисто трансцендентное расширение поля k характеристики p. Пусть G — конечная p-группа линейных преобразований переменных $x_1, \ldots, x_n$ (над полем k), удовлетворяющая условию: если группа G представлена треугольными матрицами n-го порядка с единицами на главной диагонали и если G_k есть группа матриц k-го порядка, составленных из первых k строчек и столбцов матриц представления, то ядро естественного гоморфизма $G_k \to G_{k-1}$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ имеет порядок $\leqslant p$. Группа G индуцирует группу автоморфизмов поля K. Доказывается, что подполе G-инвариантных элементов поля K также чисто трансцендентно над k.

З. И. Боревич

2758. **Об одном обобщении леммы Гензеля.** **Цассенхаус** (Über eine Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas. Zassenhaus Hans), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 317—325 (нем.)

Теорема 1. Если элементы e^{μ}_{ik} $(\mu = 1, \ldots, r;$ $i, k = 1, \ldots, f_{\mu})$ кольца R удовлетворяют сравнениям

$$e^{\mu}_{ik} e^{\nu}_{jm} \equiv \begin{cases} 0\,(N), & \text{если } \mu \neq \nu \text{ или } k \neq j; \\ e^{\mu}_{im}\,(N), & \text{если } \mu = \nu \text{ и } k = j. \end{cases}$$

где N — двусторонний нильпотентный идеал кольца R, то в R существуют такие элементы $E^{\mu}_{ik} \equiv e^{\mu}_{ik}\,(N)$, что

$$E^{\mu}_{ik} E^{\nu}_{jm} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \nu \text{ или } k \neq j; \\ E^{\mu}_{im}, & \text{если } \mu = \nu \text{ и } k = j. \end{cases} \qquad (1)$$

Две системы матричных единиц $\left\{E^{1,\mu}_{ik}\right\}$ и $\left\{E^{-1,\mu}_{ik}\right\}$ кольца R, соответственно удовлетворяющих уравнениям (1), называются эквивалентными, если для некоторых элементов $x_1, x_{-1} \in R$

$$x_1 E^{-1,\mu}_{ik} x_{-1} = E^{1,\mu}_{ik}; \quad x_\alpha x_{-\alpha} = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i=1}^{f} e^{\alpha,\mu}_{ii} = e^{\alpha},$$

$$e^{\alpha} x_\alpha = x_\alpha e^{\alpha} = x_\alpha.$$

Доказывается, что из эквивалентности этих систем по модулю двустороннего нильпотентного идеала N вытекает их эквивалентность в R.

Из приведенных результатов вытекает, что любые два разложения полупримарного кольца R в прямую сумму неразложимых левых идеалов операторно изоморфны и могут быть получены друг из друга под действием некоторого внутреннего автоморфизма кольца R.

Известная лемма Гензеля (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, М.—Л., Гостехиздат, 1947, ч. 1, стр. 316) также является следствием теоремы 1.

Рассмотрены приложения к теории представлений алгебр.

С. Д. Берман

2759. **К теории алгебр над полем алгебраических функций одной переменной.** **Фаддеев Д. К.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 45—51 (рез. англ.)

Пусть R — поле алгебраических функций от одной переменной над совершенным полем констант K и L/K — конечное нормальное расширение с группой Галуа G. Группа G естественным образом изоморфна группе Галуа поля $S = R(L)$ над R. В поле S через Γ обозначим группу всех дивизоров, через M — группу главных дивизоров, через Δ — группу классов дивизоров и через Δ_0 — группу классов дивизоров нулевой степени. Пусть, далее L^* и S^* — мультипликативные группы полей L и S соответственно.

В работе рассматриваются следующие естественные гомоморфизмы α и β:

$$H^2(G, L^*) \xrightarrow{\alpha} H^2(G, S^*) \xrightarrow{\beta} H^2(G, \Gamma).$$

Доказывается, что если общий наибольший делитель степеней всех дивизоров поля R равен 1, то $\operatorname{Ker}\alpha = 1$, $H^2(G, S^*)/\operatorname{Im}\alpha \approx H^2(G, M)$, $\operatorname{Ker}\beta/\operatorname{Im}\alpha \approx$ $\approx H^1(G, \Delta_0)$, $H^2(G, 1)/\operatorname{Im}\beta \approx \operatorname{Im}(H^2(G, 1) \to H^2(G, \Delta))$. В общем случае группа $\operatorname{Ker}\alpha$ изоморфна факторгруппе группы G-инвариантных классов дивизоров поля S по подгруппе классов, порожденных инвариантными дивизорами. Приводится ряд следствий.

Э. И. Боревич

2760. **Кольца, содержащие только циклические собственные подкольца.** **Сас** (Les anneaux ne contenant que des sous-anneaux propres cycliques. Szász F.), Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 1, 21—25 (франц.; рез. русск.)

Ассоциативное кольцо называется циклическим, если его аддитивная группа циклическая. Доказывается, что тогда и только тогда всякое собственное подкольцо данного кольца R является циклическим, когда либо само кольцо R циклическое, либо R — нулевое кольцо, аддитивная группа которого есть группа типа p^∞, либо R — кольцо порядка p^2, либо же R — конечное поле порядка p или p^q, где p, q — простые числа. Отсюда непосредственно выводится, что тогда и только тогда все истинные подгруппы абелевой группы являются циклическими, когда эта группа либо циклическая, либо группа типа p^∞, либо группа порядка p^2.

А. И. Мишина

2761. **Одно свойство упорядоченных колец.** **Альберт** (A property of ordered rings. Albert A. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 128—129 (англ.)

Доказана теорема о том, что кольцо отношений упорядоченного регулярного в смысле Оре кольца является упорядочиваемым. Используя эту теорему и результаты, полученные Амицуром (РЖМат, 1957, 187) и Капланским (Kaplansky, Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 575—580) о кольцах с тождественными соотношениями, автор устанавливает следующее свойство упорядоченных колец: если упорядоченное кольцо A удовлетворяет нетривиальному полиномиальному тождественному соотношению, то оно является регулярным и его кольцо отношений B также удовлетворяет тому же соотношению и имеет конечный ранг над своим центром

Отсюда, применяя свои более ранние результаты, автор получает новое доказательство теоремы Вагнера (Wagner, Math. Ann., 1937, **113**, 528—567) о коммутативности упорядоченного кольца A, удовлетворяющего нетривиальному тождественному соотношению.

А. А. Виноградов

2762. Группы и кольца, имеющие автоморфизмы без нетривиальных неподвижных элементов. Хигман (Groups and rings hating automorphisms without non-trivial fixed elements. Higman Graham), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 321—334 (англ.)

Пусть K является ассоциативным кольцом, кольцом Ли, локально нильпотентной группой или, наконец, конечной разрешимой группой. В работе доказывается, что если система K имеет автоморфизм простого порядка, не имеющий нетривиальных неподвижных точек, то она нильпотентна.

Даются также некоторые оценки классов нильпотентности через порядок p рассматриваемого автоморфизма. Доказательству основных утверждений предшествует значительный комбинаторный аппарат.

А. И. Ширшов

2763. Один класс простых подалгебр джекобсоновых алгебр и их автоморфизмы. Шэнь Гуан-юй, Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсю), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, № 1, 39—51 (кит.; рез. англ.)

Поправка. Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсю), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, **3**, № 2 (кит.)

Изучаются найденные ранее Капланским простые лиевы алгебры V_G над полем характеристики $p>0$. Размерность алгебры V_G равна np^m; $n \leqslant m$. Доказывается, что алгебра V_G изоморфна подалгебре некоторой джекобсоновой алгебры размерности mp^m и что каждый ее элемент может быть реализован в качестве дифференцирования коммутативной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A} = F(x_1, \ldots, x_m)$, $x_i^p = 1$. В общем случае алгебра V_G не обязана быть ограниченной. Любой автоморфизм S алгебры V_G ограничен и может быть продолжен до автоморфизма некоторой ограниченной алгебры R с нулевым центром, содержащей V_G.

Это дает возможность доказать, что каждый автоморфизм V_G может быть представлен в форме $d \to g^{-1}dg$, где g — автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$. Исследование алгебры R показывает, что картанова форма алгебры V_G вырождена.

Б. И. Плоткин

2764. Картановские подалгебры и разложения Леви в алгебрах Ли. Диксмье (Sous-algèbres de Cartan et décompositions de Levi dans les algèbres de Lie. Dixmier J.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1956, Sec. 3, **50**, June, 17—21 (франц.)

Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли над полем K характеристики 0, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{f}$ — полупростая подалгебра, дополнительная к $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{a}$, т. е. нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором. Доказывается, что если $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + \mathfrak{l}$, где $\mathfrak{k}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{f}$, а $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{r}$, то $\mathfrak{l}$ — картановская подалгебра централизатора подалгебры $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{r}$. Обратно, если $\mathfrak{k}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$ — картановская подалгебра централизатора $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{r}$, то $\mathfrak{k} + \mathfrak{l}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{a}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{a}$. Тогда алгебру $\mathfrak{f}$ можно выбрать так, чтобы $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r})$, где $\mathfrak{k}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{f}$, причем $\mathfrak{k}$ не зависит от выбора алгебры $\mathfrak{f}$. Если поле K алгебраически замкнуто, то алгебру $\mathfrak{f}$ можно выбрать так, чтобы все корневые подпространства алгебры $\mathfrak{a}$, отвечающие подалгебре $\mathfrak{h}$, разлагались в сумму своих пересечений с $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{r}$.

А. Л. Онищик

2765. Свободные модули над алгебрами. Гика (Module libere pe algebre. Ghika Al.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fis., 1956, 8, № 3, 509—516 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть A — алгебра над полем K. Выводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы унитарный модуль E над A был свободным, основанное на рассмотрении подпространств модуля E, рассматриваемого как векторное пространство над K. Если базис алгебры A образует в ней мультипликативную группу, а E — унитарный свободный модуль над A, то каждый подмодуль модуля E свободен и обладает дополнением.

Л. А. Скорняков

2766. Нильпотентность ниль-подколец. Дрейзин (The nilpotence of nilsubrings. Drazin M. P.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 1, 67—72 (англ.)

Пусть R — некоторое ассоциативное кольцо с условием максимальности для нильпотентных подколец. На множестве элементов кольца R определяется операция $s \times t = st + xs + y$, где $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ суть элементы подкольца, порожденного элементом t.

Подмножество кольца K называется замкнутым, если оно замкнуто относительно описанной операции. Доказывается, что всякое замкнутое подмножество A нильпотентных элементов порождает в кольце R нильпотентное подкольцо.

Этот же результат доказывается для колец Ли, причем под нильпотентным элементом понимается элемент, которому соответствует нильпотентное внутреннее дифференцирование, а операция определяется следующим образом: $s \times t = st + y$, где $y = y(s, t)$ — операторное кратное элемента t.

В конце работы рассматриваются кольца Ли с условием максимальности для идеалов и без характеристики. Для них доказывается, что нильпотентность всех элементов влечет ограниченность индексов нильпотентности. Доказывается также одно достаточное условие нильпотентности такого кольца.

А. И. Ширшов

2767. Обобщение теории идеалов в коммутативных кольцах без предположений о конечности. Аубер (A generalization of the ideal theory of commutative rings without finiteness assumptions. Aubert Karl Egil), Math. scand, 1956, **4**, № 2, 209—230 (англ.)

Рассмотрены многочисленные свойства коммутативной cl-полугруппы L (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952), одновременно являющейся булевой алгеброй (при ряде дополнительных условий), и, в частности, булевой d-алгебры, т. е. указанной выше булевой алгебры, в которой определена еще одна бинарная однозначная операция — дистрибутивная по объединениям, причем $a(b-c) \leqslant ab - ac$ для любых $a, b, c \in L$.

На булевы d-алгебры распространена теория Крулля идеалов в коммутативных кольцах. Элемент $a \in L$ называется регулярным, если он не является наименьшим. Элемент $a \in L$ называется d-идеалом, если $xa \leqslant a$ для всех $x \in L$ и $a - a \leqslant a$. Радикалом элемента $a \in L$ называется элемент $r \in L$, являющийся объединением всех таких элементов $x \in L$, что $x^n \leqslant a$. d-идеал p называется d-простым, если не существует таких d-идеалов a, b, что $a > p$, $b > p$, $ab \leqslant p$. d-идеал q называется слабо примарным, если для любых таких регулярных элементов a, b, что $ab \leqslant q$ и $a \nleqslant q$, всегда найдется регулярный элемент $b_1 \leqslant b$ такой, что $b_1^n \leqslant q$ при некотором n.

Основные результаты. Теорема 2: Радикал слабо примарного d-идеала d-прост. Теорема 3: Радикал d-идеала является пересечением всех минимальных

d-простых идеалов $\geqslant a$. Теорема 4. Каждому минимальному d-простому элементу p, содержащему d-идеал a, соответствует единственный минимальный слабо примарный d-идеал q, содержащий такой элемент a, что p является радикалом q.

Указаны приложения результатов статьи к кольцам, дистрибутивным структурам, коммутативным полугруппам. Л. М. Глускин

2768. О некоторых подмножествах конечных булевых алгебр. Дерст (On certain subsets of finite boolean algebras. Durst L. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 695—697 (англ.)

Каждый элемент булевой алгебры B_n, состоящей из 2^n элементов, может быть представлен как n-членная последовательность, состоящая из 0 и 1. Через G_n обозначим группу преобразований алгебры B_n, порожденную общими перестановками членов всех последовательностей и преобразованиями, состоящими в одновременной замене чисел, стоящих на некоторых фиксированных местах, на их противоположности (0 на 1 и 1 на 0). Два подмножества булевой алгебры B_n называются сравнимыми по модулю G_n, если одно из них получается из другого некоторым преобразованием из группы G_n. Автор доказывает формулу

$$N_n^{(3)} = \sum_{k=2}^{n} \left\{ \left[\frac{k}{3} \right] + \sum_{r=0}^{[k/3]} \left[\frac{k-3r}{2} \right] \right\},$$

где $N_n^{(s)}$ обозначает число классов подмножеств по S элементов алгебры B_n, сравнимых по модулю G_n.

J. Łoś

2769. Координатизационная теорема Нёймана для дедекиндовых структур с дополнениями. Фрайер, Гальперин (The von Neumann coordinatization theorem for complemented modular lattices. Fryer K. D., Halperin I.), Acta scient. math., 1956, **17**, № 3—4, 203—249 (англ.)

Дается новое более короткое доказательство известной теоремы Нёймана о связи между регулярными кольцами и дедекиндовыми структурами с дополнениями. Идея доказательства та же, что и у Нёймана и в прежних работах авторов (РЖМат, 1956, 1150, 7622). В отличие от прежних работ доказанная теорема охватывает случай структур длины 3 (таковы проективные плоскости), подчиненных некоторым дополнительным условиям. В случае проективных плоскостей эти условия эквивалентны теореме Дезарга.

Л. А. Скорняков

2770. Дедекиндова полнота и теорема о фиксированной точке. Волк (Dedekind completeness and a fixed-point theorem. Wolk E. S.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 3, 400—405 (англ.)

Пусть P обозначает частично упорядоченное (ч. у.) множество с наибольшим и наименьшим элементами. Подмножество $S \subset P$ называется сверху (снизу) направленным, если для каждых элементов $a \in S$, $b \in S$ существует такой элемент $c \in S$, что $a \leqslant c$, $b \leqslant c$ ($a \geqslant c$, $b \geqslant c$). Ч. у. множество называется дедекиндово полным, если каждое сверху направленное подмножество множества P имеет наименьшую верхнюю грань в P и каждое снизу направленное подмножество имеет наибольшую нижнюю грань в P. Для подмножества $A \subseteq P$ полагаем $A^* = \{x \mid x \in P$ и $x \geqslant a$ для всех $a \in A\}$, $A^+ = \{x \mid x \in P$ и $x \leqslant a$ для всех $a \in A\}$. Ч. у. множество P называется униформным, если для каждого сверху направленного подмножества A подмножество A^* является снизу направленным множеством, и двойственно для каждого снизу направленного подмножества B подмножество B^+ является сверху направленным.

В статье устанавливается связь между униформными и дедекиндово полными ч. у. множествами. Показано, что ч. у. множество P тогда и только тогда является дедекиндово полным, когда оно является униформным и каждая его вполне упорядоченная цепь имеет наименьшую верхнюю грань. Униформное ч. у. множество в том и только в том случае дедекиндово полно, когда каждый его сверху направленный замкнутый идеал является главным.

Просто показывается, что подмножество ч. у. множества P тогда и только тогда является замкнутым идеалом, когда оно является пересечением главных идеалов. Тем самым снова (РЖМат, 1957, 2120) решена проблема 24 Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952). Подобно включению Макнила ч. у. множества в полную структуру (MacNeille H., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **42**, 416—460) произведено включение униформного ч. у. множества в дедекиндово полное ч. у. множество.

Функция f отображения ч. у. множества P в себя называется изотонной, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$. Рассмотрим для изотонной функции f множество $H(f) = \{x \mid x \in P$ и $x \leqslant f(x)\}$. Изотонная функция f на ч. у. множестве P называется направленной, если $H(f)$ является сверху направленным подмножеством множества P.

В реферируемой работе обобщена теорема Тарского (РЖМат, 1957, 1210) о неподвижной точке монотонной функции отображения на структуре, а именно, доказано, что если каждое сверху направленное подмножество ч. у. множества P имеет наименьшую верхнюю грань в P, то каждая направленная функция f имеет фиксированную точку ($x = f(x)$). Также обобщен один из результатов, принадлежащий Дейвис (РЖМат, 1957, 1211). Установлено, что если каждая направленная функция на униформном ч. у. множестве P имеет фиксированную точку, то множество P является дедекиндово полным. Как следствие указанных обобщающих теорем приведена еще одна характеристика дедекиндовой полноты: униформное ч. у. множество P тогда и только тогда является дедекиндово полным, когда каждая направленная функция P имеет фиксированную точку. А. А. Виноградов

2771. Об алгебрах Суслина (S-алгебрах) и их представлении. Ригер Ладислав, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 1, 99—142 (рез. англ.)

Булева алгебра A называется алгеброй Суслина (S-алгеброй), если в ней выполнена A-операция, т. е. для каждого отображения $S = \{a_{k_1}, \ldots, k_n\}$ множества всех конечных последовательностей натуральных чисел в множество элементов алгебры A (такие отображения называются системами Суслина; $a_{k_1, \ldots, k_n}$ обозначает элемент, соответствующий последовательности $\{k_1, \ldots, k_n\}$) имеется единственный такой элемент $w = A(a_{k_1, \ldots, k_n})$ алгебры A, что: а) если для некоторой бесконечной последовательности $\{k_1, k_2, \ldots\}$ натуральных чисел и для некоторого элемента u для всех n $u \subseteq a_{k_1, \ldots, k_n}$, то $u \subseteq W$; б) если W^* удовлетворяет условию а), то $W \subseteq W^*$. S-алгебры подмножеств некоторого множества называются S-телами множеств.

Пусть $S^j = \{b^j_{k_1}, \ldots, k_n\}$ ($j = 1, 2, \ldots$) — последовательность S-систем в A; обозначим через $S = \{a_{l_1}, \ldots, l_n\}$ следующую S-систему:

$$a_k = b^1_k;$$

$$a_{k,\,l} = b^1_k \cap b^1_{k,\,l};$$

$$a_{k,\,l,\,m} = b^1_k \cap b^1_{k,\,l} \cap b^2_m;$$

$$a_{k,l,m,n} = b^1_k \cap b^1_{k,l} \cap b^2_m \cap b^1_{k,l,n};$$

$$a_{k,l,m,n,p} = b^1_k \cap b^1_{k,l} \cap b^2_m \cap b^1_{k,l,n} \cap b^2_{m,p};$$

$$a_{k,l,m,n,p,q} = b^1_k \cap b^1_{k,l} \cap b^2_m \cap b^1_{k,l,n} \cap b^2_{m,p} \cap b^3_q;$$

. . . . . .

S-алгебра называется дистрибутивной, если

$$\cup_{j=1}^{\infty} A(b^j_{k_1,\ldots,k_n}) = A(a_{l_1,\ldots,l_n}).$$

Отображение φ некоторой S-алгебры A в S-алгебру B называется S-гомоморфизмом, если $\varphi(A(a_{k_1,\ldots,k_n})) = A(\varphi(a_{k_1,\ldots,k_n}))$ для каждой S-системы $\{a_{k_1,\ldots,k_n}\}$ в алгебре A и $\varphi(a') = (\varphi(a))'$ для каждого элемента $a \in A$. S-изоморфизмы определяются обычным образом. Дистрибутивная S-алгебра A называется свободной с m образующими, если существует множество $G \subset A$ мощности m такое, что: 1) наименьшая S-подалгебра алгебры A, содержащая множество G, совпадает с алгеброй A и 2) каждое отображение множества G в любую дистрибутивную S-алгебру B может быть продолжено до S-гомоморфизма алгебры A в алгебру B.

Пусть C_m — прямое произведение m дискретных двухточечных топологических пространств с обычной тихоновской топологией.

Основные результаты статьи:

1) Для каждого кардинального числа m существует единственная (с точностью до S-изоморфизма) свободная S-алгебра с m образующими.

2) Наименьшая S-алгебра подмножеств пространства C_m, содержащая все открыто-замкнутые его подмножества, является свободной S-алгеброй с m образующими.

3) Каждая дистрибутивная S-алгебра есть гомоморфный образ некоторого S-кольца множеств.

Автор пишет, что результаты статьи были подготовлены исследованиями в новой теории квантификации логических переменных математической логики.

S. Mrówka

2772. Некоторые гомоморфизмы на цепи. Б е р (Certain homomorphisms onto chains. B a e r R. M.), Arch. Math., 1957, 8, № 2, 93—95 (англ.)

Однозначное отображение η частично упорядоченного (ч. у.) множества X в (на) ч. у. множество Y называется гомоморфизмом; если из $x \leqq y$ в X следует $\eta(x) \leqq \eta(y)$ в Y. Гомоморфизм, являющийся взаимно однозначным отображением, обратное отображение для которого также является гомоморфизмом, называется изоморфизмом. Подмножество C ч. у. множества X называется цепью в X, если каждые два элемента из C являются сравнимыми между собой. Разбиение (A, B) цепи C на два таких подмножества A и B, что $A \cap B = \varnothing$ и из $a \in A$, $b \in B$ следует $a < b$, называется сечением в C. Сечение называется пробелом, если в A нет наибольшего и в B нет наименьшего элемента. Пусть $\prec$ обозначает бинарное отношение, определенное для непустых подмножеств ч. у. множества X следующим образом: если M и N — два непустые подмножества, то $M \prec N$ означает, что если $x \in M$, $y \in N$, то или $x < y$, или x и y несравнимы, и, кроме того, существует по крайней мере одна пара a, b элементов $a \in M$, $b \in N$, для которых $a < b$. Совокупность подмножеств множества X, образующая цепь относительно $\prec$, называется слабой цепью. Если $\mathfrak{K}$ есть слабая цепь, имеющая пробел $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, и если x есть такой элемент из X, что $A \prec \{x\} \prec B$ для каждых $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, то x называется внутренней точкой пробела. Множество всех внутренних точек пробела называется содержанием пробела.

Пусть C — некоторая цепь и X — ч. у. множество с непустым подмножеством D, определяемым следующим образом. Множество D есть объединение совокупности (D_α) таких цепей в X, что каждая цепь D_α изоморфна цепи C, и таких, что существует совокупность (η_α) изоморфизмов D_α на C, обладающая тем свойством, что для каждого элемента $y \in C$ и каждой пары η_α, η_β изоморфизмов этой совокупности или $\eta_\alpha^{-1}(y)$, $\eta_\beta^{-1}(y)$ несравнимы, или $\eta_\alpha^{-1}(y) = \eta_\beta^{-1}(y)$. Вводится гомоморфизм η, отображающий D на C, определяемый как $\eta(x) = \eta_\alpha(x)$, если $x \in D_\alpha$. По определению $K_{x \in C} = [\eta_\alpha^{-1}(x)$, для всех $\alpha]$ есть подмножество множества X.

В статье доказано, что для того чтобы гомоморфизм η мог быть расширен до гомоморфизма всего множества X на цепь C, необходимо и достаточно, чтобы совокупность подмножеств $(K_{x \in C})$ являлась слабой цепью, каждый пробел которой имел бы пустое содержание.

В доказательстве встречаются опечатки.

А. А. Виноградов

2773. Групповидные мультигруппы. Д р б о г л а в (Gruppenartige Multigruppen. D r b o h l a v K a r e l), Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 2 (нем.; рез. русск.)

Пусть M — множество с бинарной многозначной операцией, содержащее правую скалярную единицу j (Алгебраический реферативный сборник, М., Изд-во ин. лит., 1948, вып. III, 22—28); $\Gamma(M)$ — группа всех таких подстановок π множества M, что $\pi(ab) = (\pi a)b$ для любых a, $b \in M$; $\Delta(M)$ — подгруппа группы $\Gamma(M)$, состоящая из всех подстановок $\pi \in \Gamma(M)$, для которых $\pi j = j$.

Т е о р е м а. Для того чтобы M было изоморфно мультигруппе всех правых смежных классов некоторой группы G по ее подгруппе M, необходимо и достаточно: 1) чтобы $\Gamma(M)$ была транзитивной и 2) чтобы $\Delta(M)$ была транзитивной группой подстановок любого множества jx, где $x \in M$. Рассмотрен ряд других свойств множества M.

Л. М. Глускин

2774. О расширении моделей (III). Расширения в классах алгебр, определяемых равенствами. С л о м и н с к и й (On the extending of models (III). Extensions in equationally definable classes of algebras. S ł o m i ń s k i J.), Fundam. math., 1956, **43**, № 1, 69—76 (англ.)

Ч. I и II см. РЖМат, 1958, 1765, 1766.

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех подобных алгебр типа $\langle A, 0_1, \ldots, 0_n \rangle$, а $\mathfrak{B}$ — класс всех подобных алгебр типа $\langle A, 0_1, \ldots, 0_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_{n+m} \rangle$, где A — непустое множество, а для каждого $j = 1, \ldots, n+m$, 0_j есть операция над A с k_j аргументами. Пусть $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ — два класса, определяемых равенствами, а $E_{\mathfrak{A}}$ и $E_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_0)$ означают соответственно множество всех $\mathfrak{A}$-уравнений и множество всех $\mathfrak{A}$-уравнений, истинных в каждой алгебре класса $\mathfrak{A}_0$.

Допустим далее, что

$$E_{\mathfrak{A}} \cap E_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}_0) = E_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_0). \qquad (1)$$

Автор рассматривает следующую проблему: при каких условиях можно расширить алгебру $A \in \mathfrak{A}$ до алгебры $B \in \mathfrak{B}_0$, т. е. когда для $A \in \mathfrak{A}_0$ существует такая алгебра $B \in \mathfrak{B}_0$, что $h(A) \subset B$ для надлежащего гомоморфизма h?

Он показывает, что конструкция Птака (Чехосл. матем. ж., 1952, 2 (77), 247—271), связанная с решением проблемы расширения подгрупп до групп, может быть обобщена на случай классов алгебр, опре-

деляемых равенствами, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Теорема Птака является следствием из результата автора, который можно сформулировать следующим образом:

Пусть A_0 — множество образующих алгебры A, и пусть **A** и **B** — соответственно $\mathfrak{A}_0$-свободная и $\mathfrak{B}_0$-свободная алгебры, каждая из которых порождается множеством A_0. Так как (1) выполнено, мы можем допустить, что $A \subset B$. Пусть $h(\mathbf{A}) = A$ — гомоморфизм такой, что $h(a) = a$ для $a \in A_0$, и пусть $\sim$ — конгруэнция в A, определенная условием:

$a \sim a'$ тогда и только тогда, когда $h(a) = h(a')$.

Очевидно, что $\sim$ является также бинарным отношением в B. Пусть $\sim^*$ — наименьшая в B конгруэнция такая, что $a \sim a'$ влечет $a \sim^* a'$ для a, $a' \in B$. Если (P) $a \sim^* a'$ влечет $a \sim a'$ для a, $a' \in A$, то говорят, что A удовлетворяет условию (P).

Теорема: Алгебра $A \in \mathfrak{A}_0$ может быть расширена до алгебры $B \in \mathfrak{B}_0$ в том и только в том случае, если A удовлетворяет условию (P).

Статья содержит также некоторые следствия из этой теоремы и применения ее к доказательству теорем о расширении дистрибутивных структур до булевых алгебр и полугрупп до колец. H. Rasiowa

2775. **Алгебраическое строение математических теорий. Хенкин** (The algebraic structure of mathematical theories. Henkin Léon), Bull. Soc. math. Belgique, 1955, 7, № 2, 131—136 (англ.)

Обзорная статья, содержащая известные результаты. Без доказательств излагается метод алгебраической интерпретации математических теорий. Указывается на полезность математической логики.

Ю. А. Шиханович

2776. **Эквациональная полнота абстрактных алгебр. Калицкий, Скотт** (Equational completeness of abstract algebras. Kalicki Jan, Scott Dana), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 5, 650—659; Indagationes math., 1955, 17, № 5, 650—659 (англ.)

Характеризуются классы абстрактных алгебр, которые нельзя нетривиально сузить наложением дополнительных тождественных соотношений. Ограничиваясь для определенности группоидами, т. е. алгебрами с одной бинарной операцией $+$, следующим образом определим по индукции понятие терма: 1) переменная есть терм, 2) если α и β — термы, то $(\alpha + \beta)$ — терм. Класс равенств (выражений вида $\alpha = \beta$, где α и β — термы) называется замкнутым, если он рефлексивен (т. е. содержит равенство $x = x$), симметричен (вместе с любым равенством $\alpha = \beta$ содержит равенство $\beta = \alpha$), транзитивен ($\alpha = \beta \in X \& \beta = \gamma \in X \to \alpha = \gamma \in X$), замкнут относительно подстановки терма вместо переменного и для любого терма δ вместе с равенством $\alpha = \beta$ содержит равенства $(\alpha + \delta) = (\beta + \delta)$ и $(\delta + \alpha) = (\delta + \beta)$. Класс равенств X называется непротиворечивым, если его замыкание $\bar{X}$ (наименьший замкнутый класс, содержащий класс X) не содержит все равенства. Класс равенств называется эквационально полным, если он непротиворечив, но всякий содержащий его класс противоречив. Алгебра называется эквационально полной, если класс всех равенств, выполняющихся в ней, эквационально полон.

Основной результат: Полугруппа (ассоциативный группоид) тогда и только тогда эквационально полна, когда она содержит более одного элемента и принадлежит одному из следующих классов: 1) классу полуструктур (операция $+$ коммутативна и идемпотентна); 2) классу левых алгебр ($x + y = x$ для любых x, y); 3) классу правых алгебр ($y + x = x$ для любых x и y); 4) классу константных алгебр ($x + y = z + w$ для любых x, y, z, w); 5) классу абелевых групп, все элементы которых имеют один и тот же порядок p. Кроме того, в работе перечисляются (без доказательств) условия (частично известные) эквациональной полноты некоторых других классов алгебр. Например, утверждается, что структура, содержащая больше одного элемента, эквационально полна тогда и только тогда, когда она дистрибутивна. Группа, содержащая больше одного элемента, эквационально полна тогда и только тогда, когда она абелева и все ее элементы имеют один и тот же простой порядок. Алгебра с одной монарной операцией, содержащая более одного элемента, эквационально полна тогда и только тогда, когда либо $x' = y'$ (для любых элементов x и y), либо $x' = x$ и т. д.

Ю. А. Шиханович

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

2777. **Состояние и задачи развития структурной теории построения автоматических и телемеханических устройств релейного действия. Гаврило М. А.**, Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, Т. 2. М., АН СССР, 1957, 256—284

Рассматривается структурная теория построения устройств релейного действия, являющихся техническими средствами преобразования и передачи дискретных воздействий в современных системах автоматики и телемеханики. Формулируется задача оптимального построения релейного устройства. Приводятся данные о развитии современной структурной теории в СССР и за рубежом. Для решения задач синтеза, анализа и равносильных преобразований схем релейных устройств структурная теория располагает алгебраическими, графо-аналитическими, геометрическими и числовыми методами. Дается краткий обзор методов синтеза релейных схем (определение реализуемости их работы, получение первоначальной структурной схемы устройства), методов равносильного преобразования релейных схем (преобразование параллельно-последовательных схем, построение мостиковых схем), методов анализа релейных схем. Освещены методы синтеза и анализа схем с различными релейными элементами. Сообщается о развитии машинных методов анализа и синтеза релейных схем в СССР и за рубежом.

Ю. Л. Томфельд

2778. **Синтез бесповторных схем. Трахтенброт Б. А.**, Докл. АН СССР, 1955, 103, № 6, 973—976

Бесповторной названа схема с независимыми контактами, где каждое реле представлено лишь одним контактом; без ограничения общности он считается замыкающим. Дается общее определение схемы как графа, где отмечены две вершины (полюсы) и каждому ребру отнесена булева переменная (контакт). Схема названа сильно связной, если через всякое ребро проходит путь, соединяющий полюсы. Далее под схемой понимается бесповторная сильно связная схема. Совокупность ребер, выходящих из одной вершины и не имеющих других общих вершин, названа обтекаемой звездой, если изъятие совокупности ребер не нарушает сильной связности схемы. Схема неразложима, если всякая ее подсхема есть либо ребро, либо вся схема. Схемы, реализующие тождественно равные булевы функции, эквивалентны. Схемы с одинаковой структурой названы изоморфными. Разложение схемы есть представление ее в виде суперпозиции нескольких «внутренних» схем в одну «внешнюю» схему. Два разложения эквивалентны, если эквивалентны соответствующие суперпонируемые схемы. Разложение с неразложимой внешней схемой и параллельное (после-

довательное) разложение на подсхемы, не допускающие дальнейшего параллельного (последовательного) разложения, названы каноническими разложениями. Формулируется 5 теорем, в том числе: а) всякая схема допускает единственное каноническое разложение; б) для того чтобы схемы $\mathfrak{R}$ и $\overline{\mathfrak{R}}$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их канонические разложения были эквивалентными; в) для того чтобы схемы $\mathfrak{R}$ и $\overline{\mathfrak{R}}$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они были изоморфными или же могли быть превращены в таковые посредством операции перевертывания подсхемы, примененной конечное число раз. Дается алгорифм для синтеза бесповторных схем, который в общих чертах описывается так: если схема, реализующая данную функцию, неразложима, то у всех вершин, кроме полюсов, имеются обтекаемые звезды; последние можно эффективно указать из вида самой функции. Для выделения ребер, примыкающих к полюсам, можно применить известные в теории релейно-контактных схем методы. Г. Н. Поваров

2779. **Графо-механические пособия для синтеза релейных схем. Свобода** (Graphical-mechanical aids for the synthesis of relay circuits. Svoboda Antonín), Nachrichtentechn, Fachber., 1956, 4, 213—217, 226 (англ.; рез. нем.)

Дается метод упрощения контактных схем, основанный на аналогии между проводимостью и совпадением отверстий в перфокартах, положенных одна на другую. М. Д. Хахин

2780. **Графо-механические пособия для синтеза релейных схем. Свобода** (Graphico-mechanical aids for the synthesis of relay circuits. Svoboda Antonin), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 43—50 (англ.)

Описывается применение «контактных косточек» и «контактных решеток» при проектировании релейно-контактных схем. С помощью этих средств изображаются проводимости контактов в зависимости от комбинаций значений переменных, определяющих состояние схемы. Контактная косточка есть полоска бумаги с обозначенной на ней переменной, определяющей состояние контакта, и номерами (или индексами) комбинаций, при которых эта переменная равна I. Составление схемных моделей из таких косточек упрощает анализ сложных схем (РЖМат, 1957, 5401). Для булевых функций, описывающих контактные схемы, предлагается матричная запись, при которой переменные разбиваются на две равные (с точностью до 1) группы. Строки матрицы отвечают комбинациям значений переменных 1-й группы, столбцы — комбинациям значений переменных 2-й группы. Для удобства комбинации 1-й группы обозначаются буквенными индексами, комбинации 2-й группы — номерами. Клетки матрицы отвечают комбинациям значений всех аргументов функции, которая задается разметкой клеток, отвечающих тем комбинациям, где она равна I. Чтобы получить при анализе схемы матрицу искомой функции, пользуются косточками, на которых вместе с переменной нанесены номера или индексы комбинаций значений переменных лишь той группы, куда входит эта переменная. Контактная же решетка есть перфокарта с обозначенной на ней переменной, изображающая матрицу с клетками, вырезанными в соответствии с теми комбинациями, где эта переменная равна I. Строки матрицы по-прежнему отвечают комбинациям значений переменных 1-й группы, столбцы — 2-й группы. Умножение переменных или последовательное соединение контактов соответствует наложению решеток друг на друга. Контактные решетки упрощают алгебраизацию функций, заданных матрично. При представлении функции в виде суммы произведений матрицу функции накрывают пачкой контактных решеток такого же размера, и если сквозь вырезы карт видны только размеченные клетки матрицы, то переменные, обозначенные на этих картах, дают одно из искомых произведений. Г. Н. Поваров

2781. **Полуавтоматическая опытная машина для анализа и синтеза релейных схем. Свобода** (Polosamočinný pokusný stroj na analysu a synthesu reléových obvodů. Svoboda František), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 23—52 (чешск.; рез. русск., англ.)

Описывается построенная в Чехословакии полуавтоматическая опытная машина для анализа и синтеза однотактных релейных схем с n входными переменными, p входами и m выходами, где $p+n+m \leqslant 12$ и $n \leqslant 6$. Машина работает с неопределенными переключательными функциями. В нее можно вложить до 384 значений 0, I или $\sim$. Переключательные функции могут быть заданы самое большее на 32 состояниях (различных подстановках n переменных). Синтезируемая схема моделируется в одном из блоков машины коммутацией выделенных для этого реле. Переключательные функции снимаются в узлах модели последовательно.

Статья содержит 7 глав. В гл. 1 описывается машинный синтез элементарной схемы; дана историческая справка о развитии теории релейно-контактных схем. В гл. 2 даны сведения о комбинаторном методе автора (РЖМат, 1956, 788, 789). Этот метод лежит в основе работы машины; в гл. 3 и 4 разбирается работа блоков машины и отдельных ее элементов. Машина состоит из следующих основных блоков: генератора заданных переключательных функций, модели схемы, дешифратора и блока сравнения функций.

В гл. 5 излагается общая схема решения задач на двух примерах, практически сделанных на машине. В гл. 6 разобраны конкретные примеры машинного синтеза простейших схем. В заключение отмечается, что использование машины ускоряет работу, связанную с синтезом схемы, приблизительно в 10 раз по сравнению с немашинным использованием метода. Помимо этого, становится возможным синтезировать схемы с большим числом переменных, входов и выходов, что при ручном синтезе было затруднительно. В. Л. Евтеев

2782. **Минимизация булевых функций. Мак-Класки** (Minimization of Boolean functions. McCluskey E. J., Jr), Bell System Techn. J., 1956, 35, № 6, 1417—1444, 1465 (англ.)

Излагается систематическая процедура для записи булевой функции в виде минимальной суммы произведений. Эта процедура является упрощением и распространением метода Куайна (Quine W. V., Amer. Math. Monthly, 1952, 59, 521—531; РЖМат, 1956, 8533). Особое внимание уделяется членам, которые можно включить в функцию лишь для удобства проектировщика. Резюме автора

2783. **Алгорифм для определения минимальных представлений логической функции. Гаррис** (An algorithm for determining minimal representations of a logic function. Harris Bernard), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 2, 103—108, 125 (англ.)

Для каждой логической функции или булева алгебраического выражения имеется соответствующая релейная схема. Однако минимизация появлений переменных в булевом выражении не обязательно приводит к наиболее экономной схеме. Поэтому общий подход к задаче требует развития способов простого и быстрого получения разнообразных почти минимальных форм. В статье описывается такой метод построения минимальных представлений логической функции, заданной

таблицей истинности или одной из своих канонических форм. Получаемые минимальные представления суть либо суммы произведений, либо произведения сумм — такие, что ни один член не содержит лишних переменных и ни один член не является лишним. Метод удобен точными обозначениями, позволяющими рассматривать большое число переменных и упрощающими процесс минимизации при выполнении его на машине.

Резюме автора

2784. **Число размеченных двухполюсных параллельно-последовательных сетей. Карлиц, Риордан** (The number of labeled two-terminal series-parallel networks. Carlitz L., Riordan J.), Duke Math. J., 1956, 23, № 3, 435—445 (англ.)

Рассматриваются параллельно-последовательные графы («сети») с двумя выделенными узлами («полюсами») и ветвями, размеченными с помощью произвольных отметок (labels). Сети считаются различными, если их нельзя привести к совпадению перестановкой ветвей (или частей сети), соединенных параллельно или последовательно. Пусть $S_{n,r}$ — число сетей с n ветвями, из которых r размечены попарно различными отметками, и пусть $S(y, z) = \sum_{r=0}^{\infty} S_{n+2,n} z^n/n!$ Доказывается, что $S'_z = (1+S)/(1-S)$. С помощью аналогичных соотношений выводится сравнение

$$S_{n+m+w,\, m+w} \equiv 2^e S_{n+m,\, m} \pmod{p^{e+1}},$$

где $m \geqslant e+1$, $w = p^{e+j}(p-1)$, $p^{j-1} \leqslant n < p^j$, $e \geqslant 0$ и p — нечетное простое число. Для чисел $S_{n,n} = S_{n,n-1} = A_n$ доказывается также, что

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} C_r^s A_p^{(r-s)p^e} A_{n+sp^e(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^{re+r_1}},$$

где $r_1 = [(r+1)/2]$ и $n \geqslant r(e+1)$. Используется метод производящих функций в форме, предложенной Пойа (Pólya G., Acta math., 1937, 68, 145—254). Библ. 9 назв.

Г. Н. Поваров

2785. **Как работает цифровое управление. Брукс** (How numerical control works. Brooks Robert W.), Automation, 1956, 3, № 2, 45—51 (англ.)

После краткого объяснения операций алгебры логики и принципов их физической реализации, сопровождаемого изложением метода логических карт (РЖМат, 1955, 3442), описывается стандартная переключательная ячейка 3С-РАС фирмы «Компьютер Контрол» (Computer Control Co., США). Ячейка позволяет реализовать все булевы функции 3 переменных, 51 358 функций 4 переменных и многие функции 5 и более переменных. Она состоит из 4 схем «И», включенных в схему «ИЛИ»; из них 2 схемы «И» имеют по 4 входа, а две — по 3. Из схемы «ИЛИ» сигнал поступает в усилитель-инвертор, с которого снимается реализуемая функция и ее отрицание. Значение 1 изображается положительным импульсом, значение 0 — отрицательным, частота следования входных импульсов равна 1 *мгц*. Ячейка задерживает импульсы на один период (1 *мксек*). Рассмотрены применения ячейки для выполнения двоичных арифметических операций и преобразования кодов. Библ. 4 назв.

В. П. Разроев

2786. **Достижения и тенденции в США в области коммутации и логической организации автоматических вычислительных машин. Эрколи** (Progressi e tendenze statunitensi nel campo della commutazione e dell'organizzazione logica delle calcolatrici automatiche. Ercoli Paolo), Ricerca scient., 1957, 27, № 7, 2075-2089 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Суммарный обзор состояния разработки новых переключательных и запоминающих элементов (в том числе микроволновых и микроминиатюрных), логической организации вычислительных машин и теории релейных (переключательных) схем на основе материалов симпозиума по теории релейных схем, происходившего в США в апреле 1957 г. Рассматриваются преимущественно американские работы. Отмечается передовое положение советской науки в области алгебры логических схем.

Г. Н. Поваров

2787. **Трехзначная логика в автоматике схем. Бадильо** (Lógica trivalente en la automatización de los circuitos. Badillo M. C.), Rev. cálculo automat. y cibernét., 1957, 6, № 16, 1—7 (исп.; рез. англ.)

Краткий очерк трехзначной логики. Для выражения функций в трехзначной логике обобщаются «наглядные знаки» Туше (РЖМат, 1955, 2429; 1957, 1095К). Указывается на применимость многозначной логики для исследования многопозиционных релейных схем, например схем с переходными режимами, и, в частности, на применимость трехзначной логики для исследования схем с поляризованными реле.

Развитие многозначной логики в таком направлении автор называет «тенденцией к непрерывности», поскольку в пределе получаются законы, относящиеся к схемам непрерывного действия. Такой подход автор считает полезным при проектировании аналоговых вычислительных устройств. «Теория альтернативы» Туше рассматривается как частный случай «тенденции к непрерывности». См. также РЖМат, 1955, 4016; 1956, 794.

Г. Н. Поваров

2788. **Алгебраическая логика и автоматизмы. Казал** (Lógica algébrica e automatismos. Casal P.), Rev. politén., 1956, № 172, 47—49 (порт.)

Краткое изложение основных сведений по алгебре логики и ее применении к релейно-контактным схемам.

2789. **Булева алгебра и электрические схемы. Сачердоте** (L'algebra di Boole e i circuiti elettrici. Sacerdote Gino), Illustr. scient., 1956, 8, № 79, 20—23 (итал.)

Популярный очерк булевой алгебры со ссылкой на релейные схемы.

Г. К. Москатов

2790. **Релейная диаграмма — изобразительное средство инженера-схемщика. Оден** (Das Relaisdiagramm, ein Ausdrucksmittel des Schaltungsingenieurs. Oden H.), Fernmeldetechn. Z., 1953, 6, № 7, 325—327 (нем.; рез. англ., франц.)

Перечисляются преимущества изображения работы релейной схемы с помощью диаграммы включений реле, и предлагается особо наглядная практическая форма такой диаграммы для нейтральных, поляризованных и других реле. В качестве примера приведена диаграмма включений телефонной схемы.

Г. Н. Поваров

См. также: 2683 К, 2695, 2802, 2852, 2927, 3080, 3213, 3215, 3260, 3297—3302, 3316К

ТОПОЛОГИЯ

Редакторы *П. С. Александров, А. С. Шварц*

791. **Замечания к теореме Листинга о разложении графа на открытые ветви. Коциг** (Poznámky k Listingovej vete o rozklade grafu na otvorené ťahy. Kotzig Anton), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 4, 396—404 (словацк.; рез. русск., нем.)

Для случая правильного графа автор доказывает следующее усиление теоремы Листинга о разложении конечного связного графа на открытые ветви (например, König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936, 22).

Если G — конечный правильный граф $(2m+1)$-й степени $(m>0)$ с $2n$ вершинами, имеющий по крайней мере один линейный фактор L, то существует такая система n открытых ветвей, что а) каждое ребро графа G является ребром в точности одной ветви, б) каждая ветвь содержит $2m+1$ ребро, в) каждая ветвь содержит одно и только одно ребро из L.

При $m=1$ справедливо и обратное утверждение: из существования системы открытых ветвей, обладающих свойствами а) и б), следует существование линейного фактора. При $m>1$ аналогичное утверждение несправедливо. Для того чтобы в конечном правильном графе $(2m+1)$-й степени $(m>0)$ существовала система открытых ветвей, обладающая свойствами а) и б), необходимо, чтобы ни одна из вершин не была инцидентной более чем с m мостами. M. Fiedler

2792. О существовании незаузленных полигонов на двумерном многообразии в E^3. Хомма (On the existence of unknotted polygons on 2-manifolds in E^3. Homma Tatsuo), Osaka Math. J., 1954, 6, № 1, 129—134 (англ.)

Пусть M — замкнутое полиэдральное двумерное многообразие рода $p\neq 0$, лежащее в трехмерном евклидовом пространстве E^3. Доказывается, что 1) на многообразии M существует p взаимно не пересекающихся незаузленных полигонов, определяющих линейно независимые классы гомологии многообразия M; 2) на многообразии M можно найти негомотопный нулю полигон, не заузленный в $E^3\setminus M$ (т. е. являющийся границей полиэдрального диска, внутренность которого лежит в $E^3\setminus M$). Под полигоном в работе понимается простой замкнутый полигон. А. С. Шварц

2793. О распространении непрерывных отображений в открытые. Таймanов А. Д., Тр. Всес. матем. съезда, **2**, М., АН СССР, 1956, 135—136

Часть сформулированных результатов подробно изложена в ранее опубликованной работе автора (РЖМат, 1956, 3726).

Из впервые опубликованных результатов особенно интересен следующий: Непрерывное отображение нигде не плотного в кубе I^n компакта X на компакт $Y\subset I^m$ может быть продолжено в открытое отображение некоторого множества E типа F_σ в компакт Y.

Б. С. Содномов

2794. Заметка о лебеговом свойстве в равномерных пространствах. И. Касахара (Note on the Lebesgue property in uniform spaces. II. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 4, 248—253 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1957, 233.

Автор говорит, что равномерное пространство обладает счетным лебеговым свойством, если каждое его счетное открытое покрытие обладает лебеговым свойством (РЖМат, 1956, 5146). Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство обладало счетным лебеговым свойством; изучается связь между выполнением счетного лебегова свойства в равномерном пространстве и его пополнении. В качестве примера доказываемых в заметке теорем приведем следующее утверждение. В топологическом пространстве E можно ввести равномерную структуру, обладающую лебеговым свойством, в том и только том случае, когда E нормально и во всякое счетное открытое покрытие пространства E можно вписать локально конечное открытое покрытие (т. е. E счетно паракомпактно).

А. С. Шварц

2795 Нормальность произведения двух упорядоченных пространств. Болл (The normality of the product of two ordered spaces. Ball B. J.), Duke Math. J., 1957, 24, № 1, 15—18 (англ.)

Упорядоченным пространством называется упорядоченное множество с его естественной топологией. Внутренним пробелом упорядоченного пространства X называется его дедекиндово сечение, в котором правый класс не имеет первого, а левый — последнего элемента. Если X не имеет первого (последнего) элемента, то вводится левый (правый) концевой пробел. Упорядоченное пространство всех элементов пространства X и всех его пробелов (с их естественным порядком) обозначается через X^+.

Доказана теорема: если X — непаракомпактное упорядоченное пространство, то пространство $X\times X^+$ ненормально. Отсюда выводится следствие: упорядоченное пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда для любого бикомпактного пространства Y произведение $X\times Y$ нормально. Ставится вопрос, верно ли это утверждение без предположения, что X упорядочено.

Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение локально бикомпактного упорядоченного пространства на бикомпактное упорядоченное пространство было нормальным.

Дан пример, опровергающий высказанное Харелломутверждение, что топологическое произведение связного упорядоченного пространства на самого себя нормально (Harrell E. G., Ann. Math., 1937, 38, 204—211).

И. В. Проскуряков

2796. Заметка о произведении топологического пространства на себя. Фудзивара (Une note sur l'espace produit d'un espace topologique par lui-même. Fujiwara Kaichirô), Math. J. Okayama Univ., 1956, 5, № 2, 121—125 (франц.)

Рассматриваются следующие свойства топологического пространства E: I) для любых двух замкнутых множеств A и B пространства E и для любой окрестности W произведения $A\times B$ в пространстве $E\times E$ существуют такие окрестности U и V множеств A и B, что $U\times V\subseteq W$; II) для любой точки a пространства E и для любой окрестности W множества $a\times E$ в $E\times E$ существует такая окрестность O точки a, что $O\times E\subseteq W$.

Теорема 1. Для того чтобы хаусдорфово пространство обладало свойством I), необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным и обладало свойством II).

Пусть $\omega=\{V\}$ — база пространства E в точке a. Поставив в соответствие каждому элементу V базы ω открытое множество G_V так, что при $V\subset U$ непременно $G_U\subset G_V$ и что $\bigcup_\omega G_V=E$, получим покрытие $\{G_V\}$ пространства E относительно базы ω. Пространство E имеет компактный характер, если для всякой своей точки a и для каждой базы ω в точке a из любого покрытия относительно базы ω можно выбрать конечное подпокрытие (РЖМат, 1954, 5484).

Теорема 2. Всякое пространство компактного характера обладает свойством II); если топологическое пространство в любой точке имеет вполне упорядоченную (по включению) базу и обладает свойством II), то оно имеет компактный характер.

В частности, для того чтобы пространство с первой аксиомой счетности обладало свойством II), необходимо и достаточно, чтобы оно или состояло из изолированных точек, или же было компактным.

Теорема 3. Если каждое бинарное открытое покрытие произведения $E\times E$ равномерного пространства E на себя обладает свойством Лебега (РЖМат,

1956, 3720), то пространство E обладает свойством I). Ю. М. Смирнов

2797. Заметка о естественно упорядоченных множествах в полуметрических пространствах. Мак-Оли (A note on naturally ordered sets in semimetric spaces. McAuley Louis F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 384—386 (англ.)

Вводится следующее понятие: топологическое T_1-пространство S называется полуметрическим (semimetric), если для любых его точек x, y определено неотрицательное вещественное число $d(x, y)$, удовлетворяющее условиям: 1) $d(x, y) = d(y, x)$; 2) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; 3) точка p тогда и только тогда является предельной точкой множества M (в смысле топологии пространства S), когда «расстояние» от p до M (в смысле функции $d(x, y)$) равно нулю. В работе некоторые вспомогательные теоремы Уайборна (Whyburn G. T., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 1942, 28, стр. 44, теорема 2.1; стр. 45, теорема 2.2) и других авторов обобщаются с сепарабельных метрических пространств на наследственно сепарабельные полуметрические пространства. При этом под наследственно сепарабельным пространством понимается топологическое пространство, всякое подмножество которого содержит счетное всюду плотное подмножество. И. В. Проскуряков

2798. Расширение метрики. Голдман (Metric extension. Goldmann Alan J.), Pi Mu Epsilon J., 1954, 1, № 10, 400—406 (англ.)

Пусть множество S содержит множество K и задана действительная функция $G(x, y)$, определенная, если по крайней мере одна из точек $x \in S$, $y \in S$ содержится в K. Предположим, что функция G определяет псевдометрику на K (т. е. удовлетворяет на K условиям $G(x, y) \geqslant 0$, $G(x, x) = 0$, $G(x, y) = G(y, x)$, $G(x, z) \leqslant G(x, y) + G(y, z)$) и что для каждой точки $p \in S$ существует последовательность $p_n \in K$, для которой $G(p, p_n) \to 0$. Тогда функцию $G(x, y)$ можно единственным образом продолжить в псевдометрику на S (с помощью формулы $G(p, q) = \lim G(p_n, q_n)$, где $G(p, p_n) \to 0$, $G(q, q_n) \to 0$). Приводится пример, показывающий, что в случае, когда функция G на множестве K является метрикой, ее продолжение на S не обязательно является метрикой. И. В. Проскуряков

2799. Множество расстояний. Фрода (Mulţimi de distanţe. Froda Alexandru), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti Ser. ştiinţ. natur., 1953, № 3, 21—22 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть E^n — n-мерное евклидово пространство. Положив $E^1 \subset E^2 \subset E^3 \subset \ldots$, определяем евклидово пространство размерности $\aleph_0$: $E = E^1 \cup E^2 \cup E^3 \cup \ldots$ Размерностью (рангом) произвольного множества $A \subset E$ назовем наименьшую размерность r евклидова пространства, содержащего A ($r \leqslant \aleph_0$). Множество A называется минимальным, если оно содержит наименьшее число точек, совместимое с его размерностью. A называется множеством с неравными расстояниями, если расстояния между его точками попарно различны. Множество всех расстояний между различными точками из A обозначается через $D(A)$. Множеством включения для расстояний называется произвольное подмножество интервала $(0, +\infty)$, плотное в этом интервале. Полученный автором результат состоит в том, что существуют такие множества включения L, что всякое множество $A \subset E$ с неравными расстояниями, для которого $D(A) \subset L$, будет минимальным. Доказательство этого утверждения не приводится. В качестве трудной проблемы ставится вопрос о существовании или несуществовании множества A, плотного в E^n ($n \geqslant 2$), для которого $D(A)$ содержится в множестве положительных рациональных чисел. М. Ф. Бокштейн

2800. Локальные свойства топологических пространств. Нагами (Local properties of topological spaces. Nagami Keiô), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 5, 320—322 (англ.)

Пусть R — топологическое пространство. Множество $G \subset R$ называется элементарно открытым, если существует такая непрерывная функция $f(x)$, что $f(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in G$. Множество называется элементарно замкнутым, если его дополнение элементарно открыто. Семейство $\{S_\alpha\}$ подмножеств пространства R называется дискретным, если множества $\bar{S}_\alpha$ не пересекаются и семейство $\{\bar{S}_\alpha\}$ локально конечно.

Пусть P — свойство топологических пространств. Автор говорит, что это свойство является CG-наследственным в топологическом пространстве R, если выполнены условия: 1) если множество $S \subset R$ обладает свойством P, то каждое элементарно открытое подмножество множества S обладает этим свойством; 2) если каждое множество дискретного семейства подмножеств R обладает свойством P, то и объединение всех множеств этого семейства обладает свойством P; 3) объединение счетного локально конечного семейства элементарно открытых множеств пространства R, обладающих свойством P, также обладает этим свойством.

Определение CF-наследственного свойства получается, если в условиях 1) и 3) элементарно открытые множества заменить элементарно замкнутыми, а в условии 2) говорить о дискретных семействах замкнутых множеств.

Без доказательства приводятся следующие теоремы: 1) Если CG-наследственное или CF-наследственное свойство выполняется в пространстве R равномерно локально (РЖМат, 1955, 4926), то им обладает пространство R в целом. 2) Если CG-наследственное или CF-наследственное свойство выполняется во вполне нормальном пространстве R локально (РЖМат, 1955, 4926), то им обладает пространство R в целом. В качестве приложения приведены следующие утверждения. Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие какой-либо равномерной структуры пространства R и $S \subset R$. Если каждое пересечение $S \cap U_\alpha$ является борелевским множеством некоторого аддитивного или мультипликативного класса $\leqslant \beta$ ($\beta > 0$), то и S будет борелевским множеством соответственно аддитивного или мультипликативного класса $\leqslant \beta$. Если топологическое пространство R равномерно локально обладает одним из следующих свойств: полная регулярность, нормальность, полная нормальность, совершенная нормальность, паракомпактность, метризуемость и др., то оно само обладает соответствующим свойством. И. В. Проскуряков

2801. Две новые топологические структуры для множества локальных функций. Калаби (Due nuove strutture topologiche per insiemi di funzioni locali. Calabi Lorenzo), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 4, 581—593 (итал.)

Рассматривается семейство $\mathscr{E}$ локальных комплексных функций, т. е. множество пар (u, M), где M — открытое множество комплексной сферы, а u — непрерывная функция, определенная на этом множестве и принимающая свои значения на комплексной плоскости. Для подсемейства семейства $\mathscr{E}$, состоящего из аналитических локальных функций, Фантаппье (Fantappié) предложил топологию, в которой фундаментальной системой окрестностей локальной функции (u, M) служит система следующим образом определенных множеств $(A, \sigma)_{(u, M)}$ — для каждого компактного множества $A \subset M$ и каждого

положительного числа σ это есть множество локальных функций (v, N), для которых $N \supset A$ и $|v(x) - u(x)| < \sigma$ при $x \in A$. Эта топология годится, очевидно, и для всего семейства $\mathscr{E}$. Она будет T_0-, но не T_1-топологией, и обладает строгим локальным порядком, т. е. пересечение всех окрестностей какой-либо локальной функции совпадает с множеством всех ее продолжений. Эту топологию назовем F-топологией или топологией равномерной сходимости на компактных множествах, а снабженное этой топологией семейство $\mathscr{E}$ обозначим $\mathscr{E}_F$. Автор предлагает для семейства $\mathscr{E}$ и его подсемейств две новые топологии — топологию отклонения, или s-топологию, и топологию отклонения дополнений, или sc-топологию, уже не обладающих локальным порядком и определенных так. Пусть $(u, M) \in \mathscr{E}$. Через $\{A, \sigma, \tau\}_{(u, M)}$, соответственно $(A, \sigma, \tau)_{(u, M)}$, где A — компактное подмножество M, а σ и τ — два положительных числа, обозначим множество таких локальных функций (v, N), для которых: 1) $N \supset A$, 2) $|v(x) - u(x)| < \sigma$ при $x \in A$, 3) $s(M, N) < \tau$, соответственно $s(CM, CN) < \tau$, где s обозначает отклонение двух множеств в смысле Хаусдорфа, а CM и CN — дополнения множеств M и N. Системы таких множеств и принимаются за фундаментальные системы окрестностей локальной функции (u, M) в s- и sc-топологиях соответственно. Снабженное этими топологиями семейство $\mathscr{E}$ будет обозначаться соответственно $\mathscr{E}_s$ и $\mathscr{E}_{sc}$, s-топология оказывается сильнее F-топологии, а sc-топология сильнее s-топологии, т. е. открытое множество из $\mathscr{E}_s$ — открытым в $\mathscr{E}_{sc}$. Пространство $\mathscr{E}_s$, как и $\mathscr{E}_F$, не будет T_1-пространством — замыканием точки (u, M) этого пространства служит множество всех укорочений (v, N) этой локальной функции, таких, что $N \subset M \subset \overline{N}$. Зато пространство $\mathscr{E}_{sc}$ будет метризуемым хаусдорфовым пространством со счетной базой. Автор доказывает еще некоторые свойства описанных трех топологий. Однако теорема 1 (стр. 586) в формулировке автора является ошибочной (она верна в более слабой формулировке), как показывает им же приведенный пример 3 на стр. 587. Ошибка в доказательстве (5-я строка на стр. 587) состоит в том, что в действительности $\bigcap \overline{N} \neq \bigcap N$.

М. Ф. Бокштейн

2802. Кольца непрерывных функций, в которых каждый идеал с конечным базисом является главным. Гилман, Хенриксен (Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal. Gillman Leonard, Henriksen Melvin), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 366—391 (англ.)

Абстрактное кольцо, в котором каждый идеал, порожденный конечным числом элементов, является главным, называется **F**-кольцом. Вполне регулярное топологическое пространство X называется **F**-пространством, если кольцо $C(X)$ непрерывных функций на нем является **F**-кольцом.

Приводится ряд критериев для того, чтобы топологическое пространство X было **F**-пространством. Наиболее простой из них имеет следующий вид: пространство X является **F**-пространством в том и только в том случае, когда для любой функции $f \in C(X)$ найдется функция $k \in C(X)$, удовлетворяющая условию $f = k \cdot |f|$. Показывается, что в определении **F**-пространства кольцо $C(X)$ можно заменить на кольцо $C^*(X)$ ограниченных непрерывных функций.

Метрическое пространство является **F**-пространством тогда и только тогда, когда оно дискретно. Если X — локально бикомпактное пространство, являющееся объединением счетного числа бикомпактов, то пространство $\beta X \setminus X$ является **F**-пространством (βX — максимальное бикомпактное расширение X).

Изучаются связи других алгебраических свойств кольца $C(X)$ и топологических свойств пространства X. В работе рассмотрено много примеров.

Е. А. Горин, Б. С. Митягин

2803. Множества, не гомеоморфные по m-разложению. Гинсберг (Sets which are not homeomorphic by m-decomposition. Ginsburg Seymour), Ann. Math., 1956, 64, № 3, 447—449 (англ.)

Все пространства, рассматриваемые в заметке, считаются метрическими сепарабельными пространствами мощности континуума c. Два таких пространства X и Y называются гомеоморфными по m-разложению, если каждое из них может быть представлено в виде объединения системы непересекающихся подмножеств: $X = \bigcup_{r \in R} X_r$ и $Y = \bigcup_{r \in R} Y_r$ таким образом, что множество индексов R имеет мощность m и множество X_r гомеоморфно множеству Y_r для любого $r \in R$ (здесь m — мощность, меньшая c и не конфинальная c). Доказывается, что в каждом пространстве существует семейство мощности 2^c подмножеств мощности c, попарно не гомеоморфных по m-разложению. Показывается, что в любом пространстве можно выделить подмножество мощности континуума, не гомеоморфное по m-разложению всему пространству.

Р. Ю. Мацкина

2804. Об одной топологической проблеме, возникающей в теории римановых поверхностей. Баум (A topological problem originating in the theory of Riemann surfaces. Baum Walter), Lect. Funct. Complex Variable. Ann Arbor, Univ. Michigan Press, 1955, 405—407 (англ.)

Доказывается, что для любых двух связных комплексов C_p и C_q (произвольной размерности), у которых фундаментальные группы изоморфны фундаментальным группам поверхностей соответственно рода p и q, и для любого непрерывного (симплициального) отображения C_p в C_q имеет место неравенство

$$p - 1 \geqslant |c|(q - 1), \quad p \geqslant 1, \; q \geqslant 1,$$

где постоянная c является в известном смысле обобщенной степенью отображения. Отмечается, что это неравенство (представляющее собой с определенной точки зрения обобщение формулы Гурвица—Римана для римановых поверхностей) в случае, когда C_p и C_q являются поверхностями соответственно рода p и q, было доказано ранее Кнезером (Kneser H., Math. Ann., 1928, **100**, 609—617; 1930, **103**, 347—358).

Л. Д. Кудрявцев

2805. Группы изотопии. Лажис-Лима (Grupos de isotopia. Lages Lima Elon), Gaz. mat., 1957, 18, № 66—67, 9—17 (порт.)

Группой изотопии пространства X называется фактор-группа группы всех гомеоморфизмов пространства X по подгруппе гомеоморфизмов, изотопных тождественному (два гомеоморфизма называются изотопными, если их можно соединить путем в группе гомеоморфизмов).

В заметке доказывается, что группы изотопии n-мерного евклидова пространства, n-мерной сферы и $(n+1)$-мерного замкнутого шара изоморфны друг другу. Изучается связь группы изотопии компактного многообразия M и группы изотопии многообразия $M \setminus A$, получающегося из M выкидыванием конечного множества точек A.

А. С. Шварц

2806. Теоремы продолжения и гомотопической классификации. Иноуэ (A note on homotopy classification and extension. Inoue Yoshiro), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 2, 87—89 (англ.)

Рассматриваются отображения полиэдров в пространство с тремя нетривиальными гомотопическими группами. Полученный результат является (с точностью до обозначений) частным случаем общей классификационной теоремы референта (РЖМат, 1958, 1920).

М. М. Постников

2807. Одна теорема о локальных группах Бетти. Брона (A theorem about local Betti groups. Brahana Thomas R.), Michigan Math. J., 1957, 4, № 1, 33—37 (англ.)

r-мерной группой Бетти $LH_r(x:X)$ локально бикомпактного пространства X в точке $x\in X$ называется прямой предел относительных групп Бетти $\varinjlim H_r(X, X\setminus P_\alpha)$, где $\{P_\alpha\}$ — фундаментальная система окрестностей точки x, упорядоченных по вложению. Такое определение равносильно определению, предложенному П. С. Александровым (Ann. Math., 1935, 36, 1—35). Если группой коэффициентов служит поле, то, как показано в цитированной статье на стр. 23 в следствии к теореме IV (а не к теореме III на стр. 22, как ошибочно указывает автор), ранг этой группы совпадает с локальным числом Бетти $p^r(x:X)$, т. е. с числом Бетти вокруг точки x, в терминологии П. С. Александрова, если только x не является точкой r-мерной конденсации пространства X, что, как показал Уайлдер (РЖМат, 1958, 1072), во всяком случае имеет место для lc^n-пространств при $r\leqslant n$. Автор предполагает, что условия для такого совпадения в случаях, когда он рассматривает локальные числа Бетти, выполнены.

Собственной локальной триадой $(x:X;\ X_1,\ X_2)$ автор называет совокупность точки x и содержащих ее пространств X, X_1, X_2, где X_1 и X_2 — замкнутые подмножества X, если отображения вложения $k_1:(x:X_1,\ X_1\cap X_2)\to(x:X_1\cup X_2,\ X_2)$ и $k_2:(x:X_2,\ X_1\cap X_2)\to(x:X_1\cup X_2,\ X_1)$ порождают изоморфизм групп гомологий. Как известно (Wallace A. D., Duke Math. J., 1952, 19, 277—282), в случае локальной бикомпактности пространства X для этого достаточно, чтобы X_1, X_2 и $X_1\cap X_2$ имели бикомпактные границы. Рассматривается последовательность Майера—Вьеториса групп гомологий в точке, т. е. последовательность групп

$$\ldots LH_n(x:A)\xrightarrow{\psi} LH_n(x:X_1)+LH_n(x:X_2)\xrightarrow{\varphi}$$
$$\to LH_n(x:X)\xrightarrow{\Delta} LH_{n-1}(x:A)\to\ldots,$$

где $X=X_1\cup X_2$, $A=X_1\cap X_2$, а отображения ψ, φ, Δ определяются обычным образом, т. е. так: $\psi u=(h_1 u, -h_2 u)$, $\varphi(v_1, v_2)=m_1 v_1+m_2 v_2$, где гомоморфизмы h_1, h_2, m_1, m_2 порождаются вложениями соответствующих пространств, а Δ получается применением граничного оператора к высечению локальных циклов из X пространством X_2. Доказывается теорема: Последовательность Майера—Вьеториса групп гомологий в точке собственной локальной триады является точной. Переходя к рангам рассматриваемых групп, получаем отсюда формулу:

$$p^q(x:X_1\cap X_2)+p^q(x:X_1\cup X_2)=p^q(x:X_1)+$$
$$p^q(x:X_2)+r(x:N^q)+r(x:N^{q-1}),$$

где $r(x:N^n)$ означает ранг пересечения ядер гомоморфизмов ζ_1 и ζ_2, $\zeta_\nu: LH_n(x:X_1\cap X_2)\to LH_n(x:X_\nu)$, порожденных вложениями $X_1\cap X_2\subset X_\nu$ $(\nu=1,\ 2)$.

Доказанная формула применяется к исследованию обобщенных ограниченных многообразий. Локально бикомпактное пространство M с выделенным замкнутым подмножеством K называется обобщенным n-мерным многообразием с границей, если: 1) $M=K\cup A$, где A открыто, $K=\bar{A}\setminus A$, $\dim K<n$, $\dim M=n$; 2) $p^r(x:M, K)=0$ при $x\in M$, $r\leqslant n-1$; 3) $p^n(x:M, K)=1$ для всех $x\in M$; 4) $p^r(x:M)=0$ при $x\in K$, $r\leqslant n$. Доказывается теорема: Если M_1 и M_2 — обобщенные n-мерные многообразия с границами K_1 и K_2, причем $M_1\cap M_2\subset K_1\cup K_2$ (у автора ошибочно написано $K_1\cap K_2$) и $M_1\cap M_2$ есть $n-1$-мерное обобщенное многообразие, то $M_1\cup M_2$ снова будет обобщенным n-мерным многообразием с границей.

М. Ф. Бокштейн

2808. Особенности дифференцируемых отображений. Том (Les singularités des applications différentiables. Thom R.), Ann. Inst. Fourier, 1955—1956 (1956), 6, 43—87 (франц.)

Пусть f — дифференцируемое отображение евклидова пространства R^n в евклидово пространство R^p класса $m\geqslant\max(n, p)$, $k(x)$ — ранг отображения f в точке $x\in R^n$; S_r — множество тех точек $x\in R^n$, в которых $p-k(x)=r$; $\tilde{f}$ — соответствующее тангенциальное отображение, т. е. отображение пространства R^n в грассманово многообразие G_n^p n-мерных векторных подпространств пространства $R^{n+p}=R^n\times R^p$, относящее каждой точке $x\in R^n$ подпространство, касательное к графику отображения f в точке $x\times f(x)$; F_r — множество n-мерных векторных подпространств пространства $R^{n+p}=R^n\times R^p$, пересекающих подпространство $R^n\times 0$ по подпространству размерности $n-p+r$. Множество F_r есть подмногообразие размерности $(p-r)(n+r)$ многообразия G_n^p, и его прообраз при тангенциальном отображении $\tilde{f}$ есть критическое множество S_r. Точка $x\in S_r$ называется типичной, если в точке $\tilde{f}(x)\in G_n^p$ касательные плоскости к $\tilde{f}(R^n)$ и к F_r находятся в G_n^p в общем положении. Первый результат работы (теорема 1) состоит в том, что отображения, у которых все точки всех множеств S_r типичны, образуют в пространстве L всех отображений класса m пространства R^n в пространство R^p всюду плотное множество (топология в пространстве L определяется близостью класса m на компактах).

Если все точки множества S_r типичны, то S_r есть многообразие размерности $n-r(n-p+r)$ подпространства R^n. В этом случае определения критических множеств и их типичных точек могут быть, с надлежащими видоизменениями, повторены для отображения f, рассматриваемого на S_r. Так получаются множества $S_{r'}(S_r)$, которые также являются многообразиями, если все их точки типичны, затем множества $S_{r''}(S_{r'}(S_r))$, и т. д. Если каждый шаг этого процесса приводит к одним только типичным точкам, то отображение f называется типичным на R^n. В этом случае процесс обрывается вследствие понижения размерностей и приводит к разложению пространства R^n на конечное число подмногообразий, на каждом из которых отображение имеет максимальный ранг. Отображения, типичные на R^n, образуют в L открытое множество. Утверждается, что это множество плотно в L; теорема 1 рассматривается как первый шаг к доказательству этого утверждения (его полное доказательство в работе не приводится).

Описанные определения и результаты излагаются в первых двух главах работы. Гл. III начинается с более подробного рассмотрения случаев $p=1, 2, 3, 4$. Подчеркивается, что при $p=1$ теорема 1 есть классическая теорема Морса. Затем для каждой тройки n, p, r, такой, что $n-r\ (n-p+r)\geqslant 0$, строится конкретное отображение $f: R^n\to R^p$, у которого все точки множества S_r типичны. В координатной форме это отображение определяется квадратическими функциями, и для него S_r есть плоскость размер

ности $n-r\,(n-p+r)$. В случае $r=1$, $n\geqslant p$ изучается локальная структура произвольного отображения $f: R^n \to R^p$ в окрестности типичной точки множества S_r. Наконец, рассматривается проблема существования отображений с непустыми множествами $(S_r'(S_r), S_r''(S_r'(S_r)), \ldots$, состоящими из типичных точек. Доказывается, что такие отображения существуют, если $r=r'=r''=\ldots=1$, и что при $r=1$, $r'=2$ их не существует.

В гл. IV предыдущие определения и результаты частично переносятся на отображения многообразия в многообразие. Изучаются некоторые связи между локальными и интегральными свойствами отображений и их деформаций. Гл. V посвящена изучению гомологических свойств критических множеств отображений многообразия в многообразие (в целом) и содержит целый ряд новых результатов. В частности, устанавливается, что гомологический класс (mod 2) псевдомногообразия $S_r+S_{r+1}+\ldots$, отвечающего типичному отображению многообразия в многообразие, определяется гомотопическими (а при $r=1$ даже гомологическими) свойствами отображения. Рассматриваются связи с характеристическими классами и их поведением при отображении. В работе много опечаток. В. А. Рохлин

2809. **О топологии некоторых бирациональных преобразований. Деннистон** (On the topology of certain birational transformations. Dennistoun R. H. F.), Ann. Math., 1956, 63, № 1, 10—14 (англ.)

Рассматривается расширение (дилатация) алгебраического многообразия M размерности m в M'. При этом n-мерное подмногообразие $N\subset M$ переходит в $N'\subset M'$, точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (P, S_{n+1}), где $P\in N$, а S_{n+1} — $n+1$-мерное линейное подпространство, содержащее линейное пространство, касающееся N в P и содержащееся в линейном пространстве, касающемся M в P. Доказывается, что целочисленные группы гомологий $H_r(M')$ определяются формулами

$$H_r(M') \cong H_r(M) + \sum_{q=1}^{\min(r/n,\, m-n+1)} H_{r-2q}(N).$$

Доказательство непосредственно следует из топологической теоремы, обобщающей теорему Спаньера и Черна. И. Р. Шафаревич

См. также: 2921, 3258, 3260

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

2810. **О некоторых регулярных мерах. Зинк** (A note concerning regular measures. Zink Robert E.), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 127—135 (англ.)

Пусть μ — обобщенная мера, т. е. счетноаддитивная и не обязательно положительная функция множества в топологическом пространстве X. Измеримое множество E называют регулярным изнутри относительно меры μ, если

$$\mu(E)=\sup\{\mu(C): E\supset C,\ C\in \mathbf{C}\}.$$

где $\mathbf{C}$ — класс компактных измеримых множеств. E называют регулярным снаружи, если

$$\mu(E)=\inf\{\mu(U)\quad E\subset U,\ U\in \mathbf{U}\ ,$$

где $\mathbf{U}$ — класс открытых измеримых множеств. Меру μ называют регулярной изнутри (снаружи), если каждое измеримое множество регулярно изнутри (соответственно снаружи). Строится мера ν, определяемая равенством

$$\nu(E)=\int_E f(x)\,d\mu(x).$$

Даются некоторые достаточные условия, при выполнении которых регулярность обобщенной меры μ влечет регулярность меры ν. Р. С. Гугер

2811. **Построение борелевских мер. Данжуа** (La genèse des métriques boréliennes. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 24, 1667—1673 (франц.)

Пусть B_1, B_2 — семейства подмножеств некоторого пространства Δ, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $a\cup b\in B_i$, если $a, b\in B_i$, $a\cap b\neq 0$ $(i=1, 2)$; 2) $a\cap b=0$ или $a\cap b\in B_i$, если $a, b\in B_i$ $(i=1, 2)$; 3) $a\cap b\in B_1$ и $a\cap b\in B_2$, если $a\in B_1$, $b\in B_2$. Пусть φ — конечноаддитивная мера, определенная на семействе $B_1\cup B_2$. Автор изучает жордановы и борелевские меры, порожденные функцией φ. Сначала для любого множества E из Δ определяются внешние и внутренние меры Жордана следующими формулами:

$$\varphi_{e,J}(E)=\inf_{a\in B_1,\ a\supset E}\varphi(a),\quad \varphi_{i,J}(E)=\sup_{b\in B_2,\ b\subset E}\varphi(b).$$

Далее обычным образом жорданова мера расширяется до борелевской вполне аддитивной меры на некотором σ-кольце подмножеств пространства Δ.

K. Urbanik

2812. **Консервативные отображения и рекуррентная теорема. Сачестон** (A note on conservative transformations and the recurrence theorem. Suchestoun Louis), Amer. J. Math., 1957, 79 № 2, 444—447 (англ.)

Даётся новое доказательство в более широких предположениях теоремы Халмоша о степенях консервативного отображения. Р. С. Гутер

2813. **Метрическая классификация измеримых функций. Рохлин В. А.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 169—174

Статья посвящена классификации измеримых функций, определенных в пространстве Лебега.

Пространством Лебега называется пространство, изоморфное отрезку с мерой Лебега—Стилтьеса, причем мера всего пространства равна 1. Пространства считаются изоморфными, если существует такое взаимно однозначное отображение одного из них на другое, что всякому измеримому множеству из одного пространства соответствует измеримое множество другого пространства с той же мерой, и обратно.

Пусть $f(x)$ и $f'(y)$ — действительные измеримые функции, определенные соответственно на пространствах Лебега M и M'. Функции $f(x)$ и $f'(y)$ относятся к одному метрическому типу, если существуют такое изоморфное отображение T пространства M на M' и такое множество $N\subset M$, $\mu(N)=0$, что $f'(T(x))=f(x)$ для всех $x\in M-N$. Далее вводятся метрические инварианты измеримых функций. Один из них — функция распределения

$$F_f(\alpha)=F(\alpha)=\mu E\{f(x)<\alpha,\ x\in M\}=\mu X_\alpha.$$

Пусть Σ_n — совокупность тех измеримых множеств $A \subset M$, на которых $f(x)$ каждое свое значение принимает не более n раз. Положим $F_{f,n} = F_n(\alpha) = \sup_{A \subset \alpha} \{\mu(A)\}$. Функции $F(\alpha)$ и $F_n(\alpha)$ обладают свойствами: (A) $F(\alpha)$ — неубывающая функция на $(-\infty, \infty)$, непрерывная слева, и

$$\lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to +\infty} F(\alpha) = 1;$$

(B) $F_n(\alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$ — неубывающие функции на $(-\infty, \infty)$, непрерывные слева, и для $\Delta = (a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\bar{F}_{f,n}(\Delta) \leqslant \bar{F}(\Delta) = F(b) - F(a),$$

$$\bar{F}_n(\Delta) \leqslant \bar{F}_{n+1}(\Delta),$$

$$\bar{F}_{n+1}(\Delta) - \bar{F}_n(\Delta) \leqslant \bar{F}_n(\Delta) - \bar{F}_{n-1}(\Delta), \quad \bar{F}_0(\Delta) = 0.$$

Доказывается следующая классификационная теорема: Две измеримые функции $f(x)$ и $f'(y)$, определенные на пространствах Лебега, в том и только в том случае принадлежат к одному метрическому типу, если $F_f = F_{f'}$, $F_{f,n} = F_{f',n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Функции $F = F_f$, $F_n = F_{f,n}$, $n = 1, 2, \ldots$ обладают свойствами (A), (B), и для всякой системы функций F, F_n, обладающих свойствами (A) и (B), существует такая измеримая функция $f(x)$, определенная на пространстве Лебега, что $F_f = F$, $F_{f,n} = F_n$.

А. Г. Джваршейшвили

2814. О сложных квазинепрерывных функциях. Вьола (Sulle funzioni quasi continue composte. Viola Tullio), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 411—421 (итал.)

Функция f называется квазинепрерывной на измеримом множестве A относительно меры m, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $C_\varepsilon \subset A$, что $m(A \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$ и f непрерывна на C_ε. Тогда f определена почти всюду на A. Пусть f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — квазинепрерывные функции на A. Каждая f_k определена на $J_k = A \setminus N_k$, где N_k — множество меры нуль; положим $\bigcup_k N_k = N$, все f_k $(k = 1, \ldots, n)$ определены на $J = A \setminus N$. При $P \in J$ множество точек Q (в R_n) с координатами $u_k = f_k(P)$ $(k = 1, \ldots, n)$ называется «комножеством» («coinsieme») $\overline{J}$ множества J. Согласно Пиконе (Picone M., Viola T., Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione, Torino, 1952), непрерывная функция φ (определенная на $\overline{J}$) от n квазинепрерывных функций на J также будет квазинепрерывной на J. Автор доказывает теорему: Для того чтобы каждая квазинепрерывная функция φ (определенная на $\overline{J}$) от n квазинепрерывных функций на J была также квазинепрерывной на J, необходимо и достаточно, чтобы для каждого множества $E \subset J$ положительной меры комножество $\overline{E}$ было также положительной меры.

A. Rosenthal

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 3, 244.

2815. Об одном интеграле и его применениях. Онически (Asupra unei integrale şi aplicaţiile ei. Onicescu O.), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1957, № 13, 9—10 (рум.; рез. русск., франц.)

Вводится понятие интеграла $U_I[f(x) \cap \varphi(dx)]$, где I — интервал (или борелевское множество) евклидова пространства R_n, f — функция точки $\in I$, φ — аддитивная функция множества $\subset I$, причем значения f и φ принадлежат некоторой структуре A. Отмечается, что введенное понятие интеграла имеет значение в теории случайных процессов.

П. И. Романовский

2816. Интеграл Данжуа и интегрирование посредством рангированных пространств. II. Наканиси (L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. II. Nakanishi Shizu), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 1, 13—18 (франц.)

Продолжаются незавершенные выкладки первой части работы (РЖМат, 1957, 7789) и доказываются некоторые дальнейшие леммы.

П. И. Романовский

2817. Об условиях существования интеграла Колмогорова и понятии дифференциальной эквивалентности. Лейфман Л. Я., Успехи матем. наук., 1957, 12, № 3, 343—352

Рассматриваются интегралы Колмогорова (Math. Ann., 1930, 103) в смысле не более чем счетных и в смысле конечных разбиений, и понятия дифференциальной эквивалентности функций множества в соответствующих смыслах. Отмечаются различные необходимые и достаточные условия интегрируемости и дифференциальной эквивалентности. В качестве средства, приводящего многозначные функции множества к однозначным, используются нижние и верхние интегралы. Ставится вопрос о применении понятия дифференциальной эквивалентности к неинтегрируемым функциям множества.

П. И. Романовский

2818. О дифференцировании нормальных функций интервала. Чеккони (Sulla derivazione delle funzioni normali di intervallo. Cecconi Jaures), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 200—204 (итал.)

Для функций, определенных на каком-нибудь кольце A подмножеств абстрактного множества A_0 и удовлетворяющих некоторым условиям, вводится понятие m-производной, где m — конечная мера на наименьшем σ-кольце, содержащем A. Изучаются вопросы существования и некоторые свойства m-производных, с использованием аппарата абстрактного интеграла Беркилла.

П. И. Романовский

2819. Преобразование одномерных интегралов. Маржик Ян (Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 1, 93—98 (рез. чешск., франц.)

Рассматривается непрерывная функция f с ограниченной вариацией на отрезке $[a, b]$ и пусть p, n и v — положительное, отрицательное и полное изменения функции f. На $[a, b]$ определяются вспомогательные функции ρ, $\varkappa$ и η следующим образом: если в точке $x \in (a, b)$ функция f возрастает или убывает, то полагается $\rho(x) = \eta(x) = 1$, $\varkappa(x) = 0$, соответственно $\rho(x) = 0$, $\varkappa(x) = 1$ и $\eta(x) = -1$; во всех остальных $x \in [a, b]$ по определению $\rho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$.

Доказывается, что для любой функции F (соответственно функции Φ), определенной на отрезке $[a, b]$ (соответственно на $f[a, b]$), имеют место равенства, обобщающие формулу замены переменного в интеграле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{f(x)=y} F(x)\, \rho(x)\right] dy = \int_a^b F(x)\, dp(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varkappa(x)\right] dy = \int_a^b F(x)\, dn(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{f(x)=y} F(x)\, \eta(x)\right] dy = \int_a^b F(x)\, df(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{f(x)=y} F(x)\, |\eta(x)|\right] dy = \int_a^b F(x)\, dv(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{f(x)=y} F(x)\right] dy = \int_a^b F(x)\, dv(x),$$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, dy = \int_a^b \Phi[f(x)]\, df(x).$$

При этом из существования конечного или бесконечного интеграла Лебега—Стилтьеса в правой части сле-

дует существование соответственного интеграла Лебега в левой части. Л. Д. Кудрявцев

2820. **Об одном выводе формулы интегрирования по частям для интегралов Стилтьеса. Гохман Э. Х.,** Тр. Одесск. технол. ин-та, 1957, 8, 13—16

Показывается, что если в определении элементарного интеграла Стилтьеса обычные пределы интегральных сумм заменить их пределами по Шатуновскому, то для обобщенного таким путем интеграла формула интегрирования по частям остается справедливой. П. И. Романовский

2821. **Функции, равные почти всюду, интегрируемые по Риману соответственно по Лебегу. Тейлер** (Funcţii egale aproape peste tot, integrabile Riemann respectiv numai Lebesgue. Theiler G.), Studii. Inst. petrol şi gaze Bucureşti, 1955, № 1, 117—134 (рум.)

С помощью представления

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\varphi(k)\,10^k},$$

где $a_k = 0, 1, \ldots, 9$, $\varphi(k)$ — однозначная функция, строятся различные измеримые множества (на отрезке $[0, 1]$) и классы функций, интегрируемых по Риману или по Лебегу. М. К. Фаге

2822. **О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p. Талалян А. А.,** Изв. АН АрмССР, сер. физ-матем. н., 1957, 10, № 1, 31—68 (рез. арм.)

Переносится теорема Д. Е. Меньшова о сходимости по мере тригонометрических рядов на системы $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на некотором измеримом множестве $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ и образующих нормированный базис в пространстве $L_p(G)$. $p > 1$.

Доказаны следующие теоремы:

I. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, определенных на множестве $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ и образующих нормированный базис в $L_p(G)$, $p > 1$, то для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на G, существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

который сходится по мере на G к $f(x)$.

II. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, определенных на $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G < 1$ и образующих нормированный базис в $L_p(G)$, $p > 1$, то существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, у которого не все коэффициенты равны нулю и который сходится по мере к нулю.

А. Г. Джваршейшвили

2823. **Об ортогональных рядах. Тандори** (Ortogonális sorokról. Tandori Károly), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 4, 477—479 (венг.)

Статья автора (РЖМат, 1956, 2107) на венгерском языке.

2824. **Обобщение теоремы о среднем. Гуднер** (Extensions of the law of the mean. Goodner D. B.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 3, 185—186 (англ.)

Автор, опираясь на теорему Каметани (Kametani S., Natur. Sci. Rept Ochanomizu Univ., 1951, 1, 1—5), доказывает теорему Вучковича (Vučković V., Зб. радова Матем. ин-т, Српска АН, 1952, 2, 159—166), а именно:

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и внутри этого сегмента существуют левые и правые производные числа $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, $g'_+(x)$, $g'_-(x)$, то найдутся такие числа $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$ и точка $a < x_0 < b$, что

$$[pf'_+(x_0) + qf'_-(x_0)][g(b) - g(a)] =$$
$$= [pg'_+(x_0) + qg'_-(x_0)][f(b) - f(a)].$$

А. Г. Джваршейшвили

2825. **Об одной теореме Маршо. Иосифеску** (Asupra unei teoreme a lui A. Marchaud. Iosifescu Marius), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 10, 1169—1171 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается теорема Маршо (Marchaud A., Fundam. math., 1933, 20, 105—116): Всякая непрерывная функция, принимающая каждое свое значение конечное число раз, имеет производную почти всюду, при этом ее можно изменить на множестве произвольно малой меры так, что получится непрерывная функция с ограниченным изменением. А. Г. Джваршейшвили

2826. **О теореме Маршо и почти всюду дифференцируемых функциях. Маркус** (Sur un théorème de M. A. Marchaud et sur les fonctions dérivables presque partout. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 19, 2345—2347 (франц.)

Обобщается теорема Маршо (реф. 2825). Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дарбу, если внутри каждого сегмента $[\alpha, \beta]$ лежит такая точка γ, что значение функции $f(\gamma)$ лежит между значениями $f(\alpha)$ и $f(\beta)$. Доказана теорема: Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дарбу на $[a, b]$. Если существует такое множество $A \subset [a, b]$ меры нуль, что всякая точка $\xi \in [a, b] \setminus A$ есть изолированная точка множества $E\{x; f(x) = f(\xi)\}$, то функция $f(x)$ почти всюду дифференцируема на $[a, b]$. А. Г. Джваршейшвили

2827. **Несколько нигде не плотных множеств в функциональных пространствах. Маркус** (Cîteva mulţimi rare în unele spaţii funcţionale. Marcus S.), Comun. Acad. RPR, 1955, 5, № 2, 291—293 (рум.; рез. русск., франц.)

Элементарно устанавливается, в частности, следующее предложение: Множество производных функций, интегрируемых в $[\alpha, \beta]$ и непрерывных в одной и той же точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$, будет нигде не плотным в пространстве производных функций, интегрируемых в $[\alpha, \beta]$, причем последнее пространство будет нигде не плотным в пространстве производных функций, ограниченных в $[\alpha, \beta]$. Во всех пространствах

$$\rho(x, y) = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |x(t) - y(t)|.$$

Из резюме автора

2828. **Заметка о производных и функциях соседства. Мартин** (A note on derivatives and neighborly functions. Martin Abram V.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 465—467 (англ.)

Бледсо (Bledsoe W. W., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 114—115) ввел понятие функции соседства. Пусть S и T — метрические пространства, d, d' — расстояния соответственно в S и T. Пусть f — функция, заданная на S, значения которой принадлежат T. Она называется функцией соседства в точке x тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая непустая открытая сфера U, что для каждого $y \in U$ $d(x, y) + d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Понятие функции соседства является обобщением понятия непрерывной функции, так как U может и не содержать точки x.

Доказывается теорема: Если F — действительнозначная функция, определенная на множестве всех действительных чисел, производная которой F' существует всюду и интегрируема по Риману на каждом конечном интервале, то F' — функция соседства.

Условие интегрируемости по Риману не может быть опущено. Теорему нельзя обратить, так как если $f(x)=0$ для $x\leqslant 0$ и $f(x)=1$ для $x>0$, то $f(x^2)$, интегрируемая по Риману, является функцией соседства и в то же время не является производной.

Б. М. Гагаев

2829. Построение семейств непрерывных функций, не имеющих производных. Миколаш (Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables. Mikolás Miklós), Acta scient. math., 1956, **17**, № 1—2, 49—62 (франц.)

Изучаются некоторые общие приемы построения непрерывных функций вида $\sum_1^\infty c_k\varphi(\nu_k x)$, $\sum_1^\infty |c_k|<\infty$, не имеющих производных. Как частные случаи получаются различные известные примеры непрерывных функций без производной. П. И. Романовский

2830. К вопросу об анализе функций действительного переменного, основанном на понятии категории в смысле Бэра. Маркус (Contribuţii la o analiză a funcţiilor reale bazată pe noţiunea de categorie in sensul lui Baire. Marcus S.), Studii şi cercetări mat., 1956, **7**, № 3—4, 251—272 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается ряд теорем, относящихся к понятиям качественного аппроксимативного предела, качественной аппроксимативной непрерывности, качественной аппроксимативной производной. Эти теоремы были приведены автором без доказательства ранее (РЖМат, 1955, 158, 1136, 1137). П. И. Романовский

2831. Функции с заданными производными. Лич (Functions with preassigned derivatives. Leach E. B.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 9, 653—655 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $\{a_k(u)\}$ $(k=0, 1, \ldots)$ — последовательность бесконечно дифференцируемых функций m-мерной вещественной переменной $u=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, определенных в открытой области $U\in R^m$. Тогда существует бесконечно дифференцируемая функция $f(x, u)$, $x\in R^{(1)}$, $u\in U$ такая, что

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right|_{x=0}=a_k(u)\ (k=0, 1, \ldots).$$

Для $a_k(u)=\text{const}$ эта теорема была ранее другим методом доказана Розенталем (РЖМат, 1954, 3739), на работу которого автор ссылается. Сформулированная теорема в работе обобщается и на многомерный случай, когда $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В. М. Бабич

2832. Об определении частично непрерывной функции значениями на плотном множестве. II. Маркус (Asupra determinării unei funcţii parţial continue prin valorile luate pe o mulţime densă. II. Marcus S.), Comun. Acad. RPR, 1956, **6**, № 8, 985—987 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается, что если E — всюду плотное плоское множество с всюду плотным дополнением, то существует функция, определенная на всей плоскости, частично непрерывная, равная нулю на E и отличная от нуля вне E. Исправляется неточность, допущенная автором в предыдущей работе (РЖМат, 1957, 294). П. И. Романовский

2833. О критериях непрерывности для функций многих переменных и некоторых обобщениях. Цаубек (Über ein Stetigkeitskriterium für Funktionen mehrerer Veränderlichen und Verallgemeinerungen. Zaubek Othmar), Math. Nachr., 1956, **15**, № 5—6, 265—292 (нем.)

Множество K в n-мерном евклидовом пространстве R^n называется обобщенной кривой, если существует такое преобразование инверсии относительно некоторой точки $p\in R^n$, что образ K' множества K или $K'+\{p\}$ является кривой в обычном смысле (т. е. образом отрезка прямой при отображении соответствующей гладкости). Множество $M\subseteq R^n$ называется обобщенно и просто непрерывно дифференцируемым, если существует обобщенная или обычная непрерывно дифференцируемая кривая, содержащая M в качестве своего подмножества. Доказываются, в частности, следующие теоремы:

Пусть функция f определена на множестве A. Пусть, кроме того, p — предельная точка множества A и функция f сверху (снизу), соответственно просто непрерывна на каждом замкнутом дифференцируемом подмножестве B множества A, сходящемся к точке p. Тогда функция f сверху (снизу) соответственно просто непрерывна в точке p по множеству A.

Если функция f на каждом счетном и обобщенно непрерывно дифференцируемом подмножестве множества A снизу (сверху) ограничена, то функция f снизу (сверху) ограничена и на множестве A.

Если последовательность функций f_n, определенных на множестве A, равномерно сходится на каждом счетном обобщенно непрерывно дифференцируемом подмножестве множества A, то эта последовательность равномерно сходится и на всем множестве A.

Рассматривается и ряд других свойств как множеств пространства R^n, так и функций многих переменных, в частности даются критерии, когда те или иные свойства членов сходящейся последовательности функций переносятся на предельную функцию. Изучаются также подобные вопросы и для классов функций, определенных на пространствах весьма общей природы. Формулировки этих теорем требуют сложных предварительных определений. Л. Д. Кудрявцев

2834. О сходимости последовательностей функций в некоторых функциональных пространствах. Ильин В. П., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 192—195

Формулируются условия, при которых из сходимости последовательности функций, рассматриваемых в одном функциональном пространстве, следует сходимость этой последовательности в другом пространстве. Полученные теоремы являются развитием соответствующих результатов С. Л. Соболева, В. И. Кондрашова, С. М. Никольского. Отметим в качестве примера следующую теорему:

Пусть $u_i=u_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots$ — последовательность непрерывных функций, заданных в n-мерной области G, имеющих непрерывные производные до порядка l, суммируемые со степенью $p\geqslant 1$ в G. Пусть каждая точка области G достижима изнутри области n-мерным шаровым сектором постоянного радиуса и H — величина наибольшего допустимого радиуса достигающего сектора. Пусть

$$\int_G\ldots\int|u-u_i|^s\,dx_1\ldots dx_n\leqslant A_i^s,$$

$$\int_G\ldots\int\left[\sum_{i_1+\ldots+i_l=l}\left|\frac{\partial^l(u-u_i)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right|^2\right]^{p/2}dx_1\ldots dx_n\leqslant B_i^p.$$

Если $lp>n$, $\lim\limits_{i\to\infty}A_i=0$, $\lim\limits_{i\to\infty}A_i^{l-\frac{n}{p}}B_i^{\frac{n}{s}}=0$, то последовательность $\{u_i\}$ равномерно сходится в G, причем если

$$\left(\frac{A_i}{B_i}\right)^{\frac{1}{l-\frac{n}{p}+\frac{n}{s}}}\leqslant H,$$

то
$$\|u-u_i\|_C \leqslant C_1\left(A_i^{l-\frac{n}{p}}B_i^{\frac{n}{s}}\right)^{\frac{1}{l-\frac{n}{p}+\frac{n}{s}}}$$
где C_1 — постоянная, не зависящая от A_i и B_i. Отмечается, что эта и другие полученные оценки точны в смысле порядка. Указывается, что результаты работы естественным образом переносятся на случай, когда рассматриваемые функции обладают не непрерывными, а обобщенными в смысле С. Л. Соболева производными. Доказательства не приводятся.
Л. Д. Кудрявцев

2835. **Теоремы вложения для аналитических функций многих переменных. Потапов М. К.**, Докл. АН СССР, 1957, 112, № 4, 591—594

Доказываются теоремы вложения и продолжения для аналитических функций многих переменных, являющиеся развитием соответствующих исследований С. М. Никольского. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, 2π-периодическая по каждому аргументу, называется функцией класса $B^{(\delta_k)}H^{(r)}_{px_k}*(M)$, если $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+iy_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ — аналитическая по x_k+iy_k в полосе $-\delta_k<y_k<\delta_k$ при любых фиксированных вещественных значениях остальных аргументов и если существует $\lim\limits_{y_k\to\pm\delta_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+iy_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$
$$=\varphi_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\in H^{(r)}_{px_k}*(M)$$
(определение класса $H^{(r)}_{px_k}*(M)$ см. в работе С. М. Никольского, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 279). Если $f\in B^{(\delta_k)}H^{(r)}_{px_k}*(M)$ для всех $k=1, 2, \ldots, n$, то функция f называется функцией класса $B^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}H^{(r)}_p*(M)$. Пусть $1\leqslant m\leqslant n$ и $1<p\leqslant p'<\infty$. Доказывается, что если $\rho=r-(n/p-m/p')>1/p$ и функция $f(x_1, \ldots, x_n)\in B^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}H^{(r)}_p*(M)$, то по переменным $x_1, \ldots, x_m$ при любых фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ функция f принадлежит классу $B^{(\delta_1, \ldots, \delta_m)}H^{(\rho)}_p*(M_1)$. Обратно, если функция $\psi(x_1, \ldots, x_m)\in B^{(\delta_1, \ldots, \delta_m)}H^{(\rho)}_p*(M)$ и $\rho>1/p$, то, каковы бы ни были положительные $\delta_{m+1}, \ldots, \delta_n$, существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что
$$f\in B^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}H^{(r)}_p*(M_1),$$
где $r=\rho+(n-m)/p$ и $f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)=\psi(x_1, \ldots, x_m)$. Метод доказательства основан на применении наилучших приближений рассматриваемых функций тригонометрическими полиномами.
Л. Д. Кудрявцев

2836. **О представимости функций двух переменных в виде $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$. Арнольд В. И.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 119—121

Доказывается, что для любой непрерывной в квадрате $E^2=\{|x|<2, |y|<2\}$ функции $f(x, y)$, множеством нулей которой является эллипс
$$N=\left\{(x+y)^2+\frac{(x-y)^2}{4}=1\right\},$$
существует такое число $\delta(f)>0$, что, каковы бы ни были непрерывные функции χ, φ, ψ одного переменного, существует точка $(x, y)\in E^2$ такая, что
$$f(x, y)-\chi[\varphi(x)+\psi(y)]\geqslant\delta.$$
Это означает, в частности, что множество функций вида $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$ нигде не плотно в пространстве непрерывных функций $C(E^2)$.

Далее строится пример функции, являющейся равномерным пределом последовательности функций вида $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$, но которая сама не представима в указанном виде (примером такой функции является функция $f(x, y)=xy$).
Л. Д. Кудрявцев

2837. **О функциях трех переменных. Арнольд В. И.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 4, 679—681

Вкратце излагается доказательство того, что всякая действительная непрерывная функция $f(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных, определенная на трехмерном единичном кубе, может быть представлена в виде
$$f(x_1, x_2, x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3],$$
где h_{ij} и φ_{ij} — непрерывные действительные функции двух переменных.

Этот результат дает решение проблемы, известной под названием 13-й проблемы Гильберта, в смысле опровержения сформулированной в ней гипотезы. Соответствующий результат для функций n переменных при $n>3$ получен А. Н. Колмогоровым (РЖМат, 1957, 1259).
Л. Д. Кудрявцев

2838. **Связь вариации множества с метрическими свойствами дополнений. Витушкин А. Г.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 4, 686—689

Докладываются теоремы (являющиеся обобщением ранее полученных результатов автора — см. Витушкин А. Г. «О многомерных вариациях», М., 1955) о связи вариации множества, расположенного в n-мерном евклидовом пространстве E^n, с метрическими свойствами его дополнения. Пусть τ_i^k — k-мерная координатная плоскость в E^n $(i=1, 2, \ldots, C_n^k)$, $\beta_i^{n-k}(y)$ — $(n-k)$-мерная плоскость в E^n, проходящая через точку $y\in\tau_i^k$ и ортогональная к τ_i^k; w — n-мерный куб, $w\subseteq E^n$, с ребрами длины ρ и параллельными осям координат; e — некоторое подмножество пространства E^n; $V_0^w(e\cap\beta_i^{n-k}(y))$ — число компонент пересечения множества e с плоскостью $\beta_i^{n-k}(y)$, лежащих строго внутри куба w;
$$V^w_{\tau_i^k}(e)=\int_{\tau_i^k}V_0^w(e\cap\beta_i^{n-k}(y))\,dy;$$
$$V_k^w(e)=\frac{1}{C_n^k}\sum_{i=1}^{C_n^k}V^w_{\tau_i^k}(e) \text{ и } V^w(e)=\sum_{k=0}^{n}V_k^w(e).$$
Пусть e — замкнутое подмножество пространства E^n такое, что при всяком положительном l $V^w_{p+l}(e)=0$ $(p<n)$. Тогда доказывается, что в множество $w-e$ можно вписать n-мерный замкнутый куб с ребрами длины d и параллельными осям координат, причем если $V_0^w(e\cap\beta_i^{n-k}(y))\leqslant V_0$ для всех $k\leqslant p$ и y, то $d\geqslant\rho/\sqrt[n-p]{c^nV_0}$; если же $V^w(e)\geqslant 0$, то $d\geqslant\rho^{(n/n-p)}/\sqrt[n-p]{c^nV^w(e)}$, где $c\leqslant 12$ — абсолютная постоянная. Кроме того, оценивается величина $V_0^w(e\cap\beta_i^{n-k}(y))$ для некоторых конкретных множеств.
Л. Д. Кудрявцев

2839. **О структуре множеств уровня дифференцируемых отображений n-мерного куба в k-мерный куб. Дубовицкий А. Я.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, № 3, 371—408

Продолжение предыдущих исследований автора (см., например, РЖМат, 1953, 152). Рассматривается отображение
$$F=\{u_i=f_i(x_1, \ldots, x_n),\ i=1, 2, \ldots, k\}$$

n-мерного куба Q^n в k-мерный куб Q^k. Через E_u обозначается множество уровня отображения $F: u \in Q^k$, $E_u \subseteq Q^n$. Множество уровня, обладающее некоторым рассматриваемым свойством, присущим почти всем (в смысле k-мерной меры в Q^k) уровням данного отображения, называется типичным. Точка $(x_1, \ldots, x_n)$ называется особой для отображения F, если в ней матрица Якоби

$$\| du_i/dx_j \| \ (i = 1, 2, \ldots, k; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

вырождается. Доказывается, что ν-мерная мера Хаусдорфа множества особых точек $n - k + 1 - \nu$ раз дифференцируемого отображения Q^n в Q^k, содержащихся на его типичном множестве уровня, равна нулю. Вместе с тем строится пример $n - k - \nu$ раз дифференцируемого отображения Q^n в Q^k, каждый уровень которого содержит множество особых точек положительной ν-мерной меры. Доказывается, что при $n - k - 1$ раз дифференцируемом отображении Q^n в Q^k k-мерная мера образа особых точек равна нулю. Показывается, что типичное множество уровня дифференцируемого отображения Q^n в Q^k имеет размерность, не превосходящую $n - k$. Исследуются также гладкость типичных множеств уровней и размерность пересечения множества особых точек с типичными множествами уровня отображения F.

Ссылки на литературу не всегда правильны.

Л. Д. Кудрявцев

2840. Длина, форма и площадь. Штейнхаус (Długość, kształt i pole. Steinhaus H.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 1, 2, № 1, 65—78 (польск.; рез. русск., англ.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1955, 3683).

A. Goetz

2841 Д. О трудности задачи табулирования. Витушкин А. Г. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1957

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2842. Ряды Фурье. X. Лемма Рогозинского. Идзуми, Сато (Fourier series X: Rogosinski's lemma. Izumi Shin-ichi, Satô Masako), Kōdai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 4, 164—180 (англ.)

Функция $f(x)$ называется существенно непрерывной в точке ξ, если не существует такого множества E, что для любого $\delta > 0$ пересечение $E \cap (\xi - \delta, \ \xi + \delta)$ имеет положительную меру и $f(t)$ не стремится к $f(\xi)$, когда $t \to \xi$, принимая значения из E.

Пусть периодическая периода 2π функция $f(x)$ ограничена, и при $t \to 0$

$$\int_0^t \{f(x+u) - f(x-u)\}\, du = o(t)$$

равномерно относительно x из некоторой окрестности точки ξ. Если частные суммы $s_n(f; x)$ порядка n ряда Фурье функции $f(x)$ обладают тем свойством, что для любой последовательности $x_n \to \xi$

$$\frac{1}{2}\{s_n(f; x_n) + s_n(f, x_n + \pi/n)\} \to f(\xi),$$

то $f(x)$ существенно непрерывна в точке ξ.

Эту теорему можно рассматривать как обратную к теореме Рогозинского (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939, гл. VIII).

Устанавливается существование функций с разрывом второго рода в точке ξ, для которых в этой точке имеет место явление Гиббса. Наряду с этим строится пример функции с разрывом второго рода в точке ξ, для которой явление Гиббса в этой точке не имеет места.

Устанавливаются также некоторые другие предложения того же типа, что и в работе Исигуро (реф. 2843).

А. Ф. Тиман

2843. Ряды Фурье. XI. Явление Гиббса. Исигуро (Fourier series XI: Gibbs' phenomenon. Ishiguro Kazuo), Kōdai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 4, 181—188 (англ.)

Пусть $f(x) = a\psi(x - \xi) + g(x)$, где $\psi(x)$ — периодическая с периодом 2π функция, равная $(\pi - x)/2$ для $0 < x < 2\pi$, а

$$\overline{\lim_{x \to \xi + 0}}\, g(x) = 0, \quad \underline{\lim_{x \to \xi - 0}}\, g(x) = 0,$$

$$\underline{\lim_{x \to \xi + 0}}\, g(x) \geqslant -a\pi, \quad \overline{\lim_{x \to \xi - 0}}\, g(x) \leqslant a\pi.$$

Если $\int_0^x |g(\xi + u)|\, du = o(|x|)$, то существует значение r_0 $(0 < r_0 < 1)$ такое, что для чезаровских средних порядка r ряда Фурье функции $f(x)$ в точке ξ явление Гиббса имеет место, когда $r < r_0$, и не имеет места, когда $r \geqslant r_0$.

Аналогичное утверждение справедливо для функций $f(x)$, обладающих тем свойством, что

$$\overline{\lim_{x \to \xi + 0}}\, f(x) = a\pi/2, \quad \underline{\lim_{x \to \xi - 0}}\, f(x) = -a\pi/2,$$

при условии, что ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n(x - \xi)$$

и

$$a_n = \frac{a}{n}[1 + o(1)], \ \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta a_n| < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^2 \gamma_n| < \infty.$$

И в том и в другом случае число r_0 совпадает с константой Крамера, если ξ есть точка разрыва первого рода (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939, гл. VIII). Статья примыкает к работе Идзуми и Сато (реф. 2842), где первое из приведенных выше предложений установлено при $r = 0$.

А. Ф. Тиман

2844. О взаимосвязи между полным и частными наилучшими приближениями в среднем функций многих переменных. Тиман М. Ф., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 1, 24—26

Под полным наилучшим приближением функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ подразумевается обычное наилучшее приближение f тригонометрическими многочленами порядка $\leqslant n_i$ по переменным x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$:

$$E_{n_1, \ldots, n_k}(f)_{L_p} = \inf_{T_{n_1, \ldots, n_k}} \| f(x_1, \ldots, x_k) - T_{n_1, \ldots, n_k}(x_1, \ldots, x_k) \|_{L_p}.$$

Под частным наилучшим приближением функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ подразумевается наилучшее приближение f всевозможными тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant n_i$ по переменным x_i $(i = 1, 2, \ldots, r, \ r < k)$, коэффициентами которых являются периодические функции $\varphi_{i_1, \ldots, i_r}(x_{r+1}, \ldots, x_k) \in L_p$:

$$E_{n_1, \ldots, n_r, \infty}(f)_{L_p} = \inf_{T_{n_1, \ldots, n_r}} \| f(x_1, \ldots, x_k) - T_{n_1, \ldots, n_r}(x_1, \ldots, x_r; (x_{r+1}, \ldots, x_k)) \|_{L_p}.$$

При помощи неравенств для частных сумм ряда Фурье

$$(\|S_n(f)\|_{L_p} \leqslant A_p \|f\|_{L_p},\ 1<p<\infty;$$

$$\|S_n(f)\| \leqslant C \log n \|f\|,\ p=1,\ p=\infty)$$

доказывается теорема:

Для любого конечного $p>1$ существует константа C_p, не зависящая от функции f, и такая, что

$$E_{n_1,\ldots,n_k}(f)_{L_p} \leqslant C_p \min\{E_{n_{\nu_1},\ldots,n_{\nu_i},\infty}(f)_{L_p} + E_{n_{\nu_{i+1}},\ldots,n_{\nu_k},\infty}(f)_{L_p}\}$$

$(\nu_m=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ m=1,\ 2\ \ldots,\ i).$

В случаях $p=1$, $p=\infty$ справедливо неравенство

$$E_{n_1,\ldots,n_k}(f) \leqslant C \min\{[E_{n_{\nu_1},\ldots,n_{\nu_i},\infty}(f) + E_{n_{\nu_{i+1}},\ldots,n_{\nu_k},\infty}(f)] \ln n_{\nu_1} \ldots \ln n_{\nu_i}\}$$

$(\nu_m=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ i;\ i\leqslant[k/2]),$

где C — абсолютная константа.

Отметим, что в заметке референта (реф. 2835) содержится лемма, эквивалентная данной теореме для случая $1<p<\infty$. М. К Потапов

2845 Д. **Некоторые оценки приближения функций суммами Чебышева и суммами Фурье.** Селиванова С. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

См. также: 2803, 2915

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

2846. **Комплексные числа и тригонометрия.** Ричмонд (Complex numbers and trigonometry. Richmond D. E.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 7, Part I, 478—488 (англ.)

2847. **О комплексной показательной функции.** Пуату (Sur la fonction exponentielle complexe. Poitou Georges), Enseign. math., 1957, **3**, № 3, 216—228 (франц.)

2848. **Обратная теорема о сверхсходимости последовательностей частных сумм.** Нобл (A converse theorem on overconvergence of sequences of partial sums. Noble M. E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**., № 3, 592—598 (англ.)

Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z|<1$, $s_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $\varphi(x)$ — вогнутая мажоранта для $\{\ln(|a_n|+2)\}$, $(\ln(|a_n|+2)\leqslant\varphi(n))$, J — открытая дуга окружности $|z|=1$, J_1 — замкнутая дуга, $J_1\subset J$, длины 2δ.

Доказаны следующие теоремы:

1) Пусть $f(z)$ непрерывна изнутри круга $|z|<1$ на J, тогда существует число $\rho_0(\delta)$ такое, что если $f(z)-s_{n_k}(z)=O\left(\rho^{\varphi(n_k)}\right)$ $(n_k\to\infty)$ равномерно на $\bar{J}_1$, где $0<\rho<\rho_0$, то найдутся числа $\theta>0$ и $0<\tau<1$ такие, что $|a_{n_k+m}|\leqslant\tau^{\varphi(n_k)}$ для $0\leqslant m\leqslant\theta\varphi(n_k)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$

2) Пусть $f(z)$ непрерывна изнутри круга $|z|<1$ на J и $\varphi(x)=O(1)$. Если $s_{n_k}(z)\to f(z)$ равномерно на $\bar{J}_1$ $(n_k\to\infty)$, то существует последовательность $\Delta_k\to\infty$ такая, что $\max\limits_{n_k\leqslant m\leqslant n_k+\Delta_k}|a_m|=o(1)$.

Эти теоремы дают обращение теоремы автора (РЖМат, 1956, 8728). Н. А. Давыдов

2849. **О поведении вблизи границы производных некоторых равномерно сходящихся внутри области последовательностей аналитических функций.** Тумаркин Г. Ц., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 3, 502—505

Пусть α — угол между касательными, проведенными из точки $e^{i\vartheta}$ к окружности $|z|=r$ $(r<1,\ 0<\alpha<\pi)$, $\Omega_{\vartheta,\alpha}$ — область, ограниченная этими касательными и большой дугой окружности $|z|=r$.

Пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ аналитических в $|z|<1$ функций удовлетворяет условиям:

а) $\int_0^{2\pi}\ln^+|f_n(re^{i\vartheta})/d\vartheta\leqslant C$, $0<r<1$, $n=1,\ 2,\ \ldots$

и б) последовательность $\{f_n(e^{i\vartheta})\}$ сходится на множестве $E\subset\Gamma(|z|=1)$, $mE>0$, где $f_n(e^{i\vartheta})$ — угловые граничные значения функции $f_n(z)$. Доказывается, что тогда из $\{f_n(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся в каждой области $\Omega_{\vartheta,\alpha}$ с вершиной в почти всех точках $e^{i\vartheta}\in E$ и с любым углом α $(0<\alpha<\pi)$ при вершине и такую, что в каждой из указанных областей $\Omega_{\vartheta,\alpha}$

$$\lim_{n_k\to\infty}\iint_{\Omega_{\vartheta,\alpha}}|f'(z)-f'_{n_k}(z)|^2\,d\omega=0,$$

где $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$. Н. А. Давыдов

2850. **Произведение базисов аналитических функций.** Ньюнс (Products of basic sets of analytic functions. Newns W. F.), Proc. Roy, Soc., 1956, **A237**, № 1208, 55—62 (англ.)

Последовательность полиномов $\{p_k(z)\}$ образует W-базис, если любую степень z^n можно единственным образом выразить через $\{p_k(z)\}$, причем базис простой, если каждый полином $p_k(z)$ имеет степень k; базис приведенный, если в каждом $p_k(z)$ старший коэффициент равен 1; полагая $p_k(z)=\sum p_{kj}z^j$, $z^k=\sum\pi_{kj}p_j(z)$, видим, что матрицы $P\{p_{kj}\}$ и $\Pi\{\pi_{kj}\}$ обратны друг другу. Базис называется эффективным в области $D_+(r)$ в пространстве $\overline{H(r)}$, если всякая функция $f(z)$, аналитическая в $|z|<R$, $R>r$, может быть разложена в ряд

$$f(z)=\sum b_k p_k(z), \qquad (1)$$

равномерно сходящийся в некотором круге $|z|<r'$, $r'>r$, где r' зависит от $f(z)$; базис абсолютно эффективен, если ряд (1) сходится абсолютно. Если разложение (1) единственно, то базис называется U-бази-

сом. Базис называется нормированным $N(a, b)$ в $D_+(r)$, если $\mu(r+0) \leqslant br$, $\nu(\rho) > ar$ для всякого $\rho > r$, где

$$\mu(r) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{M_k(r)}, \quad \nu(r) = \underline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{M_k(r)},$$

$$M_k(r) = \max_{|z|=r} |p_k(z)|.$$

Последовательность произвольных аналитических функций $\{p_k(z)\}$ называется базисом в $\overline{H(r)}$, если всякую степень z^k можно единственным способом представить рядом $z^k = \sum b_{kj} p_j(z)$, равномерно сходящимся в $|z| < r'$, $r' > r$, r' зависит от k. Если $\{p_k(z)\}$ — базис, то обратная матрица Π определяет базис, называемый обратным. Если $\{p_k^{(1)}(z)\}$ и $\{p_k^{(2)}(z)\}$ — два базиса, то произведение соответствующих им матриц P_1 и P_2 дает матрицу P, определяющую базис $\{p_k(z)\}$, называемый произведением данных базисов.

Доказывается следующая теорема: Пусть $\{p_k(z)\}$ — U-базис, нормирован $N(b, b)$ и эффективен в $D_+(r)$ и пусть $\{p_k^{(1)}(z)\}$ — базис в $\overline{H(br)}$. Тогда, чтобы их произведение было U-базисом в $\overline{H(r)}$ а) эффективным или б) абсолютно эффективным в $D_+(r)$, необходимо и достаточно, чтобы $\{p_k^{(1)}(z)\}$ был бы U-базисом и а) эффективным или б) абсолютно эффективным в $D_+(br)$.

Аналогичная теорема справедлива, если D_+ заменить на D, $\overline{H}$ — на H (базис эффективен в $D(r)$ в пространстве $H(r)$, если всякая функция, аналитическая в $|z| < r$, может быть разложена в ряд (1), равномерно сходящийся во всякой замкнутой части круга $|z| \leqslant r$). Для эффективности базиса в $\overline{D(r)}$ в пространстве $\overline{H(r)}$ (для всякой $f(z) \in \overline{H(r)}$ ряд (1) сходится равномерно в $|z| \leqslant r$) автору удается получить достаточные условия, но не необходимые.

Для эффективности обратного базиса получено следующее обобщение прежних результатов автора (d_n — степень полинома $p_n(z)$, $\check{d}_n$ — степень полинома в обратном базисе):

Теорема. Пусть $\{p_k(z)\}$ — W-базис, эффективный в $\overline{D(r)}$ и такой, что $d_n = O(n)$, $\check{d}_n = O(n)$ и $0 < \mu(R) = \nu(R) = bR < \infty$. Тогда обратный базис абсолютно эффективен в $\overline{D(br)}$.

На ряде примеров показывается, что полученные условия ослабить нельзя. М. Г. Хапланов

2851. **Некоторые теоремы о приближении. У Сюэмоу** (Ou-Šo-mo), Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 2, 246—249 (кит.; рез. франц.)

Пусть D — односвязная область, для которой функция $z = z(t)$, осуществляющая конформное отображение $|t| < 1$ на D, обладает свойством

$$m \leqslant |z'(t)| \leqslant M \qquad (|t| < 1).$$

Известное неравенство М. Рисса, связывающее среднее действительной и мнимой части аналитической в круге $r < 1$ функции $f(z) = U(z) + iV(z)$, $V(0) = 0$:

$$\left\{\int_0^{2\pi} |V(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right\}^{1/p} \leqslant A_p \left\{\int_0^{2\pi} |U(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right\}^{1/p}$$

$$0 < r < 1, \; p > 1.$$

(A_p — константа М. Рисса), позволяет немедленно установить неравенство, связывающее средние $\|f(z)\|$ — модуля $f(z)$ и $\|U(z)\|$ — действительной части аналитической в D функции $f(z)$, где

$$\|f\| = \left\{\iint_D |f(z)|^p \, dxdy\right\}^{1/p}, \quad p > 1$$

($\|U(z)\|$ определяется аналогично).

Из этого сразу следует, что если дана последовательность $\{f_n(z)\}$ аналитических в D функций такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n(z) - U(z)\| = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} f_n(z_0) = \operatorname{Im} f(z_0) \quad (z_0 \in D),$$

то $\lim_{n\to\infty} \|f_n(z) - f(z)\| = 0$.

Аналогичный результат приводится для класса E_p функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|^* = \sup_{0<r<1} \left\{\int_{C_r} |f(z)|^p \, |dz|\right\}^{1/p},$$

где C_r — образ $|t| = r$ при отображении $z = z(t)$.

Г. Ц. Тумаркин

2852. **О кольцах непрерывных функций на окружности. Маркушевич Л. А.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 327—334

Доказывается теорема 1: Если замкнутое подкольцо $K(\varphi, \psi)$ кольца C всех непрерывных функций на окружности $|\lambda| = 1$, порожденное двумя функциями $\varphi(\lambda) \equiv \lambda^n$ и $\psi(\lambda)$, разделяющими любую пару точек окружности, не совпадает со всем кольцом C, то кривая $z_1 = \varphi(\lambda)$, $z_2 = \psi(\lambda)$ ограничивает в двумерном комплексном пространстве кусок аналитической поверхности. Обратная теорема простая (РЖМат, 1955, 4548). Доказательство основано на следующей теореме: Если $K(\lambda^n, \psi) \neq C$, то существуют функции $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)$, аналитические при $|\lambda| < 1$ и непрерывные при $|\lambda| \leqslant 1$, для которых

$$\psi^n + \varphi_1(\lambda^n)\psi^{n-1} + \ldots + \varphi_n(\lambda^n) = 0.$$

Примечание референта. В формулировке теоремы 1 допущена опечатка, — пропущено, что $\varphi(\lambda) \equiv \lambda^n$. Г. Е. Шилов

2853. **О равномерном приближении в комплексной плоскости. Виденский В. С.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 169—175

Автор упрощает доказательство теоремы Е. Я. Ремеза, дающей необходимый и достаточный критерий многочлена наилучшего приближения $T_n(z)$ (в метрике C) для комплексных функций $f(z)$. Он замечает также (теорема 3), что многочлен наилучшего приближения в метрике C осуществляет на характеристическом множестве и наилучшее степенное приближение с некоторым весом, если степень $q \geqslant 2$. Далее выясняется вопрос об аргументах разности $f(z_\nu) - T_n(z_\nu)$ на характеристическом множестве $\{z_\nu\}$, $\nu = 1, \ldots, m$; $n + 2 \leqslant m \leqslant 2n + 3$. Оказалось, что набор всевозможных θ_ν получается из равенств:

$$\frac{U(z_\nu)}{Q'(z_\nu)} = \delta_\nu e^{i\theta_\nu} \; (\delta_\nu > 0), \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

где $Q(z) = \prod_{\nu=1}^{m} (z - z_\nu)$, а $U(z)$ — произвольные многочлены степени $m - n - 2$, не обращающиеся в нуль в точках z_ν, $\nu = 1, \ldots, m$. В частном случае, когда $m = n + 2$ числа θ_ν и числа δ_ν, фигурирующие в теореме Е. Я. Ремеза, определяются однозначно. Резуль-

таты заметки, касающиеся чисел θ_ν, обобщают некоторые результаты Фекете (Fekete M.), Уолша (Walsh J. L.) Моцкина (Motzkin T. S.), Зедека (Zadek M.) и др. Сам автор, однако, этого обстоятельства не отмечает.

Примечание референта. Теорема 3 автора может быть установлена для всех $q \geqslant 1$ (у автора $q \geqslant 2$). С. Я. Хавинсон

2854. **О среднеквадратическом приближении функций комплексного переменного в бесконечных областях посредством целых функций конечной степени. Ибрагимов И. И.,** Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 50—56; Уч. зап. Азерб. ун-та, 1956, № 4, 3—11 (рез. азерб.)

Пусть D — бесконечная односвязная область комплексной плоскости z и $f(z)$ — функция класса $L_p(D)$ ($p \geqslant 1$), т. е. такая, что

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left\{\iint_D |f(z)|^p \, dx\,dy\right\}^{1/p} < \infty. \qquad (1)$$

Для случая $p = 2$ приводится необходимое и достаточное условие того, чтобы целая функция $S_\nu(z)$ степени $\leqslant \nu$ наименее уклонялась в метрике (1) от $f(z)$. Оно заключается в том, что для любой целой функции $\varphi_\nu(z)$ степени $\leqslant \nu$, принадлежащей классу $L_2(D)$,

$$\iint_D \operatorname{Re}\{\varphi_\nu(z)\,\overline{[f(z) - S_\nu(z)]}\}\, dx\,dy = 0. \qquad (2)$$

Приводятся еще две теоремы о зависимости между наилучшими приближениями и дифференциальными свойствами функций в рассматриваемой метрике.

Примечание референта. Условие (2) является частным случаем следующего критерия для наилучшего приближения, в произвольной метрике L_p ($1 \leqslant p < \infty$). Для того чтобы функция $S(z)$, принадлежащая некоторому линейному многообразию $\mathfrak{M} \subset L_p(D)$, наименее уклонялась в метрике $L_p(D)$ от данной функции $f(z) \in L_p(D)$, достаточно и (при $p = 1$, в случае, если разность $f(z) - S(z)$ почти всюду отлична от нуля) необходимо, чтобы для любой функции $\varphi(z) \in \mathfrak{M}$ имело место равенство

$$\iint_D |f(z) - S(z)|^{p-1} \times$$

$$\times \operatorname{Re}\{\varphi(z) \operatorname{sign}\overline{[f(z) - S(z)]}\}\, dx\,dy = 0, \qquad (3)$$

где

$$\operatorname{sign} w = \begin{cases} \dfrac{\overline{w}}{|w|}, & \text{когда } w \neq 0, \\ 0, & \text{когда } w = 0. \end{cases}$$

А. Ф. Тиман

2855. **Об одновременном приближении в среднем комплекснозначных функций, заданных на нескольких контурах. Тумаркин Г. Ц.,** Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 4, 710—713

Рассматривается n-связная ($n \geqslant 1$) область G, ограниченная замкнутыми спрямляемыми кривыми Γ, и пространство $L^p(d\sigma, \Gamma)$ функций, определенных на Γ, порожденное неубывающей функцией ограниченной вариации $\sigma(\zeta)$.

Если система рациональных функций с полюсами вне $\bar{G}$ неполна на Γ в пространстве $L^p(d\sigma, \Gamma)$, то из сходимости последовательности $R_n(z)$ таких функций на Γ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma |f(\zeta) - R_n(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) = 0, \quad p > 0,$$

следует, что $R_n(z)$ равномерно сходится внутри G к аналитической функции, граничные значения которой на Γ совпадают с $f(\zeta)$. Если же система рациональных функций полна в $L^p(d\sigma, \Gamma)$, то для любой $f(z) \in L^p(d\sigma, \Gamma)$ в любой аналитической в G функции $F(z)$ существует последовательность рациональных функций $R_n(z)$ с полюсами вне $\bar{G}$, равномерно сходящаяся в G к $F(z)$, а на Γ — к $f(\zeta)$ в метрике $L^p(d\sigma, \Gamma)$.

Условием, необходимым и достаточным для полноты в $L^p(d\sigma, \Gamma)$ рациональных функций с полюсами вне $\bar{G}$, служит расходимость интеграла

$$\int_\Gamma \ln \sigma' \, |\psi'(\zeta)|\, |d\zeta|,$$

в котором $\psi(z)$ отображает G на n-связную каноническую область.

Вместо класса рациональных функций можно брать эквивалентный ему класс функций, аналитических в замкнутой области $\bar{G}$. Если эти классы неплотны в $L^p(d\sigma, \Gamma)$, то для принадлежности $f(\zeta) \in L^p(d\sigma, \Gamma)$ замыканию функций указанных классов в рассматриваемом пространстве необходимо и достаточно, чтобы существовала аналитическая в G функция $f(z)$ класса D (определение дается в работе), угловые граничные значения которой совпадали бы почти всюду на Γ с $f(\zeta)$.

С помощью приведенных выше утверждений изучается вопрос о возможности приближения граничных значений функций, аналитических в G и принадлежащих классам E_δ, $\delta > 0$, посредством функций, аналитических в замкнутой области $\bar{G}$.

В работе имеются опечатки. С. Н. Мергелян

2856. **Приближение в среднем функций на спрямляемых кривых. Тумаркин Г. Ц.,** Матем. сб., 1957, **42**, № 1, 79—128

В гл. 1 устанавливается, что расходимость интеграла $\int_0^{2\pi} \ln \sigma'(x)\, dx$ является необходимым и достаточным условием полноты системы полиномов на окружности $|z| = 1$ в пространстве $L^p(d\sigma;\ 0,\ 2\pi)$, при любом $p > 0$. Ранее аналогичные теоремы при различных ограничениях на p были доказаны Сеге (Szegö G.), А. Н. Колмогоровым, М. Г. Крейном, Н. И. Ахиезером.

Дается исчерпывающая характеристика замыкания семейства полиномов в пространстве $L^p(d\sigma;\ 0,\ 2\pi)$ в случае неполноты.

Устанавливается, что для весовой функции $d\sigma(x)$ с полнотой последовательность полиномов, приближающих на $|z| = 1$ в $L^p(d\sigma;\ 0,\ 2\pi)$ любую функцию из $L^p(d\sigma;\ 0,\ 2\pi)$, может внутри $|z| = 1$ равномерно сходиться к произвольной наперед заданной аналитической функции. Тем самым решается вопрос о связи между свойствами компактности и полноты для рассматриваемого пространства.

В гл. 2 содержатся аналогичные результаты для случая приближений на замкнутой спрямляемой кривой.

В гл. 3 рассматривается пространство $L^p(d\sigma)$ функций, определенных на всей действительной оси с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, d\sigma(x) < \infty, \quad p > 0, \ d\sigma(x) \geqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(x) < \infty.$$

и изучается полнота системы $\{e^{i\alpha x}\}$ ($\alpha \geqslant 0$ — любое) в этом пространстве. Необходимое и достаточное

условие полноты при любом $p>0$ заключается в расходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \sigma'(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Эта теорема обобщает результаты М. Г. Крейна и Н. И. Ахиезера, относящиеся к случаям $p=2$ и $p\geqslant 1$ соответственно.

В случае неполноты дается необходимое и достаточное условие на функцию $f(x)$ для принадлежности замыканию линейной оболочки $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в указанной метрике. С. Н. Мергелян

2857. **О кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях. Корицкий Г. В.**, Докл. АН СССР, 1957, 115, № 4, 653—654

Продолжение результатов, полученных автором ранее (РЖМат, 1956, 3789). Устанавливаются абсолютные максимумы кривизны K_ρ линий уровня (образов окружностей $|\zeta|=\rho=\text{const}$, $\zeta=\rho e^{i\varphi}$) при отображении круговой области $|\zeta|>1$ нормированными однолистными и регулярными, за исключением простого полюса $\zeta=\infty$, функциями класса Σ, а также функциями подклассов Σ: класса Σ_2 функций вида $F_2(\zeta)=\zeta+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\zeta^{-2n+1}$ и классов Σ_p^* $(p=2, 3, \ldots)$ функций с p-кратной симметрией вращения, отображающих $|\zeta|>1$ на области с дополнениями, звездообразными относительно точки $w=0$.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. В классе Σ имеет место точная оценка

$$K_\rho \leqslant \frac{\rho(\rho^2+1)}{(\rho^2-1)^2}. \qquad (I)$$

Теорема 2. В подклассах Σ_p^* $(p=2, 3, \ldots)$ имеет место точная оценка

$$K_\rho \leqslant \frac{\rho[\rho^{2p}+2(p-1)\rho^p+1]}{(\rho^p-1)^2(\rho^p+1)^{2/p}}. \qquad (II)$$

Приводятся экстремальные отображающие функции. Доказательства опираются на некоторые классические оценки в классе Σ и на оценку снизу модуля производной в подклассах Σ_p^*, найденную И. Е. Базилевичем (Матем. сб., 1937, 2 (44), № 4, 689).

Примечание референта. Оценка (1) является точной и в классе функций Σ_1^0, однолистно отображающих $|\zeta|>1$ на области с выпуклыми дополнениями, содержащими точку $w=0$ (Зморович В. А., Укр. матем. ж., 1952, 4, № 3, 276—298).

Л. Е. Дундученко

2858. **О конформных радиусах и функциях Грина неналегающих областей. Ся Дао-син** (Shah Tao-Shing), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 1, 13—18 (кит.; рез. англ.)

Пусть G_1, G_2 — две неналегающие области, содержащиеся в некоторой области G; $R(a_\nu, G_\nu)$ — конформный радиус области G_ν относительно ее точки a_ν, $\nu=1, 2$; $g(z, \zeta)$ — функция Грина области G с логарифмической особенностью в ζ и $h(z, \zeta)$ — регулярная часть $g(z, \zeta)$, т. е. $g(z, \zeta)=-\ln|z-\zeta|+h(z, \zeta)$. Методом экстремальной длины доказывается, что тогда для $x_2>0$, $x_2>0$ имеем:

$$\sup_{G_1+G_2} R(a_1, G_1)^{x_1^2} R(a_2, G_2)^{x_2^2} =$$

$$=|a_1-a_2|^{2x_1x_2}\exp\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{2}(-1)^{\nu+\mu}h(a_\nu, a_\mu)x_\nu x_\mu\right)$$

Резюме автора

Примечание референта. Что верхняя грань указанного произведения не превосходит приведенного выражения и некоторые более общие неравенства, связанные с рассматриваемой проблемой, нашел ранее Нехари другим методом (РЖМат, 1956, 5203). Ю. Е. Аленицын

2859. **О свойствах функций Фридмана и других функций, связанных с ним. Курода Инао** (Kuroda Inao), Ямагата дайгаку киё (сидзэн кагаку), Bull. Yamagata Univ. (Natur. Sci.), 1957, 4, № 1, 1—11 (японск.; рез. англ.)

Фридман высказал следующую замечательную теорему (Friedman, Duke Math. J., 1946, 13): Пусть $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots$ — функция, аналитическая и однолистная в единичном круге $|z|<1$, причем $a_2, a_3, \ldots$ — коэффициенты степенного ряда для $f(z)$ — целые положительные или отрицательные числа, либо нули; тогда $f(z)$ является одной из девяти следующих функций: z, $\frac{z}{1\pm z}$, $\frac{z}{1\pm z^2}$, $\frac{z}{1\pm z+z^2}$, $\frac{z}{(1\pm z)^2}$. Недавно Линис (Linis V.) обобщил эту теорему, предполагая, что коэффициенты a_n являются гауссовыми целыми числами (РЖМат, 1956, 1267). С тех пор автор много занимался этой теоремой и назвал ее теоремой Фридмана, а приведенные девять функций — функциями Фридмана. Он также доказал теорему другим, более простым способом (Bull. Yamagata Univ. (Natur. Sci), 1950, 1, № 1).

Ввиду их большого значения функции Фридмана часто цитируются в работах по теории однолистных функций. В настоящей статье автор делает попытку дальнейшего исследования, изучая их порождение и замечательные свойства, вместе с порождением и свойствами других функций, тесно связанных с ними, как $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arth} z$; в частности, он пытается объяснить разные достопримечательные связи между ними с точки зрения теории конформных отображений.

Резюме автора

2860. **Несколько замечаний о теоремах Шильда, относящихся к одному классу однолистных функций. Левандовский** (Quelques remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes. Lewandowski Zdzisław), Ann. Univ. M. Curie Skłodowska, 1955 (1957), A9, № 1—13, 149—155 (франц.; рез. русск., польск.)

А. Шильд (РЖМат, 1955, 1162) получил ряд точных результатов относительно свойств конформного отображения, доставляемого многочленами вида $z-\sum_{n=2}^{N} a_nz^n$, $N\geqslant 2$, $a_n^*\geqslant 0$ $(n=2, \ldots, N)$, однолистными в единичном круге и неоднолистными в большем круге. В реферируемой работе показывается, что семь из девяти теорем Шильда верны и для более широкого класса функций, а именно, для класса Ф функций вида $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_nz^n$ (где a_n — любые комплексные коэффициенты), удовлетворяющих условию

$$1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\geqslant 0. \qquad (1)$$

Приведем две из теорем, полученных в работе.

Теорема 5. Каждая функция $f(z)$ класса Ф отображает круг $|z|\leqslant 1/2$ (но не всегда больший круг) на выпуклую область.

Теорема 9. Если $f(z)\in\Phi$, то в $|z|<1$ имеем точные оценки:

$$|z|-\frac{|z|^2}{2}\leqslant|f(z)|\leqslant|z|+\frac{|z|^2}{2}.$$

Доказательство этих и остальных теорем получено элементарными преобразованиями соответствующих выражений (для теоремы 5 выражения $\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|$, для теоремы 9 — $|f(z)|$ и т. д.) и оценкой их с помощью неравенства (1).

Примечание референта. Автором доказывается теорема 3, утверждающая, что если функция $f(z)\in\Phi$, то она отображает единичный круг на область, звездообразную относительно начала. Эта теорема является частным случаем более общих результатов Одзаки (Ozaki S., Sci. Repts Tokyo Bunrika Daigaku, 1934, A2, № 32), приведенных, в частности, в книге Бернацкого (Biernacki M., Les fonctions multivalentes, Paris, 1938, см. теорему 21 и ее доказательство). Ю. Е. Аленицын

2861. **Однолистные функции и неаналитические кривые.** Гудман (Univalent functions and non-analytic curves. Goodman A. W.), Proc. Amer. Math. Soc.; 1957, 8, № 3, 598—601 (англ.)

Доказывается, что функция

$$F(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{2^k}}{16^k}$$

однолистна и выпукла в круге $|z|\leqslant 1$ и преобразует окружность $|z|=1$ в гладкую замкнутую выпуклую кривую, любая дуга которой неаналитична. Доказательство основано на теореме: Если

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

и $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leqslant 1$, то $w=f(z)$ однолистна в круге $|z|<1$ и преобразует его в область, звездную относительно точки $w=0$; если же $\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\leqslant 1$, то $f(z)$ однолистна и выпукла в $|z|<1$.

Эту теорему, как замечает автор, впервые строго доказал Ремак (Remak R., Mathematica, 1943, B11, 175—192), обнаруживший ошибку в первоначальном доказательстве Александера (Alexander J. W., Ann. Math., 1915, 17, 12—22). Автор приводит свое доказательство этой теоремы и отмечает, что

$$z+\frac{1}{2}(1+\varepsilon)z^2,\quad z+\frac{1}{4}(1+\varepsilon)z^2\quad(\varepsilon>0$$

свидетельствуют о невозможности повысить оценки, упоминаемые в условии теоремы.

В. А. Зморович

2862. **О связи между типично-вещественными и однолистными функциями.** Стрелиц Ш. И., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 211—220

Рассматривается подкласс S_0 класса однолистных регулярных в единичном круге функций, совпадающий с подклассом функций, выпуклых по направлению мнимой оси с вещественными коэффициентами.

Примечание референта. 1. Подкласс S_0 был детально исследован Робертсоном (Robertson M. S., Amer. J. Math., 1936, 58, 465—472; Ann. Math., 1936, 37, № 2, 374—408), что, по-видимому, автору не было известно. 2. В структурной формуле для функций класса, приведенной на стр. 215, имеется описка. Должно быть:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}\ln\frac{1-ze^{-i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\,\frac{d\alpha(\theta)}{\sin\theta}.$$

С. А. Касьянюк

2863. **Класс функций со звёздными образами** У Чжо-жэнь (Wu Zwao-Jen), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 3, 476—489 (кит.; рез. англ.)

Пусть S — класс функций $f(z)=z+\sum_{\nu=2}^{\infty}a_\nu z^\nu$, регулярных и однолистных в $|z|<1$; S^* — подкласс функций $w=f(z)\in S$ и отображающих $|z|<1$ на звездообразные области относительно $w=0$; S_* — подкласс функций $f(z)\in S^*$, для которых

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>\frac{1}{2}\text{ b }|z|<1;$$

K — подкласс функций $w=f(z)\in S_*$, отображающих $|z|<1$ на выпуклые области. Для $f(z)=z+\sum_{\nu=2}^{\infty}a_\nu z^\nu$ положим $\sigma_n(z)=z+\sum_{\nu=2}^{n}a_\nu z^\nu$.

В работе показывается, что для всякой функции $f(z)\in S_*$ найдется неубывающая функция $\alpha(\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $\alpha(2\pi)-\alpha(0)=2\pi$ такая, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z}{1-ze^{-i\theta}}\,d\alpha(\theta),$$

а также другая $\alpha(\theta)$, с теми же свойствами, такая, что

$$f(z)=ze^{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-ze^{-i\theta})d\alpha(\theta)}.$$

Последняя из указанных формул при всякой функции $\alpha(\theta)$ указанного вида дает $f(z)\in S_*$. Аналогичные представления с помощью интеграла Стилтьеса для многих специальных классов однолистных функций были известны и ранее (см., например, работы В. А. Зморовича и его учеников (РЖМат, 1956, 350, 8749)).

Для $f(z)\in S_*$ имеем

$$2\sigma_n\left(\frac{1}{2}z\right)\in S;\quad n=1,2,\ldots,$$

$$2\sigma_n\left(\frac{1}{2}z\right)\in S^*;\quad n=1,2,6,7,\ldots,$$

$$3\sigma_n\left(\frac{1}{3}z\right)\in S_*;\quad n=1,2,4,5,\ldots,$$

$$4\sigma_n\left(\frac{1}{4}z\right)\in K;\quad n=1,2,\ldots$$

Кроме того, в $|z|<1$ для $f(z)\in S_*$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]\geqslant\frac{1}{1+|z|},$$

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\arcsin|z|,$$

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\arcsin|z|,$$

$$|\arg f'(z)|\leqslant 2\arcsin|z|.$$

Знак равенства имеет место только для $f(z)=\frac{z}{1-\tau_i z}$, где $\tau_i=\text{const}$, $|\tau_i|=1$.

В работе получены и некоторые другие оценки.

Н. А. Лебедев

2864. Приложение теории положительной квадратичной дифференциальной формы к задаче о произведении конформных радиусов. Ся Дао-Син (Shah Tao-Shing.) Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 6, № 4, 583—597 (кит.; рез. англ.)

Пусть G — область в плоскости z и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные между собой точки G. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — система подобластей G таких, что $a_i \in G_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и что $G_iG_j=0$ $(i\neq j)$. Через $R(a_i, G_i)$ обозначим конформный радиус области G_i относительно a_i $(i=1, \ldots, n)$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа и

$$I_G(a_1,a_2, \ldots, a_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$
$$=\max\prod_{\nu=1}^{n} R(a_\nu, G_\nu)^{x_\nu}.$$

Рассматривается задача определения тех областей $G_1, G_2, \ldots, G_n$, для которых справедливо равенство

$$\prod_{\nu=1}^{n} R(a_\nu,G_\nu)^{x_\nu}=$$
$$=I_G(a_1, a_2, \ldots, a_n; x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Выражение $P(z)\,dz^2$ называют положительным квадратичным дифференциалом, если оно положительно или нуль на границе G, функция $P(z)$ мероморфна в замкнутой области $\bar{G}$.

Для простоты предполагается, что граница G состоит только из аналитических кривых.

В работе устанавливаются следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $P(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $P(z)$ регулярна в G, исключая полюса второй кратности в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и имеет в окрестности a_ν $(\nu=1, \ldots, n)$ разложение

$$P(z)=\frac{-x_\nu}{(z-a_\nu)^2}+\ldots \quad (\nu=1, \ldots, n).$$

2) $P(z)$ имеет по меньшей мере один нуль на каждой замкнутой граничной кривой G.

3) Для любой пары корней z' и z'' уравнения $P(z)=0$ имеем

$$\operatorname{Im}\left(\int_{z'}^{z''}\sqrt{P(z)\,dz^2}\right)=0.$$

Для справедливости равенства

$$\prod_{\nu=1}^{n} R(a_\nu, G_\nu)^{x_\nu}=$$
$$=I_G(a_1, a_2, \ldots, a_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

необходимо и достаточно, чтобы граничные кривые областей $G_1, G_2, \ldots, G_n$ являлись траекториями положительного квадратичного дифференциала $P(z)\,dz^2$ с концами в корнях уравнения $P(z)=0$.

Функция $\zeta=\exp\left(\int_{z_0}^{z}\sqrt{\frac{P(z)\,dz^2}{-x_\nu}}\right)$, $P(z_0)=0$, $z\in G_\nu$, отображает G_ν в $|\zeta|<1$, переводя a_ν в $\zeta=0$.

Далее следует теорема 2, которая является частным случаем теоремы 1. А именно тот случай, когда G есть круг радиуса R.

Теорема 3. Для того чтобы система областей $G_1, G_2, \ldots, G_n$ являлась экстремальной для величины $I_G(a_1, a_2, \ldots, a_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$, необходимо и достаточно, чтобы границы этих областей совпадали с кривыми уровня $H(z)=0$ функции $H(z)$, где $H(z)$ — гармоническая в G, двузначна и удовлетворяет следующим условиям:

1) Модуль $|H(z)|$ однозначен и обращается в нуль на границе G,

2) $H(z)$ имеет только конечное число точек ветвления второго порядка в замкнутой области $\bar{G}$ и для любой точки ветвления a имеем $H(a)=0$ и $\lim_{z\to a}|\operatorname{grad} H(z)|=0$.

3) На каждой замкнутой граничной кривой G существует по меньшей мере одна точка ветвления $H(z)$.

4) $H(z)$ — гармоническая в замкнутой области $\bar{G}$, исключая точки ветвления и логарифмические полюса $a_1, \ldots, a_n$ с вычетами $\pm\sqrt{x_\nu}$ $(\nu=1, \ldots, n)$ соответственно.

При этих условиях

$$I_G(a_1, \ldots, a_n; x_1, \ldots, x_n)=$$
$$=\prod_{\nu=1}^{n}\lim_{z\to a_\nu}|z-a_\nu|^{x_\nu}\exp\left(\frac{|H(z)|}{\sqrt{x_\nu}}\right).$$

Следствие

$$I_G(a_1, \ldots, a_n; x_1, \ldots, x_n)\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{\mu\neq\nu}|a_\mu-a_\nu|^{-\sqrt{x_\mu x_\nu}}\exp\left(\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\sqrt{x_\mu x_\nu}\,H(a_\mu, a_\nu)\right),$$

где $H(z, \zeta)$ — регулярная часть функции Грина $G(z, \zeta)$ области G в $z=\zeta$, т. е. $H(z, \zeta)=\log|z-\zeta|+G(z, \zeta)$.

Л. И. Колбина

2865. О функциях, однолистных в круговом кольце. Ся Дао-син (Shah Tao-Shing). Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 4, 598—618 (кит.; рез. англ.)

Однолистная двусвязная область G ζ-плоскости называется областью класса S_R, если она может быть однолистно и конформно отображена на круговое кольцо $1<|\zeta|<R$. Через F_R обозначается класс аналитических функций, однолистных в кольце $1\leqslant|\zeta|<R$. Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть $G\in S_R$ и дополнение G состоит из континуумов C_1 и C_2. Если C_1 содержит начало координат и точки

$$a_\nu=r_1\exp\left\{i\,\frac{2\pi\nu+\xi}{n}\right\} \quad (\nu=1, 2, \ldots, n),$$

а C_2 содержит бесконечно удаленную точку и n точек

$$b_\mu=r_2\exp\left\{i\,\frac{2\pi\mu+\tau_i}{n}\right\} \quad (\mu=1, 2, \ldots, n)$$

(ξ, η — действительные числа), то

$$\frac{r_1}{r_2}\leqslant\sqrt[n]{k}, \tag{1}$$

где k есть положительный корень уравнения

$$R=\exp\left\{\frac{\pi}{n}\,k\,\frac{p(k)}{p\left(\frac{1}{k}\right)}\right\}, \quad p(k)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x+k)}}.$$

Оценка (1) точная и достигается только тогда, когда граница G есть «звезда» $2n$ отрезков

$$z = r \exp\left\{i\,\frac{2\pi\nu+\xi}{n}\right\},\quad 0 \leqslant r \leqslant r_1;$$

$$z = \rho \exp\left\{i\,\frac{(2\nu+1)\pi+\xi}{n}\right\},$$

$$r_2 \leqslant \rho < \infty,\quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 2. Пусть G — такая же область, как в теореме 1. Обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_n$ n любых лучей, проведенных из начала координат ζ-плоскости в образующих между собой равные углы. Через $C_\nu^{(1)}$ и $C_\nu^{(2)}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$) обозначим аффиксы точек, расположенных на луче l_ν и являющихся соответственно наиболее удаленной и наиболее близкой от начала координат точками континуумов C_1 и C_2. Тогда, полагая

$$\rho(G) = \min_{(l_1, l_2, \ldots, l_n)} \frac{\max\left(\left|c_1^{(2)}\right|, \ldots, \left|c_n^{(2)}\right|\right)}{\min\left(\left|c_1^{(1)}\right|, \ldots, \left|c_n^{(1)}\right|\right)} \qquad (2)$$

и обозначая через k минимум $\rho(G)$, когда G пробегает класс S_R, мы имеем для k уравнение

$$R = \exp\left\{\frac{\pi}{n\sqrt{k^2-1}}\,\frac{p\left(\frac{1}{k^2-1}\right)}{p(k^2-1)}\right\},\quad k > 1, \qquad (3)$$

определяющее k однозначно (В резюме в формулах (2) и (3) опечатки).

Теорема 3. Пусть $f(\zeta) \in F_R$ и $|f(\zeta)| < 1$ в кольце $1 < |\zeta| < R$. Пусть, кроме того, точка $z = 0$ содержится в континууме, являющемся внутренним дополнением образа кольца $1 < |\zeta| < R$ при отображении $z = f(\zeta)$. Тогда $|f(\zeta)| \leqslant \Phi_a(|\zeta|)$, где $z = \Phi_a(\zeta)$ однолистно отображает кольцо $1 < |\zeta| < R$ на круг $|z| < 1$ с разрезом вдоль отрезка $0 \leqslant z \leqslant a < 1$, причем $\Phi_a(1) > 0$.

Теорема 4. Пусть D есть однолистная n-связная область ζ-плоскости, граница которой состоит из континуумов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Пусть далее $\varphi_\nu(\zeta; z_0)$, $z_0 \in D$, есть регулярная и однолистная в D функция, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi_\nu(z_0; z_0) = 0$; 2) $|\varphi_\nu(\zeta; z_0)| = 1$ на γ_ν; 3) $\arg \varphi_\nu(\zeta; z_0) = \text{const}$ на γ_μ, где $\mu \neq \nu$. Тогда для любой регулярной и однолистной в D функции $f(\zeta)$, $f(z_0) = 0$, $|f(\zeta)| \geqslant 1$ на γ_ν, справедливо неравенство

$$|f'(z_0)| \geqslant |\varphi_\nu'(z_0; z_0)|.$$

В. А. Зморович

2866. Электромоделирование конформного преобразования внешности круга на внешность заданной кривой. Угодчиков, Серебренникова (Електромоделювання конформного перетворення зовнішності круга на зовнішність заданої кривої. Угодчиков А. Г., Серебренникова І. І.), Прикл. механіка, 1957, **3**, № 3, 269—276 (укр.; рез. русск., англ.)

При помощи метода сопряженных тригонометрических рядов решается задача о построении функции $z = w_n(\zeta)$, имеющей вид полинома, которая конформно отображает внешность единичного круга $|\zeta| \geqslant 1$ на область $S(z)$, представляющую собой внешность заданной кривой L.

Необходимые для этого положения точек M_j' границы L, в которые переходят при конформном отображении точки $\zeta_j = e^{i\frac{2\pi}{m}j}$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, m$) окружности $|\zeta| = 1$, находятся при помощи электромоделирования.

Так как непосредственное моделирование осуществить невозможно, то предварительно производится инверсия бесконечной области S (относительно окружности K) на конечную односвязную область S_1, для которой электрическая модель конформного преобразования строится по разработанной ранее А. Г. Угодчиковым методике (РЖМат, 1956, 5816).

После установления соответствия точек границы $|\zeta| = 1$ единичного круга $|\zeta| \leqslant 1$ и границы L_1 области S_1 определение соответствия точек границы $|\zeta| = 1$ внешности единичного круга $|\zeta| \geqslant 1$ и границы L области S осуществляется с помощью обратной инверсии относительно той же окружности K.

Для компенсации ошибок, вызванных неоднородностью электропроводной бумаги, предварительно находятся координаты искомых точек в какой-либо простейшей, достаточно близкой к S_1, области, для которой известно точное теоретическое решение задачи, а затем полученные неувязки принимаются в качестве поправок при определении координат точек M_j' для заданной области.

Рассмотрены два конкретных примера: отображение внешности круга на внешность эллипса и на внешность равнобедренного прямоугольного треугольника. Излагается также более упрощенная, но менее точная методика моделирования этой же задачи. Библ. 9 назв.

П. Ф. Фильчаков

2867. О фильтрации в прямоугольной перемычке при весьма большой высоте капиллярного поднятия. Михайлов Г. К., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 4, 725—728

Рассматривается задача фильтрации в весьма высокой (бесконечно высокой) прямоугольной перемычке при весьма большой (бесконечной) высоте капиллярного поднятия.

Предполагается, что перемычка расположена на водонепроницаемом основании, капиллярная зона полностью насыщена водой, а движение в ней подчиняется закону Дарси.

Решение найдено в параметрическом виде, путем отображения при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца области движения грунтовых вод и области комплексной скорости на вспомогательную полуплоскость.

Получены в замкнутом виде формулы для полного фильтрационного расхода и для определения высоты участка высачивания h (который является изобарой).

При малых значениях L/H для определения h установлена также асимптотическая формула

$$\frac{h}{H} = 1 - \lambda\,\frac{L}{H}\quad (\lambda \approx 0{,}50446),$$

где H есть уровень воды в верхнем бьефе, L — длина основания перемычки.

Построены графики для определения полного фильтрационного расхода и высоты участка высачивания при отсутствии воды в нижнем бьефе, которые сопоставляются с аналогичными графиками, построенными на основании точного гидромеханического решения без учета капиллярного поднятия по формулам П. Я. Полубариновой-Кочиной (Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд-во АН СССР, 1942) и Дюпюи—Чарного (Чарный И. А., Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 6). Библ. 18 назв. П. Ф. Фильчаков

2868. Об одном предположении Спенсера. Дженкинс (On a conjecture of Spencer. Jenkins

James A.), Ann. Math., 1957, 65, № 3, 405—410 (англ.)

Спенсер (Spencer D. C., Ann. Math., 1941, 42, 614—633) высказал предположение, что известная для однолистных функций теорема об $^1/_4$ верна и для функций, однолистных по площади. Гарабедян и Ройден (РЖМат, 1955, 4369) доказали эту теорему для класса функций даже более широкого, чем класс функций, однолистных по площади. В реферируемой работе дается новое доказательство теоремы Гарабедяна и Ройдена, основанное на методах круговой симметризации и экстремальной метрики. Ю. Е. Аленицын

2869. **О некоторых экстремальных проблемах. Абэ** (Abe H.), Tokusima дайгаку когакубу кэнкю хококу, Scient. Papers Fac. Engng Tokushima Univ., 1955, № 6, 12—13 (японск.; рез. англ.)

Пусть функция $f(z)=a_0+z^p+\sum_{s=1}^{\infty}a_{p+s}z^{p+s}$ регулярна в односвязной области D, имеющей более одной граничной точки и содержащей начало координат; пусть функция $Z=\psi(z)=z+\sum_{s=2}^{\infty}b_sz^s$ конформно отображает эту область на круг $|Z|<R$. Тогда справедливы неравенства:

1) $\sup\limits_{z\in D}|f(z)|\geqslant\sqrt{|a_0|^2+R^{2p}}$,

2) $\iint\limits_D|f'(z)|^2\,dxdy\geqslant\pi pR^{2p}$, $z=x+iy$,

3) $\int\limits_C|f'(z)||dz|\geqslant 2\pi pR^p$,

где C — граница области D и интеграл понимается в смысле предела такого же интеграла по линии уровня C_ρ при $\rho\to R$.

Знак равенства всюду имеет место лишь для функции $f_0(z)=a_0+\psi^p(z)$, причем в случае 1) только для $a_0=0$.

В случае $p=1$ отсюда следуют известные минимизирующие свойства функции $Z=\psi(z)$. Метод доказательства ничем не отличается от ранее известного. И. Е. Базилевич

2870. **Экстремальные проблемы для дифференцируемых функционалов в теории однолистных функций. Шлионский Г. Г.**, Докл. АН СССР, 1957, 113, № 2, 280—282

Пусть $\mathfrak{M}_G$ — семейство функций, регулярных в области G, за исключением, может быть, конечного числа полюсов; $\mathfrak{N}_G$ — семейство функций, регулярных в G; K_e — некоторый класс функций, регулярных в G, за исключением, может быть, конечного числа полюсов в множестве $e\subset G$.

Рассматриваются такие определенные на $\mathfrak{M}_G$ функционалы $\Phi(f)$, для которых при $f\in K_e$, $h\in\mathfrak{M}_G$ функциональная производная $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\Phi(f+\lambda h)-\Phi(f)]$ (λ вещественно) существует и представима в виде $D_f^{\Phi}(h)$ для комплексного функционала или в виде $\mathrm{Re}D_f^{\Phi}(h)$ для вещественного $\Phi(f)$, где $D_f^{\Phi}(h)$ — комплексный функционал, дистрибутивный относительно $h\in\mathfrak{N}_G$, конечный на $\mathfrak{N}_G$. Требуется еще, чтобы $\varphi(z)=D_f^{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)$, $\zeta\in G$, была рациональной функцией с полюсами в G.

Утверждается, что для таких довольно общего вида функционалов при исследовании границы области значений их, как экстремальной задачи (РЖМат, 1956, 7286), непосредственно применимы известные вариационные методы теории однолистных функций. В частности, для функций, дающих экстремум вещественному функционалу $\Phi(f)$, определенному на классе S функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, регулярных и однолистных в $|z|<1$, получено, как обычно, дифференциальное уравнение, доказано, что экстремальные области получаются из плоскости проведением разрезов по конечному числу аналитических кривых и указано уравнение для этих граничных кривых. Указаны также соотношения, связывающие экстремальную функцию $f(z)$ и функцию $f(z,t)$, отображающую $|z|<1$ на область, получаемую из экстремальной присоединением части разрезов — аналогичные уравнениям, полученным ранее Н. А. Лебедевым (Докл. АН СССР, 1951, 76, № 1, 25—27) для некоторых конкретных функционалов. П. П. Куфарев

2871. **Построение аналитических функций с наперед заданной топологической сетью. Ламбин Н. В.**, Уч. зап. Белорусск. ун-т, 1957, вып. 32, 63—94

Основную роль в работе играет понятие топологической сети, принадлежащей данной аналитической функции в области D. В общих чертах построение топологической сети таково: область D разбивается на совокупность неперекрывающихся областей T_i (называемых автором областями характеристического типа), ограниченных конечным числом линий уровня $|f(z)|$ и $\arg f(z)$, не накопляющихся в окрестности внутренней точки области; топологическая сеть состоит из узлов по одному в каждой области T_i, соединяющих их звеньев, и подчиняется ряду дополнительных условий. Полное описание сети имеется в предыдущих статьях автора (Уч. зап. Белорусск. ун-т, 1949, вып. 11; 1951, вып. 12), продолжением которых является реферируемая статья.

В первой части работы с помощью квазиконформных отображений решается задача на склеивание с функцией соответствия, непрерывной на отрезке и аналитической внутри отрезка, и доказывается аналитичность линии склеивания (Волковыский, Квазиконформные отображения, изд. Львовск. ун-та, 1954, ст. 104, библ. там же).

Во второй части рассматривается задача о построении по наперед заданной топологической сети H такой аналитической функции, чтобы сеть H принадлежала этой функции. Выделяется класс топологических сетей, для которых доказывается существование соответствующей аналитической функции.

Автор отмечает, что используемый им метод исследования сходен с методом Морса (М. Морс, Топологические методы теории функций комплексного переменного, Изд-во ин. лит., 1951). И. Н. Песин

2872. **Метод аппроксимации нулей аналитических функций. Кулик** (A method for approximating the zeros of analytic functions. Kulik Stephen), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 137—141 (англ.)

Предлагается следующий способ приближенного вычисления нулей аналитической функции. Пусть $f(z)$ аналитична на круге C и имеет внутри конечное число нулей a_i кратностей m_i; $\Phi(z,u,v,\ldots)$ — функция, аналитическая в той же области и имеющая a_i нулями кратности $<m_i$, в остальном произвольная и могущая зависеть от некоторых параметров. Положим

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{\Phi(z)}{f(z)}\right]^{(n-1)}=\frac{Q_n(z)}{f^n(z)}.$$

Если точка z расположена к $a=a_1$ ближе, чем к остальным нулям $f(z)$ и к контуру C, то

$$a=z-\lim_{m\to\infty}f(z)\,Q_{n-1}(z)/Q_n(z)=z-\lim_{n\to\infty}f(z)/[Q_n(z)]^{1/n}.$$

Рассмотрен ряд частных случаев. Приводятся соображения о качестве сходимости процесса. Доказательство основного утверждения отсутствует. Есть опечатки.
Г. Н. Чеботарев

2873. Об асимптотических путях мероморфных функций. Зейберт (Sur les chemins asymptotiques des fonctions méromorphes. Seibert Peter), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 11, 1443—1445 (франц.)

Пусть $w=f(z)$ — функция, мероморфная в $|z|<R\leqslant\infty$. В круге $|z|<R$ определяется метрика: если z_1, z_2 — две точки из $|z|<R$, а 1 — множество жордановых дуг, соединяющих z_1, z_2, то

$$\rho(z_1, z_2)=\max_j\left\{\inf_{C\in\Gamma}\sup_{z\in C}[f(z), f(z_j)]\right\},\quad j=1, 2,$$

причем под $[f(z), f(z_j)]$ понимается сферическое расстояние между $f(z)$, $f(z_j)$. Полученное пространство P пополняется до P^*. Поставив в соответствие каждому асимптотическому пути $L=\{z=\varphi(t)\}$, $0\leqslant t<1$, элемент $\xi\in Z=P^*-P$, порожденный $\varphi(t_n)$ при $t_n\to 1$, можно рассматривать Z, как пространство классов асимптотических путей, где каждому классу соответствует фиксированный элемент из Z. В Z вводится циклический порядок. Каждой паре ξ, $\zeta\in Z$ ставятся в соответствие подмножества $(\xi, \zeta)\subset Z$, $(\zeta, \xi)\subset Z$ так, что: а) $Z=(\xi, \zeta)\cup(\zeta, \xi)\cup(\xi)\cup(\gamma)$; б) если $\eta\in(\xi, \zeta)$, то $\xi\in(\zeta, \gamma)$ и $\zeta\in(\gamma, \xi)$; в) если $\omega\in(\xi, \zeta)\cap(\gamma, \xi)$, то $\omega\in(\gamma, \zeta)$, где ξ, ζ, γ, ω — произвольные различные элементы из Z. Если ξ_j, $j=1, 2, 3$ — различные элементы из Z, а $\varphi_j(t)=re^{i\theta_j}$, порождающие их пути, не имеющие общих точек для $t'\leqslant t<1$, то $\xi_2\in(\xi_1\xi_3)$, если $\theta_1<\theta_2<\theta_3$. Пусть Z_a — подпространство из Z, представители которого имеют в качестве асимптотического значения число a. Предполагая, что Z_a — полное и сепарабельное метрическое пространство, имеющее циклический порядок, — удовлетворяет некоторому дополнительному условию, автор доказывает теорему:

В круге $|z|<1$ существует мероморфная функция, у которой пространство классов асимптотических путей, соответствующих асимптотическому значению a, изоморфно Z_a относительно топологии и порядка.

Результат остается верным и в случае функций мероморфных в конечной плоскости.
Д. Б. Потягайло

2874. Об a-точках случайной мероморфной функции. Михаил (On the a-values of the random meromorphic function. Mikhail M. N.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 2, 170—180; Indagationes math., 1956, 18, № 2, 170—180 (англ.)

Рассматривается семейство G мероморфных функций

$$g(z, t)=\frac{b(z, t)}{c(z, t)}$$

порядка ρ, где $b(z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n r_{2n}(t)\,z^n$, $c(z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n r_{2n+1}(t)\,z^n$ — целые функции порядков ρ_1 и ρ_2, $r_\nu(t)$, $\nu=1, 2, 3, \ldots$, — функции Радемахера, используемые здесь как случайные функции, $\rho=\max(\rho_1, \rho_2)$. Решается вопрос о числе a-точек случайной функции $g(z, t)\in G$ в круге с центром в точке z и радиуса r. Функция распределения a-точек обозначается через $v(z, r, t, a)$; $m(r, a)$, $m_b(r)$ и $m_c(r)$ суть максимальные члены соответственно рядов $\sum_{n=0}^{\infty}(|b_n|+|a||c_n|)R^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|R^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|R^n$; $N(R)$ (или N) индекс максимального члена первого ряда.

$$m(R, R', a)=(|b_N|+|a||c_N|)R'^N;$$

$$J(R, r, a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{m(|R+re^{iu}|, a)}{m(R, |R+re^{iu}|, a)}\,du,$$

$$D_n(f(z))=z^{n+1}\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{z^n}\right),$$

$$P_{q, h}(f(z))=D_{p_1}D_{p_2}\ldots D_{p_{h-1}}D_{p_{h+1}}\ldots D_{p_q}(zf'(z)),$$

$$P_{qq', hh'}(f(z))=P_{q, h}P_{q', h'}(f(z)).$$

Доказана теорема: Рассмотрим семейство F целых функций

$$f(z, t, a)=b(z, t)-ac(z, t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(r_{2n}(t)\,b_n-ar_{2n+1}(t)\,c_n)\,z^n.$$

Для любого положительного числа ε найдется число $R_0(\varepsilon)$ и для всякого комплексного z с $|z|=R\geqslant R(\varepsilon)$ найдутся последовательности положительных целых чисел $\{p\}: p_1, p_2, \ldots, p_q$ и $\{p'\}: p'_1, p'_2, \ldots, p'_q$, расположенные в возрастающем порядке, такие, что члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|R^n$ с индексами $p_1, p_2, \ldots, p_q$ превосходят $\exp\left(-\frac{1}{2}R^{2\varepsilon}\right)m_b(R)$, а члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|R^n$ с индексами $p'_1, p'_2, \ldots, p'_q$ — $\exp\left(-\frac{1}{2}R^{2\varepsilon}\right)m_c(R)$. При этом последовательности $\{p\}$ и $\{p'\}$ удовлетворяют следующим условиям: они независимы друг от друга и всякое p или p' не превышает k, где $k=2N(R)+R+1$. За исключением некоторого множества функций $x=x(\varepsilon, z)$ семейства F, для всех f из $F-x$

$$\sup_{hh'}|P_{qq', hh'}(f(z, t, a))\geqslant 2\exp\left(-\frac{1}{2}R^{2\varepsilon}\right)m(R, a).$$

Мера исключительного множества x не больше чем $\exp(-R^{\varepsilon})$.

Здесь мера имеет вероятностный смысл: она указывает на величину части «неблагоприятных функций» от всего семейства.

Опираясь на вышеприведенную теорему и на результаты, полученные Литтльвудом и Оффордом (Littlewood J. E., Offord A. C., Ann. Math., 1948, 49, № 4, 885—952) автор выводит верную для всех $g\in G$, за исключением некоторого множества функций, зависящего от ε, b_n и c_n (но не от a), с мерой не выше ε («почти для всех g»), оценку

$$J(R, r, a)-R^{\varepsilon}<v(z, r, t, a)<J(R, r, a)+R^{\varepsilon},$$

причем $|z|=R>R(\varepsilon)$, $r<\frac{1}{2}R$.

Оценка уточняется для различных случаев в зависимости от $|a|$. Дается также более грубая оценка, не зависимая от a.

Примечание референта. Имеются опечатки. В формулировке теоремы в показателях опущен множитель ε. Утверждение автора, что формула (10) статьи (верная для $n=N$) имеет место при всех n, ошибочно.
Ш. И. Стрелиц

2875. Об определении типа римановой поверхности. Вирт (Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Wirth Eva Maria), Comment. math. helv., 1956, 31, № 2, 90—107 (нем.)

Пусть G_ω — кольцо $1\leqslant|\omega|\leqslant R\leqslant\infty$ и $\zeta(x)$ — некоторая кусочно аналитическая кривая в G_ω с началь-

ной точкой ω_0, принадлежащей окружности $|\omega|=1$, асимптотически сближающаяся с внешней граничной окружностью (вырождающейся в точку при $R=\infty$). Проводя разрез по $\zeta(x)$ и отображая конформно с помощью $z=\varphi(\omega)$ полученную односвязную область на полуполосу S_z, $0\leqslant y\leqslant i$, $0\leqslant x<\infty$, с нормировкой $\varphi(\omega_0^+)=0$, $\varphi(\omega_0^-)=i$, приходим к некоторой задаче на склеивание полуполосы с функцией склеивания на граничных полупрямых: $x\leftrightarrow\psi(x)=x+f(x)\cdot\zeta(x)$ является линией склеивания для функций склеивания $\psi(x)$ в отображении $\omega=\varphi^{-1}(z)$.

Рассматривается класс Z линий склеивания обладающих следующим свойством: число дуг $n(\varsigma)$, на которые $\varsigma(x)\in Z$ разбивает окружность $|\omega|=\rho$, равномерно ограничено для всех ρ, $1\leqslant\rho\leqslant R$. Доказывается следующий достаточный критерий гиперболического типа склеивания $x\leftrightarrow\psi(x)$:

Кольцо $1\leqslant|\omega|\leqslant R$ имеет конечный модуль если: 1) линия склеивания $\zeta(x)\in Z$, 2) $f(x)$ монотонно возрастает и, наконец,

$$\int^{\infty}\frac{dx}{1+f^2}<\infty.$$

Используя результат Р. Неванлинны (Ann. Acad. Sci. Fenn. 1952, AI, 122), автор формулирует необходимые и достаточные условия типа склеивания для функций склеивания, удовлетворяющих условиям 1), 2). Примечание референта. Полученные результаты не дают существенного усиления аналогичных критериев Л. И. Волковыского (Матем. сб., 1946, 18 (60), № 2, 185—212). Д. Б. Потягайло

2876. **Теорема Иверсена для нормально исчерпываемых римановых поверхностей.** Андреян Казаку (Teorema lui Iversen pentru suprafee riemanniene normal exhaustibile. Andreian Cazacu Cabiria), Comun. Acad. RPR., 1955, 5, № 8, 1145—1150 (рум.; рез. русск., франц.)

Риманова поверхность $R=(w)_{w=f(p)}^{V}$, где p — точка двухмерного многообразия V и f — внутреннее в смысле Стоилова преобразование V в риманову сферу (w), называется нормально исчерпываемой, если на V можно указать последовательность полиэдральных областей $\{D_n\}$ такую, что 1) $D_n\subset D_{n+1}$, 2) $\bigcup_n D_n=V$, 3) f есть внутреннее преобразование D_n в $f(D_n)$. Указана связь между нормально исчерпываемыми римановыми поверхностями и классом поверхностей (J), которым соответствуют мероморфные функции, обладающие свойством Иверсена (Iversen F., Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse, Helsingfors, 1914; Stoïlow S., Ann. Soc. polon. math., 1952, 25, 69—74). Доказывается, что нормально исчерпываемые римановы поверхности принадлежат к классу (J) над (w) тогда и только тогда, когда граница $f(V)$, т. е. множество исключительных значений $(w)-f(V)$, не содержит ни одного континуума. Это условие может быть сформулировано также в терминах асимптотических значений, поскольку каждая достижимая граничная точка $f(V)$ является асимптотическим значением для внутреннего преобразования $w=f(p)$, и наоборот.

Результаты Стоилова (цит. выше), касающиеся классификации граничных элементов римановой поверхности $R=(R_0)_{w=f(p)}^{V}\subset(J)$, где R_0 — произвольная риманова поверхность, переносятся на случай, когда R нормально исчерпываема. Д. Б. Потягайло

2877. **О нормально исчерпываемых римановых поверхностях.** Казаку (Über die normal ausschöpfbaren Riemannschen Flächen. Cazacu Cabiria Andreian), Math. Nachr., 1956, 15, № 2, 77—86 (нем.)

С помощью соотношения Гурвица доказывается теорема о кругах (der Scheibensatz) для класса нормально исчерпываемых римановых поверхностей (реф. 2876). Теорема является аналогом подобной теоремы Альфорса (Ahlfors L., Acta math., 1935, 65, 157—195; русс. перев. Успехи матем. наук, 1939, 6, 222—250), доказанной для класса регулярно исчерпываемых римановых поверхностей. Пусть R — нормально исчерпываемая риманова поверхность и h — ее максимальное число односвязных, вполне разветвленных областей, не имеющих общих точек. Тогда если: 1) род $R: g=0$, то $h\leqslant 3$; 2) R имеет $g\neq\infty$ и конечное число листов n, то $h\leqslant 4+\frac{4(g-1)}{n}$; 3) R имеет порядок связности $c\neq\infty$, то $h\leqslant 2+\frac{2(c-2)}{n}$. Наконец, если $n=\infty$, то $h\leqslant 4$, соответственно, $h\leqslant 2$ в зависимости от того, имеет ли R конечный род или конечный порядок связности.

В частности, для того чтобы R имела бесконечно много вполне разветвленных областей, необходимо, чтобы $g=\infty$. Приводятся примеры. В остальной части работы исследуется связь, существующая между нормально исчерпываемыми поверхностями и классом A_∞, рассмотренным Л. И. Волковыским (Матем. сб., 1949, 25(67):3, 415—450) в связи с проблемой типа, а также классом поверхностей (J) (Stoïlow S., Ann. Soc. polon. math., 1952, 25, 69—74). Эти результаты были опубликованы (реф. 2876, РЖМат, 1956, 7304). Д. Б. Потягайло

2878. **К синтезу электрических цепей, содержащих два вида элементов.** Эфферц (On the synthesis of networks containing two kinds of elements. Effertz F. H.), Proc. Sympos. Mod. Network Synthesis, 5, New York, 1955. Brooklyn, 1956, 145—173 (англ.)

Рассматриваются применения некоторых классов аналитических функций, для характеризования электрических цепей. Среди этих классов основное значение имеют так называемые функции класса Бруна (Brune O.) $Z(p)$, удовлетворяющие условиям: $Z(p)$ аналитична при $\mathrm{Re}\,p>0$ и $\mathrm{Re}\,Z(p)>0$ при $\mathrm{Re}\,p>0$. Такая функция называется сингулярной при дополнительном условии $\mathrm{Re}\,Z(p)=0$ при $\mathrm{Re}\,p=0$. Остальные рассмотренные классы функций получаются из функций класса Бруна посредством дробно линейного преобразования независимой или зависимой переменных на единичный круг.

Изложенный в статье материал является сводкой содержания работ других авторов, дополненной оригинальными результатами автора статьи.

Приводятся следующие основные результаты:

1. Необходимые и достаточные условия для принадлежности рациональной дроби классу Бруна, представленные посредством неравенств для некоторых определителей. Указывается практическое значение этого признака.

2. Представление сингулярной функции класса Бруна в виде рациональной дроби частного вида. При дополнительном условии действительности $Z(p)$ при действительном p отсюда получается представление, эквивалентное известной формуле Фостера (Foster R. M., Bell. System Techn. J., 1924, 3, 259—267), которая выражает разложение на простейшие дроби комплексного сопротивления цепи, содержащей лишь L и C, т. е. разложение реактансной функции.

3. Необходимые и достаточные условия для принадлежности функции $f(p)$ следующему классу: $f(p)$ аналитична при $|p|<1$, и $|f(p)|\leqslant 1$ при $|p|<1$. Эти

условия представлены: а) посредством алгоритма Шура, б) в виде требования неотрицательности некоторой бесконечной формы Эрмита.

4. Условия для рациональной дроби с действительными коэффициентами как функции класса Бруна, реализуемой в качестве комплексного сопротивления (импеданса) цепи, если цепь содержит элементы R, L и C. По виду эти условия аналогичны изложенным в п. 1.

5. Представление сингулярной функции класса Бруна посредством полинома Гурвица. При дополнительном условии действительности $Z(p)$ при действительном p отсюда получается известная теорема Кауэра (Cauer W., Elektr. Nachrichtentechnik, 1939, 16, 96 — 120) о связи между реактансными функциями и полиномами Гурвица.

6. Представления посредством полиномов Гурвица комплексных сопротивлений $Z(p)$ цепей, содержащих лишь два вида элементов (L и C, L и R или R и C). В частности, необходимым и достаточным для цепи, содержащей лишь L и C, является возможность представления вида

$$Z(p)=\frac{g(p^2)}{pu(p^2)} \text{ или } Z(p)=\frac{pu(p^2)}{g(p^2)},$$

где
$$g(p^2)=\frac{1}{2}[h(p)+h(-p)] \text{ и}$$

$$u(p^2)=\frac{1}{2p}[h(p)-h(-p)],$$

а $h(p)$ означает полином Гурвица. Указываются обобщения, имеющиеся у Реза (Reza F. M., Proc. IRE, 1955, 43, 365), которые опираются на свойство: если $f(p)$ является полиномом Гурвица, то $d^nf(p)/dp^n$ — тоже полином Гурвица.

7. Два приема построения по данному полиному Гурвица конечных последовательностей полиномов Гурвица и соответствующие полиномам этих последовательностей реактансные цепи, которые получаются из первоначальной цепи посредством постепенного удаления элементов.

Приводятся численные примеры. Библ. 39 назв.

Н. А. Бразма

2879. Замечание о дзэта-функции Лерха. Оберхеттингер (Note on the Lerch zeta function. Oberhettinger F.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 117—120 (англ.)

Вывод функциональных уравнений для римановой дзэта-функции и ряда Гурвица формальным применением формулы суммирования Пуассона некорректен, так как он использует приравнивание двух бесконечных рядов, области сходимости которых не пересекаются. Показывается, что эта трудность не возникает, если рассматривать более общую дзэта-функцию Лерха

$$\Phi(z, s, w)=\sum_{m=0}^{\infty} z^m (v+m)^{-s}, \quad |z|<1, \ v\neq 0, 1, 2, \ldots,$$

для которой формула Пуассона дает формулу преобразования Лерха:

$$\Phi(e^{-\alpha}, s, v)-\Gamma(1-s)\,e^{v\alpha}\alpha^{s-1}=$$

$$=-i(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\,e^{v\alpha}\left[e^{i(2\pi v+{}^1/_2\pi s)}\Phi\left(e^{i2\pi v}, 1-s, 1+\frac{\alpha}{2\pi i}\right)-e^{-i(2\pi v+{}^1/_2\pi s)}\Phi\left(e^{-i2\pi v}, 1-s, 1-\frac{\alpha}{2\pi i}\right)\right].$$

Из этой формулы в пределе при $\alpha\to 0$ находим соотношение

$$\zeta(s, v)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}\sin\left(2\pi nv+\frac{1}{2}\pi s\right), \quad 0<v\leqslant 1, \ \operatorname{Re} s<0.$$

В. И. Левин

2880. Теория эллиптических функций. Гонсалес (Teoria de las funciones elipticas. González Mario O.), Rev. Soc. cubana cienc. fís. y mat., 1954, 3, № 3, 67—75; 1955, 3, № 4, 109—118; 1956, 3, № 5, 149—157 (исп.)

2881. Об одном обобщении двоякопериодических функций. Мак (Über eine Verallgemeinerung der doppeltperiodischen Funktionen. Maak Wilhelm), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1957, 21, № 1—2, 104—108 (нем.)

Рассматривается эллиптическая функция $\varphi(u)$ с группой трансляций T

$$tu=u+m_1\omega_1+m_2\omega_2.$$

Пусть U — произвольное открытое множество внутри параллелограмма периодов, содержащее точку 0 и не разлагающее параллелограмм на компоненты. Из плоскости комплексной переменной удаляется множество U вместе с его трансляциями. Остается область B, которую трансляции tu преобразуют в себя. Вводится «норма» для ограниченных в B аналитических функций $f(u)$ $\|f\|=\sup_{u\in B}|f(u)|$. Эти функции образуют линейное пространство $\mathfrak{B}$. Функция $f(u)\in\mathfrak{B}$ называется почти двоякопериодической (п. д. п.), если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое конечное покрытие множества T

$$T=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n,$$

что для всякого $i=1, 2, \ldots, n$ и любых t и t' из A_i норма

$$\|tf-t'f\|<\varepsilon.$$

Функции п. д. п. образуют в $\mathfrak{B}$ замкнутое инвариантное пространство $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$. Некоторая часть пространства $\mathfrak{A}$ порождается функцией $f_\nu(u)$, для которой

$$tf_\nu(u)=f_\nu(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2)=e^{i(\alpha_1m_1+\alpha_2m_2)}f_\nu(u), \qquad (1)$$

где α_1 и α_2 — действительные числа.

Строится при помощи функции ϑ_1 функция $\varphi_\nu(u)$, обладающая свойством (1), с теми же α_1 и α_2. Тогда

$$p_\nu(u)=\frac{f_\nu(u)}{\varphi_\nu(u)}$$

инвариантно относительно $t\in T$, и, следовательно, двоякопериодическая регулярная функция с полюсами 1-го порядка (нулями функции $\varphi_\nu(u)$).

Отсюда

$$f_\nu(u)=p_\nu(u)\,\varphi_\nu(u)$$

— п. д. п. функция.

В конце статьи ставится ряд проблем, в частности проблема представимости п. д. п. функций рядами Фурье.

Статья опирается на результаты предшествующей работы автора (Math. Ann., 1950, 122, 157—166).

П. А. Безсонов

2882. К теории аналитических многообразий в пространстве n комплексных переменных. Продолжение аналитических множеств с границы области во-

внутрь. **Ротштейн** (Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen. Die Fortsetzung analytischer Mengen vom Rande eines Gebietes her ins Innere. Rothstein Wolfgang), Math. Ann., 1957, **133**, № 3, 271—280 (нем.)

Продолжается изучение проблемы продолжения аналитического множества $\mathfrak{g}^k$ с границы области пространства C^n ($n \geqslant 3$) во внутрь этой области и получается обобщение ранее полученных результатов (РЖМат, 1956, 5818). Методом исследования является построение аналогий, соответствующих теоремам продолжения функций n комплексных переменных.

Доказываются две следующие основные теоремы: Пусть $(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q;\ p+q=n)$ — координаты, Z' — любая область z-пространства и Z — цилиндрическая область $Z=(z \in Z';\ w$ — произвольный). $G_0 \subset G$ — ограниченная область C^n.

Теорема существования: Пусть 1) G — r-выпукла, 2) $\mathfrak{g}^k$ — аналитическое и неприводимое в $Z \cap (G - G_0)$ множество, проходящее достаточно близко к границе G; 3) $k+r \geqslant n+p$; 4) $Z \cap G$ связно; 5) $Z' - (Z' \cap G'_{0z})$ не пусто (G'_{0z} — z-проекция G_0). Тогда: а) существует только одно аналитическое неприводимое в $Z \cap G$ множество $\mathfrak{g}^k_*$, содержащее $\mathfrak{g}^k$; б) в соответствующей окрестности границы G $\mathfrak{g}^k_* = \mathfrak{g}^k$.

Теорема тождественности: Пусть 1) $\mathfrak{g}^k_1$ и $\mathfrak{g}^k_2$ — аналитические в $Z \cap G$, 2) $\mathfrak{g}^k_1 = \mathfrak{g}^k_2$ в $Z \cap (G - G_0)$, 3) $k \geqslant p$, 4) и 5) как в теореме существования.

Тогда $\mathfrak{g}^k_1 = \mathfrak{g}^k_2$ в $Z \cap G$. А. В. Лебедев

2883. Гармонические функции с двумя особыми точками. Ямасуга (Harmonic functions with two singular points. Yamasuge Hirosi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1957, A8, № 1, 39—42 (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое ориентируемое аналитическое риманово многообразие с положительно определенной метрикой $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, где $g_{ik} = g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)$ — голоморфные функции координат $x^1, \ldots, x^n$. Доказывается, что, каковы бы ни были две точки ξ_1, ξ_2 внутри достаточно малой геодезической сферы G, существует функция $\varphi(P)$, гармоническая всюду на $\mathfrak{M}$ (потенциал), за исключением полюсов ξ_1, ξ_2, в которых расположены сосредоточенные массы противоположного знака.

Критическая точка (т. е. точка, где все производные $\partial\varphi\ \partial x^i = 0$) называется невырожденной, если в ней $|\partial^2\varphi/\partial x^i \partial x^k| \neq 0$. Пусть $\varphi(P)$ — гармоническая функция с двумя полюсами указанного выше типа. Доказывается, что если при $n=2$ все критические точки φ невырожденные, то число их равно удвоенному роду $\mathfrak{M}$. Если же $n=3$ и все критические точки невырожденные, то число g этих точек четно. Пусть в E^3 построены две замкнутые области, ограниченные поверхностью рода g 2. Эти области гомеоморфны, и многообразие $\mathfrak{M}$ возникает в результате идентификации гомеоморфных границ. В статье имеются опечатки (например, в формулировке теоремы § 1). Е. Д. Соломенцев

2884. Принцип Кельвина и некоторые неравенства в теории функций. III. Кубо (Kelvin principe and some inequalities in the theory of functions. III. Kubo Tadao), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, A29, 119—129 (англ.)

Эта работа является продолжением более ранних работ автора (см. РЖМат, 1957, 6314, 6997), в которых путем применения принципа Кельвина получены различные неравенства, позволяющие вывести заключения о свойствах гармонических функций с равной нулю нормальной производной на некоторых из граничных компонент данной области.

В реферируемой работе устанавливается ряд неравенств того же рода, на основании которых могут быть получены результаты, относящиеся к гармоническим функциям, являющимся решениями смешанной граничной задачи. При помощи использования свойств интеграла Дирихле доказываются теоремы, аналогичные теоремам, полученным в предыдущих работах автора. Как приложения этих теорем, приводятся утверждения, характеризующие функцию Грина для смешанной граничной задачи, а также конформные отображения односвязной области на круг с радиальным разрезом и двухсвязной области на круговое кольцо с радиальным разрезом. Г. В. Кузьмина

2885. Принцип максимума для гармонических функций на римановых многообразиях. Ямасуга (Maximum principle for harmonic functions in Riemannian manifolds. Yamasuge Hirosi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1957, A8, № 1, 35—38. (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — n-мерное аналитическое риманово многообразие с положительно определенной метрикой $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, где $g_{ik} = g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)$ — голоморфные функции координат $x^1, \ldots, x^n$. Лапласиан Δ на римановом многообразии задается операторным равенством $\Delta = d\delta + \delta d$. Функция $u(P)$, удовлетворяющая уравнению $\Delta u = 0$ в области G (граница BG предполагается регулярной), называется гармонической в G (подробнее см., например, де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, М., Изд-во ин. лит., 1956). В основном содержание реферируемой работы составляет доказательство следующей теоремы:

Пусть гармоническая в области G функция u отлична от постоянной и непрерывна в замкнутой области $\bar{G} = G \cup BG$. Тогда максимум и минимум u на $\bar{G}$ достигаются в точках BG.

В процессе доказательства выводятся аналоги формул Грина для функций, определенных на многообразии. Имеются несущественные опечатки.

Е. Д. Соломенцев

2886. Теория общих трехмерных комплексных функций. II. Нисигаки, Такасу (General three-dimensional complex function theory. II. Nisigaki Hisami, Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1956, 4, № 2, 147—226 (англ.)

Непосредственное продолжение первой части этой работы (РЖМат, 1957, 5522; 1955, 5761). Гиперкомплексная функция

$$w = f(\zeta) = u_1(x_1, x_2, x_3) + E_2 u_2(x_1, x_2, x_3) + E_3 u_3(x_1, x_2, x_3)$$

($1, E_2, E_3$ — базис ассоциативной и коммутативной алгебры над полем действительных чисел; $\zeta = x_1 + E_2 x_2 + E_3 x_3$) называется дифференцируемой в данной точке, если в этой точке существует предел отношения $\Delta w : \Delta\zeta$ при $|\Delta\zeta| \to 0$, который находится при любом постоянном направлении $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$ (возможном для дроби $\Delta w : \Delta\zeta$) и не зависит от этого направления (авторы предполагают, при нахождении указанного предела, дифференцируемость функций u_1, u_2, u_3 от (x_1, x_2, x_3) в рассматриваемой точке и возможность деления Δw на $\Delta\zeta$. *Реф.*).

Указанный предел для дифференцируемой функции $f(\zeta)$ обозначается $f'(\zeta) \equiv \frac{df}{d\zeta}$, причем полагается

$$\|f'(\zeta)\|^3 = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

(согласно определению нормы гиперкомплексного числа в первой части этой работы. *Реф.*).

Основные результаты: 1) Для дифференцируемости $f(\zeta)$ в данной точке достаточно, чтобы в этой точке функции u_1, u_2, u_3 были дифференцируемыми и имела место следующая «обобщенная система Коши—Римана»:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = (-\alpha\mu + \beta\lambda - \beta\delta + \mu^2)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + (\beta\gamma - \lambda\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = (-\delta\lambda + \gamma\mu - \gamma\alpha + \lambda^2)\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + (\beta\gamma - \lambda\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right]; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \beta\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial u_3}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial u_3}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \delta\frac{\partial u_3}{\partial x_1}.$$

Здесь α, β, γ, λ, μ, δ — такие действительные постоянные, что

$$E_2^2 = \alpha E_2 + \beta E_3 + M; \quad E_3^2 = \gamma E_2 + \delta E_3 + L;$$

$$E_2 \cdot E_3 = \lambda E_2 + \mu E_3 + (\beta\gamma - \lambda\mu);$$

$$(M = \mu^2 - \alpha\mu + \beta\lambda - \beta\delta;\ L = \lambda^2 - \delta\lambda + \gamma\mu - \gamma\alpha).$$

2) Для всякой дифференцируемой $f(\zeta)$ имеем систему (1). 3) Если в области G (внутренности параллелепипеда) имеем: а) $f(\zeta)$ — непрерывная; б) все производные числа от u_1, u_2, u_3 по x_1, x_2, x_3 — конечные всюду; в) почти всюду выполняется система (1), тогда для всякой простой спрямляемой замкнутой кривой C в области G получим:

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

4) Если $f(\zeta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$, то в области сходимости этого ряда $f(\zeta)$ имеет производные по ζ всех порядков, причем

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

5) Доказываются некоторые аналоги известных теорем о производной сложной функции, о существовании и о производной неявной функции и теорем о среднем. Изучаются некоторые свойства точечных преобразований с помощью дифференцируемой $f(\zeta)$.

Примечание референта. Авторы совсем не исследуют вопроса о неограниченной дифференцируемости всякой дифференцируемой $f(\zeta)$ в данной области, об аналогах формулы Коши и теоремы Морера. Нет ссылок на аналогичные работы других авторов. В. С. Федоров

2887. Очерк теории псевдоаналитических функций. Берс (An outline of the theory of pseudoanalytic functions. Bers L.), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, 62, № 4, 291—331 (англ.)

Статья посвящена обзору теории псевдоаналитических функций и их некоторых приложений. Главное внимание уделяется тому направлению в теории псевдоаналитических функций, которое за последние годы развито Л. Берсом. В первой части статьи дается аксиоматическое определение класса псевдоаналитических функций и приводятся их основные свойства. Пусть (F, G) пара непрерывных функций определенных в области D комплексной плоскости. Предполагается, что $\operatorname{Im}(\bar{F}G) > 0$. Класс $A_D(F, G)$ псевдоаналитических функций в D определяется как максимальный класс функций $w(z)$, $z \in D$, удовлетворяющий условиям: 1) $A_D(F, G)$ есть действительное векторное пространство, 2) если $w \in A_D(F, G)$ и $w(z_0) = 0$, $z_0 \in D$, то $\frac{w(z)}{z - z_0}$ непрерывна в $z = z_0$, 3) F, $G \in A_D(F, G)$. Пара (F, G) называется порождающей парой класса $A_D(F, G)$. Каждое $w(z) \in A_D(F, G)$ допускает единственное представление в виде $w(z) = \Phi(z)F(z) + \psi(z)G(z)$, Φ и ψ действительны. Функция $\omega = \Phi + i\psi$ называется псевдоаналитической функцией второго рода. Отображение $\omega = \omega(z)$ квазиконформно. Геометрические свойства функций класса $A_D(F, G)$ предлагается изучать посредством соответствующих псевдоаналитических функций второго рода. В классе $A_D(F, G)$ определяется понятие (F, G) дифференцирования и интегрирования, в связи с чем вводится понятие предшествующей (F_{-1}, G_{-1}) и последующей пары (F_1, G_1) для пары (F, G). $w(z) \in A_D(F, G)$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ обладает (F, G) производной в каждой точке $z \in D$. Во всем дальнейшем предполагается, что F и G непрерывны по Гёльдеру. Тогда (F, G) — производная функция $w \in A_D(F, G)$ оказывается также непрерывной по Гёльдеру и принадлежащей классу $A_D(F_1, G_1)$. Каждая функция $w \in A_D(F, G)$ является (F_1, G_1) производной функции класса $A_D(F_{-1}, G_{-1})$. Таким образом, любая порождающая пара может быть включена в обе стороны бесконечной последовательности предшествующих и последующих пар. Каждая псевдоаналитическая функция (первого рода) допускает бесконечную последовательность обобщенных производных и интегралов, которые все являются псевдоаналитическими функциями первого рода (относительно разных порождающих пар). Если $F = 1$ и $G = i$, то класс $A_D(1, i)$ есть класс аналитических комплексных функций с обычными операциями дифференцирования и интегрирования. Для класса $A_D(F, G)$ получены теоремы о локальном поведении в окрестности нуля, полюса и т. п.

Во второй части приводится разложение в ряд Тейлора функций класса $A_D(F, G)$, построение локальных и глобальных аналогов степеней в этом классе, интегральные формулы Коши, а также основные факты из теории псевдоаналитических функций на римановых поверхностях. Теория, предложенная в этой статье, более общая, чем теория, предложенная автором раньше, когда предполагалось, что F и G дифференцируемы. В частности, в рассматриваемом случае не имеет уже места так называемый принцип подобия. В том важнейшем случае, когда F и G обладают обобщенными первыми производными в D (по Соболеву), суммируемыми со степенью $p > 2$, что, вообще говоря, больше, чем одно условие Гёльдера, то теория класса $A_D(F, G)$ совпадает с теорией обобщенных аналитических функций, развитой за последние годы в ряде работ И. Н. Векуа. В частности, функции класса $A_D(F, G)$ являются решениями комплексного уравнения $\partial w/\partial\bar{z} = Aw + B\bar{w}$, $A = A(t)$, $B = B(t)$, $A, B \in L_p(D)$, $p > 2$.

В третьей части изучаются свойства класса $A_D(F, G)$ в предположении непрерывной дифференцируемости, порождающей пары (F, G). В четвертой части работы рассматриваются некоторые приложения теории

псевдоаналитических (обобщенных аналитических) функций к уравнению второго порядка, а также к общей эллиптической системе первого порядка на плоскости. Указываются также обобщения формализма «степени» и теорем о разложении в ряды на некоторые специальные классы уравнений смешанного типа. В конце приведены результаты исследований автора и Л. Ниренберга по уравнениям с разрывными коэффициентами, а также обзор некоторых исследований по системам $2m$ уравнений, $m>1$, на плоскости. Формулируется также результат о единственности для уравнений эллиптического типа в пространстве n измерений, $n>2$. Библ. 91 назв.

Б. Боярский

2888 К. **Асимптотические оценки и целые функции.** Евграфов М. А., Гостехиздат, 1957, 158 стр., 3 р. 90 к.

Излагаются основные сведения из теории целых функций и некоторые приложения этой теории к получению асимптотических оценок в ряде задач.

В гл. 1 рассматриваются наиболее распространенные методы получения асимптотических оценок (формула суммирования Эйлера—Маклорена, метод Лапласа, метод перевала, метод производящих функций) и устанавливаются некоторые относящиеся сюда результаты. Здесь же вводится понятие асимптотического ряда.

В гл. 2, посвященной целым функциям, основное внимание уделяется изучению связи между ростом целой функции, распределением ее нулей и скоростью убывания последовательности коэффициентов ряда Тейлора, а также принципу Фрагмена—Линделёфа и свойствам индикатрисы роста.

Гл. 3 содержит исследование асимптотических оценок для некоторых целых функций, выражающихся в виде специальных интегралов $\left(\text{типа } \int_0^\infty \mu(t)\, e^{zt}\, dt,\ \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)\, e^{zt}\, dt\right)$, бесконечных сумм $\left(\text{типа } \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, z^n\right)$ или произведений $\left(\text{типа } \prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{z}{\mu(n)}\right]\right)$, а также для функций вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{z+\mu(n)}$.

В первом случае основная роль принадлежит методу перевала, во втором — формуле суммирования Пуассона и в третьем — методу, связанному с формулой Эйлера—Маклорена.

На примерах автор иллюстрирует применение полученных оценок к исследованию асимптотического закона распределения нулей целых функций указанного типа.

А. Ф. Тиман

2889. К. **Теория аналитических функций.** Лея (Teoria funkcji analitycznych. Leja Franciszek. Warszawa, PWN, 1957, 560 s., il., 37 zł), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 32, 450 (польск.)

2890 Д. **Граничные свойства функций, регулярных в полосе.** Бонами А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

См. также: 2692, 2693, 2694, 2695, 2804, 2884, 2887, 2897, 2994, 3065

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2891. **Дополнения к исследованиям Камке. Заметка** V. Митринович (Compléments au traité de Kamke. Note V. Mitrinovitch D. S.), Publ. Elektrotechn. fak. Univ. Beogradu. Mat. i fiz., 1957, № 11, 10 p.) (франц.; рез. сербо-хорв.)

См. РЖМат, 1957, 7852, 7853, 7854, 7855. Указываются некоторые случаи интегрируемости в квадратурах и специальных функциях дифференциального уравнения

$$d^{n+k}y/dx^{n+k} - f(x)\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu x^{n-\nu} d^{n-\nu}y/dx^{n-\nu} = 0,$$

где n и k — натуральные числа и A_ν — постоянные. Цель автора — пополнить соответствующий материал, имеющийся у Камке (Kamke E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I, Leipzig 1942).

Б. П. Демидович

2892. **Некоторые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.** Селл (Some methods of solution for ordinary differential equations. Cell John W.), Pi Mu Epsilon J., 1954, **2**, № 1, 11—20 (англ.)

Учебное пособие. Рассматриваются различные известные методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

М. И. Серов

2893. **Об одном неопределенном дифференциальном уравнении в теории упругости.** Бандич (Sur une équation différentielle indéterminée dans la théorie de l'Élasticité. Banditch Ivan), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 16, 2130—2133 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{F''}{F} - \left(\frac{f'''}{f''} + \frac{f'}{f}\right)\frac{F'}{F} + n^2\frac{f''}{f} = 0, \qquad (1)$$

где n — натуральное число, F и f — неизвестные функции переменного x. Используя понятие относительных производных в смысле Петровича

$$\Delta_n(u) = u^{(n)}/u,$$

автор получает явные выражения неизвестных функций f и F через произвольную функцию ω и константы

$$f = \sqrt{c_1}\,\omega\theta,$$

$$F = c_2\omega^2\theta^{1-n^2}\theta',$$

где для сокращения записи положено

$$\theta \equiv \exp\int\left[\frac{\Delta_2(\omega)}{\Delta - n^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Митриновичем (С. r., 1951, 232, 691) ранее было найдено решение уравнения (1) только в квадратурах.

И. П. Макаров

2894. **Об интегрировании дифференциального уравнения** $yy'' + f(x)y^2 = \varphi(x)$. Леко (Über die Integration der Differentialgleichung $yy'' + f(x)y^2 = \varphi(x)$. Leko Toma), Glasnik mat.-fis. i astron., 1955, **10**, № 3, 171 — 174 (нем.; рез. хорв.)

Доказывается, что уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} + q(t)\frac{dz}{dt} + q'(t)z - 1/z = 0 \qquad (1)$$

интегрируется в квадратурах. Уравнение $yy'' + f(x)y^2 = \varphi(x)$ можно свести к уравнению (1). Достаточным условием для этого является выполнение тождества $2\varphi\varphi'' = 4\varphi^2 f + 3\varphi'^2$. М. И. Серов

2895. **О решении одного дифференциального уравнения 2-го порядка. Дьиреш** (Egy másodrendü differenciálegyenlet megoldásáról. Gyires Béla), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, 2, 125—133 (венг.; рез. русск., нем.)

Автор представляет решение уравнения $y'' + ay' + by = cy^2$ $(x \geqslant 0;\ a > 0;\ b > 0,\ c > 0,\ a^2 < 4b)$ в виде ряда $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{n\lambda_1 x}$, где $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + i\sqrt{4b - a^2})$. Доказывается, что если $|z_1| < b/c$, то упомянутое решение является вещественной и бесконечно раз дифференцируемой функцией для $x \geqslant 0$, равной постоянной тогда и только тогда, когда $z_1 = 0$.

J. Bognár

2896. **Применение метода малых возмущений к решению волнового уравнения, преобразованного к эллиптическим координатам. Арскотт** (Perturbation solutions of the ellipsoidal wave equation. Arscott F. M.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 27, 161—174 (англ.)

Рассмотрение волнового уравнения, преобразованного к эллиптическим координатам, приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению вида:

$$d^2w/dz^2 = (a + bk^2\,\mathrm{sn}^2 z + qk^4\,\mathrm{sn}^4 z)\,w, \qquad (1)$$

где k — модуль эллиптических функций Якоби, q — определенное число, а постоянные a, b выбираются таким образом, чтобы (1) обладало однозначным двоякопериодическим решением с периодами $2K$, или $4K$, $2iK'$ или $4iK'$.

Строится формальное решение уравнения (1). При $q = 0$ это уравнение представляет собой уравнение Ламе, однозначное решение которого должно иметь вид: $w_0(z) = \mathrm{sn}^r z\,\mathrm{cn}^s z\,\mathrm{dn}^t z\,F(\mathrm{sn}^2 z)$, где r, s, t могут принимать значения 0 или 1, а $F(u)$ — произвольный полином от u. Решение $w(z)$ и параметры a, b уравнения (1) представляются в виде рядов

$$w(z) = w_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} q^k f_k(z),\quad a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k,$$

$$b = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k q^k$$

с неопределенными коэффициентами $f_k(z)$, c_k, d_k, которые определяются приравниванием членов при одинаковых степенях q. Свободные члены $w_0(z)$, a_0, b_0 являются соответственно решением и параметрами уравнения Ламе. Приведена таблица результатов, полученных для простейших видов функции $w_0(z)$, т. е. для таких, при которых $F(u) \equiv 1$, причем в случае $r = s = t = 0$ вычисления произведены с точностью до величины $O(q^2)$, а при других значениях r, s, t с точностью до величины $O(q)$. Рассмотрен также один из случаев, когда $F(u)$ — полином второй степени.

Приведены соотношения, полученные из других соображений, позволяющие легко проверять правильность выражений, получаемых для a и b. Вопрос о сходимости рядов автором не затрагивается.

Г. Л. Мизернюк

2897. **Об одной бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений. Протасов В. И.**, Докл. АН СССР, 1955, 105, № 2, 218—221

Дается алгоритм построения явного решения бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следующих видов:

$$y_j'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j+n} y_n(x)\quad (j = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

и

$$y_j'(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_{n+j} y_n(x) \qquad (2)$$

$$(j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

при начальных условиях $y_n(0) = c_n$ в предположении, что коэффициенты a_j определяют для этих систем функции

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

целые или аналитические, соответственно в круге $|z| < R$ или в кольце $r < |z| < R$, и устанавливается зависимость решений от роста начальных условий, а также свойства этих решений в зависимости от свойств функции $f(z)$ или $g(z)$ следующими теоремами:

Теорема 1. Если $e^{xf(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m a_m(x)$, $F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| z^m$, $e^{xF(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x) z^m$ и ряды $\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x)|c_{m+j}|$ сходятся для всех $j = 0, 1, 2, \ldots$ и любого $x = r < R$, то функции $y_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) c_{j+m}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ определят решение системы (1).

Теорема 2. Если $f(z)$ есть полином степени s со старшим коэффициентом a_s, то при начальных условиях c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$(R|a_s| e \cdot s)^{1/s} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{|c_n|}}{n^{1/s}} \leqslant 1,$$

система (1) имеет решение, аналитическое в круге $|x| < R$.

Теорема 3. Если $f(z)$ есть полином степени s и для начальных условий выполнено соотношение

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|c_n|}}{n^{(1-\varepsilon)/s}} < \infty,\ \text{где } \varepsilon > 0,$$

то решение системы (1) — аналитическое на всей плоскости. Эта теорема, как частный случай, содержит в себе результат Л. И. Камынина (РЖМат, 1954, 3999).

Теорема 4. Если при всех достаточно больших $|z|$ справедлива оценка $|f(z)| < e^{\sigma|z|^\rho}$, то при начальных условиях, удовлетворяющих соотношению

$$(e^{1/\sigma})^{1/\rho} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{|c_n|}}{(\ln n)^{1/\rho}} < 1,$$

решение системы (1) аналитическое на всей плоскости.

Теорема 5. Если функция $f(z)$ регулярна в круге радиуса R, то при начальных условиях, удовлетворяющих неравенству

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|c_n|}}{R} < 1,$$

решение системы (1) существует среди целых функций.

В работе имеются опечатки, например индекс коэффициентов системы (2) должен быть $n+j$ и решение примера к теореме 2 должно быть

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{n!} \frac{x^n}{R^{n+j}} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

М. Я. Ятаев

2898. **Универсальное значение контактных преобразований.** Аржаных И. С., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 167—172

Рассматривается система уравнений в дифференциалах

$$\sum_{\lambda=1}^{m+s} X_{\lambda\mu}(x_1, \ldots, x_{m+s})\, dx_\lambda = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

и устанавливается, что ее можно всегда привести к следующей форме:

$$dq_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial H_\sigma}{\partial p_\nu} + \sum_{i=1}^{r_\sigma} F_{i_\sigma} \frac{\partial H_{i_\sigma}}{\partial p_\nu} \right) dt_\sigma;$$

$$-dp_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{r_\sigma} F_{i_\sigma} \frac{\partial H_{i_\sigma}}{\partial q_\nu} \right) dt_\sigma$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Система, написанная в этой форме, оказывается инвариантной при контактных преобразованиях.

В. В. Немыцкий

2899. **Обратная задача для систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр.** Бродский М. С. Докл. АН СССР, 1957, 112, № 5, 800—803

Пусть $W(x, \lambda)$ $(W(0, \lambda) = I)$ — фундаментальная матрица системы

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{i}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)\, y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ 0 \leqslant x \leqslant e).$$

Теоретико-операторным методом доказаны следующие теоремы, дающие некоторые достаточные условия, при которых коэффициенты нормированной системы $b_{ij}(x)$ восстанавливаются однозначно по матрице $W(\lambda) = W(l, \lambda)$.

(Система называется нормированной, если след $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}(x) = 1$).

Теорема. Пусть на сегменте $[0, 1]$ заданы две нормированные системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{i}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(1)}(x)\, y_j, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{i}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(2)}(x)\, y_j,$$

у которых матрицы коэффициентов $b^{(1)}(x) = \left\| b_{ij}^{(1)}(x) \right\|$ и $b^{(2)}(x) = \left\| b_{ij}^{(2)}(x) \right\|$ эрмитово неотрицательны, причем функции $b_{ij}^{(1)}(x)$ обладают абсолютно непрерывными производными первого порядка и ранг матрицы $b^{(1)}(x)$ равен единице при каждом $x \in [0, 1]$. Через $W^{(1)}(x, \lambda)$ и $W^{(2)}(x, \lambda)$ обозначим фундаментальные матрицы решений этих систем. Если $W^{(1)}(l, \lambda) \equiv W^{(2)}(l, \lambda)$, то $b_{ij}^{(1)}(x) \equiv b_{ij}^{(2)}(x)$.

Теорема. Пусть на сегменте $[0, 1]$ заданы нормированные системы дифференциальных уравнений, где $b^{(2)}(x)$ — эрмитово неотрицательная матрица с суммируемыми элементами, а матрица $b^{(1)}(x) = \xi^*(x) = \xi(x)$, $\xi(x) = \|\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\|$, причем вектор $\xi(x)$ сохраняет на каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ некоторого разбиения $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = l$ постоянное значение $\xi^{(i)}$. Если среди векторов $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(p)}$ нет двух соседних взаимно ортогональных и $W^{(1)}(l, \lambda) \equiv W^{(2)}(l, \lambda)$, то $b^{(1)}(x) = b^{(2)}(x)$. З. И. Биглов

2900. **Некоторые случаи интегрирования в квадратурах уравнения** $y = x\varphi(y') + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, \varphi_i(y')$. Лупан Ю. А., Сб. студ. научн. работ Киевск. политехн. н-та, Киев, 1955, 3—12

Устанавливается вид функций $\lambda_i(x)$ и $\varphi_i(y')$, при котором в результате предварительного дифференцирования удается получить уравнение с разделяющимися переменными. В. В. Немыцкий

2901. **О неединственности решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.** Бихари (Elsörendü közönséges differenciálegyenletek megoldásának többértelmüségéről. Bihari Imre), Mat. lapok, 1957, 8, № 1—2, 115—119 (венг.; рез. англ., русск.)

Дано достаточное условие для того, чтобы через точку (0, 0) проходило более одного решения уравнения $y' = f(x, y)$. Этот же результат был ранее получен референтом (Докл. АН СССР, 1948, 60, № 4, 549—552, теорема II б). А. Ф. Филиппов

2902. **Интегральные кривые однородной системы.** Сансоне, Конти (Curve caratteristiche di sistemi omogenei.e Sansone Giovanni, Conti Roberto), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 243—260 (итал.)

Рассматривается система

$$\dot{x} = X_m(x, y), \quad \dot{y} = Y_m(x, y), \qquad (1)$$

где X_m, Y_m — достаточно гладкие однородные функции порядка $m \geqslant 1$ такие, что $O(x = 0, y = 0)$ — единственная точка, в которой $X_m = Y_m = 0$. Исследуется качественная картина поведения в целом интегральных кривых системы (1), которая в полярных координатах имеет вид

$$\dot{\rho} = \rho^m Z(\vartheta), \quad \dot{\vartheta} = \rho^{m-1} N(\vartheta). \qquad (2)$$

В зависимости от того, имеем ли мы: 1) $N(\vartheta) \equiv 0$, 2) $N(\vartheta) = 0$ при некоторых значениях ϑ_0 переменной ϑ, но $Z(\vartheta_0) \equiv 0$ или 3) $N(\vartheta) \neq 0$ ни при каких ϑ, мы получаем критический узел, изолированные особые направления или отсутствие таких направлений, т. е. случай центра $\left(\text{если } \int_0^{2\pi} \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}\, d\alpha = 0\right)$ или фокуса $\left(\text{если } \int_0^{2\pi} \frac{Z(\alpha)}{N(\alpha)}\, d\alpha \neq 0\right)$.

При наличии изолированного особого направления l: $\vartheta = \vartheta_0$ существует нормальная область $D(\vartheta_0)$, содержащая l, такая, что в ней

$$Z(\vartheta) = Z(\vartheta_0)\,[1 + \varepsilon_1(\vartheta - \vartheta_0)],$$

$$N(\vartheta) = N^{(k)}(\vartheta_0)\,(\vartheta - \vartheta_0)^k\,[1 + \varepsilon_2(\vartheta - \vartheta_0)]\,k!$$

причем $Z(\vartheta_0) \neq 0$, $N^{(k)}(\vartheta_0) \neq 0$, а ε_1, ε_2 ограничены. Тогда для интегральных кривых системы (2) попадающих в $D(\vartheta_0)$ при возрастании или убывания t, имеются следующие возможности:

1) Все интегральные кривые входят в O вдоль l (если $Z(\vartheta_0) N^{(k)}(\vartheta_0) > 0$ и k нечетно).

2) Все интегральные кривые стремятся к бесконечно удаленной точке луча l, имея в качестве асимптоты а) бесконечно удаленную прямую (если

$Z(\vartheta_0)N^{(k)}(\vartheta_0)<0$, $k\geqslant 3$ нечетно, или, если $k=1$, $Z(\vartheta_0)N^{(k)}(\vartheta_0)<0$ и $Z^2(\vartheta_0)+Z(\vartheta_0)N'(\vartheta_0)>0$); б) луч l (если $k=1$, $Z(\vartheta_0)N^{(k)}(\vartheta_0)<0$ и $Z^2(\vartheta_0)+Z(\vartheta_0)N'(\vartheta_0)<0$); в) прямые, параллельные лучу l (если $k=1$ и $Z(\vartheta_0)+N'(\vartheta_0)=0$).

3) Интегральные кривые, пересекающие один из лучей, образующих $D(\vartheta_0)$, входят в O вдоль l, тогда как интегральные кривые, пересекающие второй из этих лучей, стремятся к бесконечно удаленной точке луча l, имея в качестве асимптоты бесконечно удаленную прямую (если $N^{(k)}(\vartheta_0)\neq 0$ и k — четное).

Приведены примеры, иллюстрирующие указанные возможности. В формулировке теоремы 4 допущена опечатка: условие $Z(\vartheta_0)N'(\vartheta_0)>0$ должно быть заменено условием $Z^2(\vartheta_0)+Z(\vartheta_0)N'(\vartheta_0)>0$.

Г. Л. Мизернюк

2903. Заметка об одномерной неконсервативной системе. Патнам (Note on a one dimensional nonconservative system. Putnam C. R.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 1, 32—33 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt=f(t)y,\quad dy/dt=-f(t)x, \tag{1}$$

где $f(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом p. Доказывается теорема: Пусть $f(t)$ имеет один строгий максимум и один строгий минимум при $0\leqslant t<p$ и пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$ любое действительное нетривиальное периодическое решение системы (1), с периодом p и такое, что $\int_0^p x(s)\,ds=\int_0^p y(s)\,ds=0$; тогда замкнутая кривая

$$u(t)=\int_0^t x(s)\,ds,\quad v(t)=\int_0^t y(s)\,ds,$$

содержит в точности две петли. Б. П. Демидович

2904. О достаточных признаках центра. Широв И. И., Тр. Узбекского ун-та, 1956, № 65, 45—59

Изучается дифференциальное уравнение в полярных координатах вида

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=-\frac{\rho^2a_2+\rho^3a_3+\ldots+\rho^{n+1}a_{n+1}}{1+\rho b_1+\rho^2b_2+\ldots+\rho^nb_n}, \tag{1}$$

где a_k и b_k — однородные полиномы от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ степени k.

Доказывается, что для того чтобы начало координат для уравнения (1) было особой точкой типа центра, необходимо и досточно существование функций

$$r(\rho,\sin\varphi,\cos\varphi),\ \lambda(\varphi)\ \text{и}\ k(r,\lambda)$$

и выполнение тождества

$$\rho^{2\Phi}(\rho,\varphi)=\frac{k(r,\lambda)\lambda(\varphi)-\partial r/\partial\varphi}{\partial r/\partial\rho},$$

где $\rho^{2\Phi}(\rho,\varphi)$ — правая часть уравнения (1), r — непрерывная вместе со своими частными производными функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial r}{\partial\rho}(0,\sin\varphi,\cos\varphi)>0$$

для всех значений φ в интервале $(0,2\pi)$, $\lambda(\varphi)$ — произвольная, дифференцируемая периодическая функция. Причем либо $\lambda(\varphi)$ — постоянная, либо $\lambda'(\varphi)$ обращается в нуль только в конечном числе точек.

Примечания референта 1. В формуле (11) имеется опечатка. Вместо $f(\rho,f)$ должно быть $f(\rho,\varphi)$. 2. Предположения автора, что тригонометрические полиномы a_k и b_k в правой части уравнения являются однородными и степени k, не являются существенными. М. И. Альмухамедов

2905. Аналитический метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности. Цыбульский Г. П., Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1957, вып. 11, 85—98

Предлагается один аналитический метод оценки величин

$$\left.\begin{aligned}u(\theta,t)&=\bar{x}(\theta,t)-x(\theta,t)\\ v(\theta,t)&=\bar{y}(\theta,t)-y(\theta,t)\end{aligned}\right\}\ (0\leqslant t\leqslant T), \tag{1}$$

где t — время, θ — параметр, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты точек заданного, x, y — действительного контура нефтеносности.

Рассматриваются две системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt=f_1(x,y,t),\ dy/dt=f_2(x,y,t) \tag{2}$$

и

$$d\bar{x}/dt=f_1(\bar{x},\bar{y},t)+\varepsilon_1(\theta,t),\ d\bar{y}/dt=$$
$$=f_2(\bar{x},\bar{y},t)+\varepsilon_2(\theta,t) \tag{3}$$

с одинаковыми начальными условиями, причем ε_1 и ε_2 — непрерывные и ограниченные по модулю функции.

Для величин u и v, на основании систем (2) и (3) составляется система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}du/dt&=g_{11}(u,v,\theta,t)u+g_{12}(u,v,\theta,t)v+\varepsilon_1(\theta,t)\\ dv/dt&=g_{21}(u,v,\theta,t)u+g_{22}(u,v,\theta,t)v+\varepsilon_2(\theta,t)\end{aligned} \tag{4}$$

где g_{ik} — некоторые средние значения частных производных функций f_1 и f_2.

Даются способы построения оценки решений системы (4) путем замены коэффициентов $g_{ik}(u,v,\theta,t)$ на некоторые коэффициенты $\bar{g}_{ik}$, не зависящие от u и v. Способ выбора этих коэффициентов основан на решении системы (4) методом последовательных приближений. Решение иллюстрируется на примере концентричного стягивания кругового контура нефтеносности. М. И. Альмухамедов

2906. Ограниченность и сходимость решений уравнения $x''+cx'+g(x)=e(t)$. Лауд (Boundedness and convergence of solutions of $x''+cx'+g(x)=e(t)$. Loud W. S.), Duke Math. J., 1957, 24, № 1, 63—72 (англ.)

Изучается поведение при $t\to\infty$ решений уравнения

$$x''+f(x)x'+g(x)=e(t), \tag{1}$$

где $f(x)\geqslant c>0$, $g'(x)\geqslant b>0$, $|e(t)|\leqslant E$, $g(0)=0$. Пусть $H(u)=\max_{|x|\leqslant u}g'(x)$.

1) Всякое решение уравнения (1) при $t\to+\infty$ входит в область

$$|x|\leqslant\frac{E}{b}+\frac{4E}{c\max(c;\sqrt{b})},\quad |x'|\leqslant 4E/c$$

и остается в ней.

2) Если $f(x)\equiv c>\sqrt{2H(A)}$, то все решения, которые входят в область $|x|\leqslant A$, $|x'|\leqslant B$ и остаются в ней, неограниченно сближаются между собой при $t\to+\infty$.

Кроме того, даны оценки при $t\to+\infty$ решений уравнения $x''+a(t)x=0$, где $|a(t)|\leqslant A^2$.

А. Ф. Филиппов

2907. Об ограниченности решений нелинейного дифференциального уравнения. Рейссиг (Über die Beschränktheit der Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1956, 15, № 5—6, 375—383 (нем.)

Пусть в уравнении

$$\ddot{x} + kF(\dot{x}) + g(x) = kp(t) \qquad (1)$$

функции F, g, p непрерывны; $m \leqslant p(t) \leqslant M$, k — постоянная, $0 < k \leqslant 1$. Если существуют такие положительные числа $\theta \leqslant 1$, ε и η, что $F(y) \geqslant (M-m) \times (1+\varepsilon)\theta$ при $y \geqslant Y > 0$, $F(y) \leqslant -(M-m)(1-\theta)$ при $y \leqslant -Y$, $f \leqslant F(y) \leqslant F_1$ при $|y| \leqslant Y$, где $f \leqslant 0 < F_1$, $g(x) \geqslant kM + (1-k)(M-m)\theta - f + \eta$ при $x \geqslant X > 0$, $g(x) \leqslant km - (1-k)(M-m)(1-\theta) - F_1 - \eta$ при $x \leqslant -X$, тогда существуют такие постоянные B_1 и B_2, не зависящие от k, что для любого решения уравнения (1), начиная с некоторого t, выполняются неравенства $|x(t)| < B_1$, $|\dot{x}(t)| < B_2$.

Эта теорема обобщает один из результатов Ройтера (Reuter G. E. H., J. London Math. Soc., 1952, **27**, № 1, 48—58). А. Ф. Филиппов

2908. Неравенство для первого собственного значения обыкновенной краевой задачи. Хартман, Винтнер (An inequality for the first eigenvalue of an ordinary boundary value problem. Hartman Philip, Wintner Aurel), Quart. Appl. Math., 1955, **13**, № 3, 324—326 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$y'' + g(x)y' + f(x)y = 0, \qquad (1)$$

в котором $f(x)$, $g(x)$ и $g'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказывается, что если существует действительная постоянная c такая, что на всем отрезке $[a, b]$

$$f(x) - cg'(x) + c(c-1)g^2(x) \leqslant 0,$$

то решения уравнения (1) не колеблются на $[a, b]$. Для доказательства авторы делают замену $y = z\exp\left[-c\int_a^x g(t)\,dt\right]$.

Замены такого вида рассматривал М. И. Ельшин (Докл. АН СССР, 1949, 68, № 5). Приведенное условие соответствует выбору $\theta = (1/2 - c)g(x)$.

И. М. Соболь

2909. О вычислении характеристических показателей линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Дрымбэ (Despre calculul exponenţilor caracteristici la o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, liniară, omogenă, cu coeficienţi periodici. Drîmbă C.), Lucrările inst. petrol. şi gaze Bucureşti, 1957, **2**, № 2, N 197—200 (рум.; рез. русск., англ.)

Доказывается известный результат, что характеристические показатели решений уравнения

$$\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0, \quad p_i(t+\omega) = p_i(t)$$

легко вычислить, зная периодическое решение уравнения Риккати

$$\dot{p} = p^2 + P(t).$$

И. М. Соболь

2910. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Рейссиг (Über eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Reissig Rolf), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, **6**, № 1, 1—2 (нем.)

Изложение доклада автора на IV съезде чехословацких математиков о своих результатах по теории нелинейных колебаний (РЖМат, 1956, 7332; 1957, 5548). А. Ф. Филиппов

2911. Теорема осцилляции. Дин Тун-жэнь, Бэйцзин дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ, Acta Scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, **3**, № 3, 317—320 (кит.; рез. англ.)

В заметке доказана следующая теорема: Каждое нетривиальное решение $\{u(x), v(x)\}$ системы $u'' - q(x)v = 0$, $v'' + q(x)u = 0$, где $q(x)$ непрерывна в $0 \leqslant x \leqslant \infty$ и $q(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, колеблющееся в том смысле, что оба $u(x)$ и $v(x)$ имеют бесконечное множество нулей и нули одного разделяют нули другого. Резюме автора

2912. Устойчивость сферических пузырьков. Биркгоф (Stability of spherical bubbles. Birkhoff Garrett), Quart. Appl. Math., 1956, **13**, № 4, 451—453 (англ.)

Исследование устойчивости сферических пузырьков приводит к дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \qquad (1)$$

Выписав тождество

$$\frac{d}{dt}(x^2 + \dot{x}^2/q) = -(\dot{x}/q)^2(2pq + \dot{q})$$

(в статье оно приведено с опечаткой), автор формулирует теорему: (a) если $q > 0$ и $2pq + \dot{q} > 0$, то уравнение (1) устойчиво; (b) если $q > 0$ и $2pq + \dot{q} < 0$, а также если (c) $q < 0$, то уравнение (1) неустойчиво.

Примечание референта. Утверждение (a) следует из приведенного выше тождества. Однако утверждение (b), на первый взгляд вполне симметричное (a), неверно: когда выражение $x^2 + \dot{x}^2/q$ монотонно, возможен случай $x(t) \to \text{const}$. Пример: если $p(t) \equiv 0$, $q(t) \to c^2 > 0$, $\dot{q} < 0$ (или $\dot{q} > 0$), то все решения уравнения (1) ограничены и, таким образом уравнение устойчиво. В случае (c) также все решения могут оказаться ограниченными, если $p(t) \not\equiv 0$ (Wintner A., Duke Math. J., 1948, **15**, № 1).

Достаточное условие устойчивости пузырьков (8) соответствует (a) и потому остается в силе.

И. М. Соболь

2913. О решениях нелинейных дифференциальных уравнений. II. Джонсон, Там Цой-Так (On the solutions of nonlinear differential equations, II. Johnson Elgy S., Taam Choy-Tak), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 3, 383—392 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1958, 2043

Рассматривается уравнение

$$x'' + p(t)x - 2q(t)x^3 = 0, \qquad (1)$$

его решение, удовлетворяющее условиям

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = E > 0, \quad \ldots \qquad (1^*)$$

обозначается $x(t, E)$. Коэффициенты $p(t)$, $q(t)$ определены для $0 \leqslant t < \infty$, они положительны, измеримы по Лебегу и имеют положительные верхние и нижние грани.

Рассматривается уравнение частного вида

$$x'' + Ax - 2Bx^3 = 0, \qquad (2$$

где A, B — положительные постоянные, и его решение, удовлетворяющее условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = E_0 > 0$, $A^2 - 4BE_0^2 = 0$. Исследуется периодичность решения уравнения (2) в зависимости от соотношений $E < E_0$ и $E > E_0$. После этого доказывается десять теорем относительно $x(t, E)$. Эти теоремы касаются периодичности, нулей и максимумов этих решений. Для примера приводим формулировку последней.

Теорема X. Пусть $p(t)$ — неубывающая (невозрастающая), а $q(t)$ — невозрастающая (неубывающая) функции, и пусть $x(t, E)$ удовлетворяет (1*) и имеет

нули $0=T_0, T_1, T_2, \ldots$, расположенные в порядке возрастания. Если M_i — абсолютный максимум $|x|$ на $[T_{i-1}, T_i]$ и V_i — значение $|x'|$ при $t=T_{i-1}$, то последовательности $\{T_i-T_{i-1}\}$ и $\{M_i\}$ будут невозрастающими (неубывающими), а $\{V_i\}$ неубывающей (невозрастающей). А. Н. Черкасов

2914. Поведение нелинейной колебательной системы второго порядка при воздействии большой внешней силы. Лауд (Behavior of certain forced nonlinear systems of second order under large forcing. Loud W. S.), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 235—247 (англ.)

Изучаются периодические решения уравнения

$$L(x)+f(x)x'+g(x)=Ae(t), \qquad (1)$$

где $L(x)\equiv x''+cx'+kx$, $x'=dx/dt$, $e(t)$ имеет период T, при больших значениях постоянной A.

Предположим, что уравнение $L(x)=0$ не имеет решений периода T (кроме $x(t)\equiv 0$), а уравнение $L(x)=e(t)$ имеет ровно одно такое решение $\varphi_0(t)$, причем $\varphi_0(t)=0$ лишь на множестве значений t меры нуль. Пусть $g(x)$, $f(x)$ и $\int_0^x f(u)\,du$ ограничены для всех x и $f(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $g'(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$.

Тогда для всех достаточно больших A уравнение (1) имеет единственное периодическое решение $x(t)$ периода t, причем разность $|x(t)-A\varphi_0(t)|$ ограничена постоянной, не зависящей от t и A. Далее, если уравнение $L(x)=0$ не имеет решения периода nT, то при достаточно больших A уравнение (1) не имеет решений с наименьшим периодом nT.

Аналогичные результаты получены для уравнения (1) при $k=0$ и уравнения

$$L(x)=\psi(-ax-\beta x'+A\epsilon(t)),$$

где $\psi(u)=u$ при $|u|\leqslant 1$, $\psi(u)=\operatorname{sgn} u$ при $|u|\geqslant 1$ (при несколько иных предположениях).

А. Ф. Филиппов

2915. Об ортогональных системах полиномов, образуемых с помощью дифференциальных уравнений Штурма—Лиувиля. Фельдман (Über durch Sturm—Liouvillesche Differentialgleichungen charakterisierte orthogonale Polynomsysteme. Feldmann L.), Publs mat., 1954, 3, № 3—4, 297—304 (нем).

В работе установлены следующие теоремы: Теорема I. Пусть $P_k(x)$ — последовательность полиномов степени $k=0, 1, \ldots \infty$, удовлетворяющих уравнениям

$$Q(x)\,p_k''(x)+xp_k'(x)=\lambda_k p_k;\quad Q=ax^2+bx+c, \qquad (1)$$

где a, b, c — фиксированные постоянные, а λ_k — неотрицательная последовательность чисел. Пусть, далее, имеет место соотношение

$$p_2(x)=(x-a_2)\,p_1-A_2p_0,$$

где a_2, A_2 — некоторые постоянные, причем $A_2>0$. В этом случае система полиномов $p_k(x)$ с точностью до линейного преобразования есть система полиномов:

Якоби, если $Q(x)$ — полином второй степени; Чебышева—Лагерра, если $Q(x)$ — полином первой степени; Чебышева—Эрмита, если $Q(x)$ — постоянная.

Теорема II. Пусть $Q(x)$ такова, что $\rho(x)=\frac{1}{Q}\exp\int\frac{x}{Q}\,dx$ интегрируема на каждом конечном интервале. Пусть, далее, уравнение (1) обладает решениями $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_k(x)\ldots$, где $p_k(x)$ — полином степени k. Если нули $p_2(x)$ действительны и различны, то $p_k(x)$ будут полиномами: Якоби, если $Q(x)$ — полином второй степени; Чебышева—Лагерра, если $Q(x)$ — полином первой степени; Чебышева—Эрмита, если $Q(x)$ — постоянная. И. И. Ворович

2916. О сходимости разложений по собственным функциям. (II) Титчмарш (On the convergence of eigenfunction expansions (II). Titchmarsh E. C.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 31, 236—240 (англ.) Ч. I см. Quart. J. Math., 1952, 2, № 2, 139—144

Рассматривается уравнение

$$y''+\{\lambda-q(x)\}\,y=0 \quad (0\leqslant x<\infty) \qquad (1)$$

с граничным условием

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0, \qquad (2)$$

где α — действительное число. Если $q(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, то спектр задачи (1)—(2) дискретен. Пусть λ_n — собственные значения этой задачи и $\psi_n(k)$ — соответствующие собственные функции. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, принадлежащая классу $L^2(0,\infty)$, и пусть

$$c_n=\int_0^\infty f(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$

$$f(x\sim\sum_{n=1}^\infty c_n\psi_n(x). \qquad (3)$$

В работе доказана следующая теорема: Пусть $q(x)$ непрерывна, возрастает и выпукла вниз. Пусть $f(t)\in L^2(0,\infty)$ и в окрестности точки $f=x>0$ удовлетворяет любому достаточному условию для сходимости разложения в обычный ряд Фурье. Тогда ряд (3) сходится к $f(x)$.

Примечание референта. Этот результат является частным случаем общей теоремы референта о равносходимости разложения по собственным функциям задачи (1)—(2) и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам (РЖМат, 1954, 3321).

Б. М. Левитан

2917. К алгебре функций Грина. Калафати П. Д., Тр. Николаевского кораблестроит. ин-та, 1956, вып. 8, 228—245

Решается важная задача, относящаяся к граничным задачам для квазидифференциальных операторов вида

$$L[y]=\rho_0\frac{d}{dx}\rho_1\frac{d}{dx},\ \ldots,\ \rho_{n-1}\frac{d}{dx}\rho_n y.$$

Рассматриваются две функции Грина $K\binom{x}{s}$ и $H\binom{x}{s}$ для оператора $L[y]$, соответствующие различным системам граничных условий. Каждая система граничных условий представляет собой n линейно независимых соотношений между $2n$ величинами—значениями на концах интервала функции y и ее квазипроизводных до $n-1$-го порядка включительно.

Устанавливаются выражения для символов Фредгольма и резольвенты ядра $H\binom{x}{s}$ через символы Фредгольма и резольвенту ядра $K\binom{x}{s}$. Полученные выражения используются для исследования осцилляционных свойств функций Грина.

Ф. Р. Гантмахер

2918. О применении операционного исчисления к краевым задачам. Айзенберг Я. Е., Тр. Студ. научн. о-ва. Харьковск. политехн. ин-та, 1956, 1, № 1, 21—26

Средствами операционного исчисления решается краевая задача

$$P_m\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)y = f(x),$$

где $y, y', \ldots, y^{(2m-2)}$ получают предписанные значения при $x=0, 1$. При этом P_m — многочлен степени m, а $f(x)$ — комплексная функция вещественного аргумента.

Решение этой задачи вытекает как частный случай из результатов референта (РЖМат, 1954, 2151); но автор предлагает другой вывод (без использования аппарата δ-функций) на основе оператора

$$T_a f(x) = \int G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где G — функция Грина для оператора $L(y) = y'' + ay$.

П. К. Рашевский

2919. О разложении функций, удовлетворяющих четырем граничным условиям. Чандрасекхар, Рид (On the expansion of functions which satisfy four boundary conditions. Chandrasekhar S., Reid W. H.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 6, 521—527 (англ.)

Дается разложение функций по собственным функциям двух граничных задач

1) $d^4y\,dx^4 = \lambda^4 y, \quad y=0, \quad y'=0, \quad$ при $x=\pm 1, 0$;

2) $$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{n}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2}\right)^2 y = \alpha^4 y, \quad y=0,$$

$$y'=0 \quad \text{при } r=1, \quad r=r_1 (<1).$$

Приведены таблицы первых по порядку собственных значений этих задач.

Показывается применение этих граничных задач в вопросах устойчивости в гидродинамике.

З. И. Биглов

2920. Стабилизация решений некоторых дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 1, 12—15

Семейство траекторий $\{u = u(t)\}$ $(t_0 \leqslant t < +\infty)$ в линейном метрическом пространстве M авторы называют стабилизирующимся к кривой $v(t)$, если

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(u(t), v(t)) = 0$$

для любой кривой $u(t)$ семейства. Рассматривается вопрос о стабилизации решений одних уравнений к решениям других уравнений. Приведем основной результат.

Через $A(t)$ обозначено семейство линейных операторов (вообще говоря, неограниченных), имеющих общую область определения, плотную в некотором гильбертовом пространстве и не зависящую от t, причем

$$(A(t)u, u) \geqslant \gamma(t)(u, u) \quad (\gamma(t) > 0)$$

и

$$\| A_t'(f) v \| \leqslant \delta(t) \| A(t) v \|.$$

Тогда для стабилизации решений $u(t)$ уравнения

$$du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

к решению уравнения

$$A(t)u(t) = f(t)$$

достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1) $\gamma(t) \geqslant c^2 > 0, \quad \varepsilon(t) = O(t^{-r}), \quad r > 0,$

2) $\gamma(t) = O(t^{-r_1}), \quad 0 < r_1 < 1, \quad \varepsilon(t) = O(t^{-r}), \quad r > 0,$

3) $\gamma(t) = O(t^{-1}), \quad \varepsilon(t) = O(t^{-r}), \quad r > 1.$

В этих условиях через $\varepsilon(t)$ обозначено выражение

$$\frac{1}{\gamma(t)} \| f'(t) \| + \frac{\delta(t)}{\gamma(t)} \| f(t) \|.$$

М. А. Красносельский

2921. Замечания о методе Важевского в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Белецкий (Remarques sur la méthode de T. Ważewski dans l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Bielecki A.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, 4, № 8, 493—495 (франц.)

Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 8, 481—483.

Понятие строго выходящей точки играет важную роль в топологическом методе, примененном Важевским (Ważewski, Ann. Soc. polon. Math., 1947, 20, 279—313) при изучении асимптотического поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Автор вводит понятие сильно выходящей точки. Пусть $f_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ — функции, непрерывные в открытой области $\Omega \in E$, и ω — открытое множество, принадлежащее Ω. Предположим, что в каждой точке $Q \in \Omega$ существует единственное решение системы дифференциальных уравнений

$$dx_\nu/dt = f_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Точка выхода R называется сильно выходящей, если не существует решения $x_\nu = \varphi_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, такого, что $(\alpha, \varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)) = R$ и $(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in \bar{\omega}$ для $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Очевидно, что всякая точка, строго выходящая, есть сильно выходящая, но обратное неверно. Для $Q = (t_0, \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n) \in \omega$ обозначим $C(Q)$ первую точку (если она есть), в которой решение, выходящее из Q, попадает для $t > t_0$ на границу ω. Автор доказывает, что если все выходящие точки являются сильно выходящими, тогда $C(Q)$ есть непрерывная функция от Q в множестве точек, для которых $C(Q)$ существует. Эта лемма позволяет обобщить некоторые теоремы из работы Важевского.

J. Szarski

2922. Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений. Богданов Ю. С., Матем. сб., 1957, 41, № 4, 481—498

Рассматриваются системы вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} [p_{ij}(t) + q_{ij}(t)]\, x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $q_{ij}(t)$ считаются возмущениями. Показано, что они не меняют характеристических чисел (х. ч.), если сами обладают х. ч. $> \sigma$ (σ — число Ляпунова). Автор указывает, что этот результат перекрыт Д. М. Гробманом (Матем. сб., 1952, **30 (72)** : 1). Даются также оценки σ по $p_{ij}(t)$. Далее приводятся сложные, но выписанные явно формулы, в принципе позволяющие вычислить х. ч. невозмущенной системы по ее коэффициентам.

Р. Э. Виноград

2923. Об устойчивости по первому приближению. Золотарев Ю. Г., Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ., 1956, вып. 5(9), 62—70

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, \ldots, n), \quad (1)$$

где $p_{si}(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$, а L_s в области $|x_s| \leqslant R$, $t \geqslant 0$ непрерывны по t и удовлетворяют неравенствам

$$|L_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant Au^2; \quad |L_s(t, X') - L_s(t, X'')| \leqslant Au\Delta u, \quad (2)$$
$$u = \max_{s=1,\ldots,n}(|x_s|),$$
$$\Delta u = \max_s(|x'_s - x''_s|), \quad A = \text{const}.$$

Пусть $X(t)$ — матрица некоторой фундаментальной системы решений первого приближения уравнений (1), $Y(t)$-ей обратная и $\{f\}$ — совокупность непрерывных при $t \geqslant 0$ функций таких, что $\max_{s,k}(|x_{sk}(t)|) \leqslant f(t)$. Приведем некоторые результаты.

Теорема 1. Если существует ограниченная функция $f(t) \in \{f\}$ такая, что $\max_{s,k,m}|x_{sk}(t)| \int_{t_0}^{t} |y_{km}(\tau)| \times f^2(\tau)\,d\tau \leqslant Mf(t)$, то нулевое решение системы (1) устойчиво при любом выборе L_s, удовлетворяющих условию (2). Если к тому же $f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Утверждается, что такая функция $f(t) \in \{f\}$ существует, если система первого приближения правильная и все ее характеристичные числа положительны. Отсюда как следствие получаются достаточные критерии устойчивости Персидского и Малкина.

В работе получены также результаты, имеющие место и для некоторых случаев равенства нулю характеристических чисел системы первого приближения.

В. Р. Петухов

2924. Замечание о линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях. Дилиберто (A note on linear ordinary differential equations. Dilliberto Stephen P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 462—464 (англ.)

Содержавшееся в работе автора (Contributions to the theory of non-linear oscillations, Ann. Math. Studies, Princeton, 1950, № 20, 1—48) доказательство теоремы Перрона о приведении линейной системы дифференциальных уравнений к треугольному виду, как указывает автор, было недостаточным. Здесь приводится исправленное доказательство.

Референт получил этот результат теми же методами в 1954 г. (РЖМат, 1955, 718). Р. Э. Виноград

2925. Об одном способе построения функций А. М. Ляпунова. Бедельбаев А. К. (Про один спосіб побудови функцій О. М. Ляпунова. Бедельбаев А. К.), Прикл. механіка, 1956, 2, № 4, 373—377 (укр.; рез. русск.)

Даются формулы для практического вычисления коэффициентов квадратичной формы, являющейся функцией Ляпунова для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае асимптотической устойчивости.

И. Г. Малкин

2926. К вопросу об отыскании характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Шиманов С. Н., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 6, 1102—1105

Рассматривается вопрос об отыскании характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{dx}{dt} = (A + \mu F(t, \mu))x \quad (1)$$

мало отличающихся от систем с постоянными коэффициентами

$$dx/dt = Ax. \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — матрица с постоянными элементами, $F = \|f_{ij}\|$ — матрица, элементы которой являются непрерывными периодическими функциями t периода 2π и аналитическими функциями малого параметра μ при $|\mu| < \mu^0$.

Пусть λ^* — какой-нибудь корень характеристического уравнения

$$|A - E\lambda| = 0 \quad (3)$$

системы (2). Обозначим через $k \leqslant n$ общее число корней уравнения (3), равных λ^*, или отличающихся от него на величины вида $\pm N\sqrt{-1}$, где N — целое число. В реферируемой работе рассматривается случай $k > 1$ и ищутся все характеристические показатели $\rho_1, \ldots, \rho_k$ системы (1), соответствующие корню λ^* уравнения (3), т. е. имеющие вид $\rho_s = \lambda^* + \alpha_s(\mu)$ $(s = 1, \ldots, k)$, где $\alpha_s(0) = 0$. Автор показывает, что функции $\alpha_s(\mu)$ разлагаются в ряды по возрастающим целым или дробным степеням μ и что аналитический вид и первые члены этих разложений будут таким же, как и у разложений по целым или дробным степеням μ корней α некоторого алгебраического уравнения $f(\alpha) = 0$, степень которого равна k и коэффициенты которого являются полиномами относительно μ. Коэффициенты этого уравнения $f(\alpha) = 0$ вычисляются непосредственно по правым частям уравнений (1).

И. Г. Малкин

2927. Заметка о втором методе Ляпунова. Хан (Eine Bemerkung zur zweiten Methode von Ljapunov. Hahn Wolfgang), Math. Nachr., 1955 (1956), 14, № 4—6, 349—354 (нем.)

Чисто алгебраическим путем устанавливаются известные теоремы о построении для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами функций Ляпунова в виде квадратичных форм. Доказательства проводятся при помощи теории матриц без использования свойств устойчивости или неустойчивости решений рассматриваемых дифференциальных уравнений. И. Г. Малкин

2928. Об ограниченных решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных и с периодическими коэффициентами. Сибуя (Sur les solutions bornées d'un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients périodiques. Sibuya Yasutaka), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I., 1956, 7, № 3, 333—341 (франц.)

Рассматривается система

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j x_j + \delta_j x_{j-1} + \sum_{k_1+\ldots+k_n \geqslant 2} f_{j,k_1,\ldots,k_n}(t)\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$

где $f_{j,k_1,\ldots,k_n}(t)$ — непрерывные периодические (с периодом ω) функции; λ_j и δ_j — такие постоянные, что если $\delta_j \neq 0$, то $\lambda_j = \lambda_{j-1}$ и если $\lambda_j \equiv \lambda_k \pmod{2\pi i/\omega}$, то $\lambda_j = \lambda_k$. Приведем важнейшие результаты.

1) Если у системы (1) существует ограниченное при $t \to \infty$ решение, имеющее вид $x_j = \Phi_j(t, \eta_1, \ldots, \eta_p)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, где η_k — произвольные постоянные,

а Φ_j — голоморфные функции η_k для η_k достаточно малых и $\varphi_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$, то $x_j = \varphi_j(t, \eta_1, \ldots, \eta_p) + \psi_j(t, \eta_1, \ldots, \eta_p)$, где φ_j — почти периодическое решение системы (1), а $\psi_j \to 0$ при $t \to \infty$.

2) Пусть $\operatorname{Re}\lambda_j = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \ldots, r, \\ <0, & j = r+1, \ldots, n, \end{cases}$

общее решение $x_j = \Phi_j(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(x_j(0) = \xi_j)$ равномерно ограничено и голоморфно по ξ_k для достаточно малых ξ_k. Тогда у системы (1) существует почти периодическое решение, зависящее от r произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_r$, имеющее вид $x_j = Q_j(C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, C_r e^{\lambda_r t}, t)$, где $Q_j(z_1, \ldots, z_r, t)$ — целые ряды по $z_1, \ldots, z_r$, коэффициенты которых суть периодические (периода ω) функции t.

Д. М. Гробман

2929. К вопросу об одночастотных колебаниях в системах со многими степенями свободы. Лыкова (До питання про одночастотні коливання системи з багатьма степенями свободи. Лыкова О. Б.), Доповіді АН УРСР, 1957, № 3, 222—226 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений $n+2$-го порядка

$$dz/dt = Pz + \varepsilon F(t, z), \qquad (1)$$

где $P = \| p_{ik} \|$ — постоянная матрица $n+2$-го порядка, $F(t, z)$ — аналитическая функция z, периодическая по t с периодом 2π.

Предполагается, что система, колебания которой описываются уравнениями (1), совершает одночастотный колебательный процесс, причем характеристическое уравнение для системы

$$dz/dt = Pz$$

имеет пару чисто мнимых корней, а остальные корни с отрицательными действительными частями.

При этих предположениях строится алгорифм, дающий возможность найти приближенное решение системы (1), зависящее от двух произвольных постоянных и соответствующее одночастотному колебательному процессу. Ю. А. Митропольский

2930. Об одночастотных колебаниях в системах с медленно меняющимися параметрами. Лыкова О. Б., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 155—162

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(\tau, x) + \varepsilon X^*(\tau, \theta, x, \varepsilon), \qquad (1)$$

в вещественной области описывающая одночастотный колебательный процесс. X, X^*, x — n-мерные векторы, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, ε — малый положительный параметр, $\tau \in [0, L]$, $d\theta/dt = \nu(\tau) > 0$ для любого $\tau \in [0, L]$.

Предполагается, что для любых $\tau \in [0, L]$:

1) система уравнений

$$dx/dt = X(\tau, x) \qquad (2)$$

имеет семейство периодических решений

$$x = x^0(\tau, \omega t + \varphi, a) \quad (\omega = \omega(\tau, a)), \qquad (3)$$

зависящее от двух произвольных постоянных φ, a и от τ как от параметра;

2) для системы уравнений в вариациях

$$d\delta x/dt = X'_x(x^0)\,\delta x \qquad (4)$$

$n-2$ характеристических показателя $\alpha_3(\tau), \alpha_4(\tau), \ldots, \alpha_n(\tau)$ имеют отрицательные действительные части;

3) функции $X(\tau, x) + \varepsilon X^*(\tau, \theta, x, \varepsilon)$ — бесконечно дифференцируемы по x, τ, ε в области

$$\tau \in [0, L], \quad \theta \in \Omega, \quad x \in U_\rho, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

где U_ρ — ρ-окрестность семейства замкнутых орбит (3) в n-мерном пространстве и периодические по θ с периодом 2π.

При этих предположениях система (1) заменой переменных приводится к виду

$$d\psi/dt = \omega(\tau, a) + P(\tau, \theta, \psi, a, h, \varepsilon),$$

$$da/dt = Q(\tau, \theta, \psi, a, h, \varepsilon),$$

$$dh/dt = H(\tau)\,h + R(\tau, \theta, \psi, a, h, \varepsilon),$$

после чего строится алгорифм для нахождения приближенного решения согласно методу, изложенному в работе автора (РЖМат, 1958, 312).

Ю. А. Митропольский

2931. Об устойчивости периодических решений квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы. Блехман И. И., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 2, 183—186

Рассматривается задача об устойчивости периодических решений автономных квазилинейных систем произвольного порядка. Предполагается, что характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет нулевой корень произвольной кратности и любое число чисто мнимых корней, также произвольной кратности. Вещественные части всех остальных корней предполагаются отрицательными. Кроме того, предполагается, что все кратные корни имеют простые элементарные делители. Тогда система может быть приведена к виду

$$dx_s/dt = \lambda_s x_s + \mu F_s(x_1, \ldots, x_n, \mu), \qquad (1)$$

где μ — малый параметр, F_s — аналитические функций своих аргументов в некоторой области G. Предполагается, что система (1) при $\mu = 0$ допускает периодическое решение, зависящее от m произвольных параметров $a_1, \ldots, a_m$. Для этого необходимо, чтобы m из величин λ_s, например, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, имели вид $\lambda_s = in_s$, где n_s — целые числа или нули. Для того чтобы этому решению линейной системы отвечало периодическое решение полной системы (1), обращающееся в него при $\mu = 0$, необходимо, чтобы параметры $a_1, \ldots, a_m$ удовлетворяли некоторым $m-1$ уравнениям $P_j(a_1, \ldots, a_m) = 0$ $(j = 1, \ldots, m-1)$ (Булгаков Н. Г. РЖМат, 1956, 5234). Каждому простому решению этих уравнений действительно отвечает периодическое решение системы (1) (один из параметров, вследствие автономности системы, может быть выбран по произволу).

Автор показывает, что исследование устойчивости получаемого таким образом периодического решения системы (1) приводится к задаче Гурвица для некоторого алгебраического уравнения p-й степени (распадающегося, вследствие канонической формы линейной части системы (1), на несколько уравнений более низкой степени), где $p \geqslant m$ — общее число чисто мнимых величин среди λ_s. Для составления этого алгебраического уравнения достаточно знать только рассматриваемое решение уравнений $P_j(a_1, \ldots, a_m) = 0$ и функции F_s. И. Г. Малкин

2932. Индекс особой точки и существование периодических решений систем с малым параметром. Берштейн И., Халанай А., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, 923—925

Рассматривается система

$$dx/dt = X(x) + \mu Y(x, t, \mu), \quad x \in E^n, \qquad (1)$$

где X и Y — непрерывные n-мерные вектор-функции, причем Y периодически зависит от t — с периодом ω. Предполагаются выполненными некоторые условия, обеспечивающие в некоторой окрестности Ω начала координат единственность решения и его непрерывную зависимость от начальных условий и от параметра μ, который считается достаточно малым. Наряду с (1) рассматривается система

$$dx/dt = X(x). \qquad (2)$$

Доказывается теорема 1: Если особая точка системы (2) не является центром и ее индекс отличен от нуля, то при достаточно малом μ система (1) имеет периодическое решение, которое при $\mu \to 0$ стремится к особой точке системы (2).

Условие отсутствия центра можно иногда ослабить. В частности, доказывается теорема 2: Если при $n = 2$ в некоторой окрестности особой точки существует периодическое решение системы (2) с периодом ω', причем $\omega' \neq \omega$, то при достаточно малом μ существует периодическое решение системы (1) периода ω.

Приводятся примеры. И. Г. Малкин

2933. Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний. Федорченко А. М., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 220—224

Излагается метод канонического усреднения для механических систем, гамильтониан которых $\varepsilon H(p_i, q_i, t)$ периодически зависит от времени. Идея метода состоит в том, чтобы найти производящую функцию $S(P_i, q_i, t)$, которая давала бы такое преобразование канонических переменных p_i, q_i с помощью известных формул преобразования, чтобы преобразованный гамильтониан H' не содержал бы явно времени.

Функция $S(P_i, q_i, t)$ ищется в виде ряда

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2,$$

где $S_0 = \sum_i q_i P_i$ — тождественное преобразование, S_1 и S_2 — периодические по t функции, подлежащие определению.

В результате в первом приближении

$$S_1 = i \sum_{n \neq 0}^{\infty} \frac{H_n(P_i, q_i)}{n} e^{int},$$

где

$$H_n(P_i, q_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(P_i, q_i, t)\, e^{-int} dt.$$

В качестве примера, иллюстрирующего изложенный метод, рассматривается движение сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса.

Ю. А. Митропольский

2934. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени. Красовский Н. Н., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 2, 252—255

Доказываются теоремы существования и единственности периодических решений систем квазилинейных уравнений с запаздывающим аргументом в случае асимптотической устойчивости периодического решения порождающей системы.

Рассматриваются системы уравнений:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) x_j(t - h_{ij}(t)) + \varphi_i(x_1(t - h_{i1}(t)), \ldots, x_n(t - h_{in}(t)), t) + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $\varphi_i(0, 0; \ldots 0, t) = 0$, p_{ij}, φ_{ij}, f_i — непрерывные, а h_{ij} — кусочно-непрерывные периодические функции t с периодом T, $0 \leqslant h_{ij}(t) \leqslant H$ и

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(t) y_j(t - g_{ij}(t)), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

где q_{ij} — непрерывные, g_{ij} — кусочно-непрерывные периодические функции t.

Доказаны теоремы:

I. Если тривиальное решение системы (2) асимптотически устойчиво, то можно указать положительные числа δ, γ и L такие, что при

$$|p_{ij}(t) - q_{ij}(t)| < \delta, \quad |h_{ij}(t) - g_{ij}(t)| < \gamma,$$

$$|\varphi_i(x_1'' \ldots x_n'', t) - \varphi_i(x_1', \ldots, x_n', t)| < L \sum_{j=1}^{n} |x_j'' - x_j'|$$

система (1) имеет единственное периодическое решение, которое также асимптотически устойчиво.

II. Если тривиальное решение системы (2) асимптотически устойчиво, то при каждом достаточно малом по модулю μ в окрестности периодического решения порождающей системы существует единственное периодическое решение системы

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} [q_{ij}(t) + \mu P_{ij}(t)]\, x_j[t - (g_{ij}(t) + \mu h_{ij}(t))] + f_i(t) + \mu \varphi_i(x_1[t - (g_{i1}(t) + \mu h_{i1}(t))], \ldots, x_n[t - (g_{in}(t) - h_{in}(t))], t). \qquad (3)$$

Если функции h_{ij}, g_{ij}, f_i, φ_i, q_{ij}, p_{ij} имеют непрерывные производные до порядка $(n+1)$-го включительно, то иногда решение $X(t, p)$ системы (3) целесообразно искать в виде

$$X(t, \mu) = X_0(t) + \mu X_1(t) + \ldots + \mu^n X_n(t) + R_n(t, \mu),$$

где $R_n(t, \mu) = o(\mu^n)$. Л. Е. Эльсгольц

2935 Д. Итеративный процесс получения периодических решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. Сварц (Iterative procedure for obtaining the periodic solution of certain nonlinear differential equations. Swartz William J. Abstr. doct. diss. Iowa State Coll., 1955), Iowa State Coll. J. Sci., 1956, 30, № 3, 440—441 (англ.)

Применяется метод последовательных приближений к вычислению периодического решения нелинейного уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{df(x)}{dt} + \beta(x) = \frac{dE(t)}{dt}, \qquad (1)$$

где $f'(x)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству $0 < p \leqslant f'(x) \leqslant 1$, α и β — отличные от нуля вещественные постоянные и функция $E'(t)$ — периодична периода 2π, удовлетворяющая некоторым общим условиям. Уравнение (1) представляется в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \beta(x) = \frac{d}{dt}\{E(t) - \rho g(x)\}, \qquad (2)$$

где $\rho = \alpha(p - 1)$ и $g(x) = x - f(x)/(1 - p)$. В качестве первого приближения принимается периодическое решение линейного уравнения, получающегося из (2) вычеркиванием $g(x)$. В качестве $k+1$-го приближения принимается периодическое решение $x_k(t)$ уравнения (2), в правой части которого величина x заменена через $x_k(t)$. Доказывается сходимость.

Аналогичным образом вычисляется периодическое решение системы с N степенями свободы для уравнений, приводящихся к виду

$$L\frac{d^2x}{dt^2}+A\frac{dx}{dt}+Sx=\frac{d}{dt}\{E(t)-U(x)\},$$

где x, U, E — N-мерные векторы, а L, A и S — постоянные вещественные матрицы, из которых L и A знакоопределенные положительные, а S — знакопостоянная положительная, причем матрицы L и S симметричны.

Примечание референта. Метод последовательных приближений неоднократно использовался в литературе для нахождения периодических, а также и почти периодических решений систем уравнений, значительно более общего вида, чем в реферируемой работе. (РЖМат, 1957, 3225 К).

И. Г. Малкин

2936 Д. Об устойчивости периодических решений уравнений высокого порядка. Возняк Л. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1957

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2937. Приведение эволюционной системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к одному уравнению. Борок В. М., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 4, 682—685

1. Рассматривается система уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t),\qquad(1)$$

где $u(x,t)=\{u_1(x,t),\ldots,u_N(x,\ t)\}$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, а $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — квадратная матрица N-го порядка, элементами которой являются полиномы от $i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ i\frac{\partial}{\partial x_n}$. Пусть полиномиальная матрица $P(s)$ получается из $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ заменой $i\frac{\partial}{\partial x_k}$ на s_k. Строится матрица $Q(s)$, имеющая те же инвариантные множители, что и $P(s)$, но обладающая более простой структурой: $Q(s)$ разбивается на клетки; отличны от нулевых только клетки, стоящие на главной диагонали; диагональные клетки имеют вид

$$\left\|\begin{array}{cccc}0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ P_k(s) & P_{k-1}(s) & \ldots & P_2(s) & P_1(s)\end{array}\right\|$$

где $P_j(s)$ — полиномы. Система (1) эквивалентна системе

$$\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t}=Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,\ t)\qquad(2)$$

в следующем смысле: существуют такие матрицы $T_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $T_2\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, что все решения системы (2) и только они получаются из решений системы (1) по формуле

$$v(x,\ t)=T_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t),$$

и, наоборот, все решения системы (1) и только они получаются из решений системы (2) по формуле

$$u(x,\ t)=T_2\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,\ t)$$

(Речь идет о решениях в классе обобщенных функций — функционалов над финитными бесконечно дифференцируемыми функциями). Система (2) распадается на несколько систем, каждая из которых интегрируется независимо от остальных и очевидным образом сводится к одному уравнению вида

$$\frac{\partial^k w(x,\ t)}{\partial t^k}=\sum_{m=1}^{k}P_m\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{k-m}w(x,\ t)}{\partial t^{k-m}}.\qquad(3)$$

2. Пусть система (1) гиперболична в смысле И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (РЖМат, 1955, 3291), т. е. характеристические корни $\lambda_j(s)$ матрицы $P(s)$ ($s_k=\sigma_k+i\tau_k$) удовлетворяют условиям

$$\max \operatorname{Re}\lambda_j(s)\leqslant A_1|s|\quad\text{при}\quad|s|=\left(\sum_{k=1}^{n}|s_k|^2\right)^{1/2}\geqslant 1,$$

$$\max \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)\leqslant A_2.$$

В этом случае доказывается, что каждое из уравнений (3) есть уравнение типа Ковалевской, т. е. степень полинома $P_m(s)$ не превосходит m. Отсюда следует, что задача Коши для гиперболической системы (1) может быть сведена к задаче Коши для системы первого порядка. М. С. Агранович

2938. К общей теории краевых задач для линейных дифференциальных уравнений. I. Фикера (Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Fichera Gaetano), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 1—2, 46—55 (итал.)

Пусть A — ограниченная область с границей Σ в $E^{(r)}$. Рассматривается в A линейный дифференциальный оператор порядка m

$$\mathcal{E}(u)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{s_1+\ldots+s_r=k}a^{(k)}_{s_1\ldots s_r}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_r^{s_r}},$$

где $a^{(k)}_{s_1\ldots s_r}$ имеют непрерывные производные до порядка k в $A+\Sigma$ ($a^{(k)}_{s_1\ldots s_r}$ — функции класса k в $A+\Sigma$).

Вводятся следующие классы функций: 1) C — множество функций $u(x)$ класса $m-1$ в $A+\Sigma$ и класса m в A таких, что $\mathcal{E}(u)\in L^{(1)}(A)$. 2) Γ — класс функций $v(x)$: а) непрерывных в $A+\Sigma$, б) $A+\Sigma$ можно разбить на конечное число частей $T_1,\ \ldots,\ T_s$ таких, что в каждой внутренней точке

$$T_h\ (h=1,\ \ldots,\ s)\ \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_r^{s_r}}$$

совпадает с непрерывной функцией $A+\Sigma$, если $a^{(k)}_{s_1\ldots s_r}\not\equiv 0$ в $A+\Sigma$; в) $\frac{\partial^h v}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_r^{p_r}}$ непрерывна в $A+\Sigma$, если $h<k$, $p_1\leqslant s_1,\ \ldots,\ p_r\leqslant s_r$. 3) U_0 — множество таких $v\in\Gamma$, что для любой $U\in C$

$$\int_A[v\mathcal{E}(u)-u\mathcal{E}^*(v)]\,dx=0.$$

В работе доказываются некоторые теоремы о расширении оператора $\mathcal{E}$.

Определяются следующие классы функций:

I. $\mathfrak{A}=\{u(x)\}$, где $u(x)\in L^{(1)}(A)$ и такая, что для нее существует $f(x)\in L^{(1)}(A)$, удовлетворяющая условию

$$\int_A [vf - u\mathcal{E}^*(v)]\,dx = 0$$

для всех $v\in U_0$. По определению $\mathcal{E}(u)=f$.

Пусть $\Lambda(A+\Sigma)$ — линейное множество мер $\mu(B)$, определенных над σ-кольцом борелевских множеств $B\subset A+\Sigma$.

II. $\mathfrak{A}'=\{u(x)\}$, где $u(x)\in L^{(1)}(A)$ и такая, что существует $\mu(B)\in\Lambda$, удовлетворяющая условию $\int_{A+\Sigma} v\,d\mu - \int_A u\mathcal{E}^*(v)\,dx = 0$ для всех $v\in U_0$.

III. $\mathfrak{A}''$ — множество мер $u(B)$ из $\Lambda(A+\Sigma)$, для каждой из которых существует $\mu(B)\in\Lambda$ такая, что $\int_{A+\Sigma} v\,d\mu - \int_{A+\Sigma}\mathcal{E}^*(v)\,du = 0$ для $v\in U_0$. В II и III по определению $\mathcal{E}(u)=\mu$, $\|\mu\|_\Lambda = v_\mu(A+\Sigma)$, где v_μ — полная вариация μ в $A+\Sigma$.

Доказаны теоремы:

Теорема 1. $\mathfrak{A}$ является собственным подмножеством $\mathfrak{A}'$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{E}(u)$ — эллиптический положительный оператор 2-го порядка в $A'\supset A+\Sigma$: $\mathcal{E}(u) = \sum_{h,k=1}^{r} a_{hk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{r} b_h\frac{\partial u}{\partial x_h} + cu$, где $a_{hk}\in C_H^{(2)}$, $b_h\in C_H^{(1)}$, C — ограниченная измеримая в A', $C_H^{(f)}$ — класс функций, имеющих непрерывные производные до порядка p в A', удовлетворяющих условию Гёльдера в A'. Если u, $\mu\in\Lambda(A+\Sigma)$ и $\int_{A+\Sigma} v\,d\mu - \int_{A+\Sigma}\mathcal{E}^*(v)\,du = 0$ для $v\in U_0$, то «u» абсолютно непрерывна. В. П. Ильин

2939. **К общей теории краевых задач для линейных дифференциальных уравнений. II. Фикера** (Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Fichera Gaetano), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 21, № 3—4, 166—172 (итал.)

Заметка является продолжением заметки I (реф. 2938). При тех же обозначениях рассматривается краевая задача

$$\mathcal{E}(u) = f \quad \text{в} \quad A, \tag{1}$$

$$L_h(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_h, \tag{2}$$

где Σ_h — часть Σ, $L_h(u)$ — линейный дифференциальный оператор порядка $m-1$, f — заданная функция в A. Пусть U — множество функций из Γ таких, что для каждого $u\in C$ и удовлетворяющего (2)

$$\int_A [v\mathcal{E}(u) - u\mathcal{E}^*(v)]\,dx = 0.$$

Решается вопрос о существовании и единственности «слабых» решений задачи (1)—(2) в следующих смыслах:

I. Для данной $f\in L^p(A)$ найти $u\in L^q(A)$ $(p,\ q\geqslant 1)$, что

$$\int_A [vf - u\mathcal{E}^*(v)]\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad v\in U.$$

II. Для данной $\mu\in\Lambda(A+\Sigma)$ найти $u\in L^q(A)$, что

$$\int_{A+\Sigma} v\,d\mu - \int_A u\mathcal{E}^*(v)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad v\in U.$$

III Для данной $\mu\in\Lambda(A+\Sigma)$ найти $u\in\Lambda(A+\Sigma)$, что

$$\int_{A+\Sigma} v\,d\mu - \int_{A+\Sigma}\mathcal{E}^*(v)\,du = 0 \text{ для } v\in U.$$

На основании одной теоремы функционального анализа, доказанной автором ранее в другой работе, получаются как следствия:

Теорема IV. Для того чтобы существовало «слабое» решение I для любой $f\in L^p(A)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа K такая, что

$$\left(\int_A |v|^{p'}dx\right)^{1/p'} \leqslant K\left(\int_A |\mathcal{E}^*(v)|^{q'}dx\right)^{1/q'}$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1;\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right) \tag{3}$$

для любой $v\in U$. При выполнении (3) существует решение $U\in L^q(A)$ такое, что

$$\left(\int_A |u|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant K\left(\int_A |\mathcal{E}(u)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Теорема V. Для того чтобы существовало слабое решение II для любой $\mu\in\Lambda(A+\Sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа K такая, что

$$\max_{A+\Sigma}|v| \leqslant K\left(\int_A |\mathcal{E}^*(v)|^{q'}\right)^{1/q'} \text{ для } v\in U. \tag{4}$$

При выполнении (4) существует решение $u\in L^q$ такое, что

$$\left(\int_A |u|^q dx\right)^{1/q} \leqslant K v_\mu(A+\Sigma).$$

Аналогичная теорема имеет место для слабого решения III.

Теорема VI. Слабые решения I, II, (III) являются единственными тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}^*(U)$ образует базис пространства $L^{q'}(A)$ $(\mathfrak{G}(A+\Sigma))$, где $\mathfrak{G}$ — пространство непрерывных функций с обычной нормой.

Рассматривается также существование слабого решения I для задачи

$$\mathcal{E}_0(u)+\lambda\mathcal{E}_1(u)=f,\ L_h(u)=0 \text{ на } \Sigma_h, \text{ где } \mathcal{E}_0(u) \text{ и } \mathcal{E}_1(u)$$

операторы порядка m, не зависящие от параметра λ. В. П. Ильин

2940. **Асимптотическое распределение собственных функций и собственных значений для полуэллиптических дифференциальных операторов. Браудер** (The asymptotic distribution of eigenfunctions and eigenvalues for semi-elliptic differential operators. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1957, 43, № 3, 270—273 (англ.)

G — открытое множество точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ в E^n, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ — точки двойственного пространства R^n, индекс $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha=D_{\alpha_1}\ldots D_{\alpha_k}$, $\xi^\alpha=\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_k}$. $A=\sum a_\alpha(x)D^\alpha$ — формально самосопряженный дифференциальный оператор в G, $a_\alpha(x)\in C^\infty(G)$. Пусть $m=(m_1,\ldots,m_n)$, $m_j>0$, точка $\xi^{(m)}=((\xi_1)^{m_1},\ldots,(\xi_n)^{m_n})$, $|\alpha|_m=\sum_{j=1}^k m_{\alpha_j}$. Оператор A называется полуэллиптическим в точке x_0 относительно показателей $(m_1,\ldots,m_n,q)$, если существует окрестность N точки x_0 и бесконечно дифференцируемые координаты $\{y_j\}$ в ней такие, что 1) $A=\sum_{|\alpha|_m\leqslant q} a'_\alpha(y)D_y^\alpha$, $y\in N$; 2) положим $A_0(y,\xi)=$

$= \sum_{|\alpha|_m=q} a_\alpha'(y)\xi^\alpha$; $A_0(y, \xi_{|m|})$ есть положительно определенная форма степени q относительно ξ. $\mathfrak{C}_0^\infty(G)$ — множество функций из $C^\infty(G)$ с компактным носителем, лежащим в G. Оператор A, рассматриваемый на $C_0^\infty(G)$, порождает в $L_2(G)$ симметричный полуограниченный снизу оператор. Пусть A_1 — какое-либо самосопряженное полуограниченное снизу расширение A, E_λ — соответствующее разложение единицы. Спектральная функция $e_{x,\lambda}(y)$ определяется формулой $E_\lambda\psi = \int e_{x,\lambda}(y)\psi(y)\,dy$, $\psi \in C_0^\infty(G)$.

Теорема 1. Пусть x, $y \in G$, $w(x) = \int_{A_0(x,\xi)<1} d\xi$, $b = q^{-1}\sum_{j=1}^n m_j$, $\delta_{xy} = 1$ при $x = y$, $\delta_{xy} = 0$ при $x \neq y$. Когда $\lambda \to +\infty$

$$e_{x,\lambda}(y) = (2\pi)^{-n} w(x)(\delta_{xy} + o(1))\lambda^b.$$

В ограниченных областях с достаточно гладкой границей для некоторого класса граничных задач, изучавшегося автором ранее (Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, 351—361) указана асимптотика собственных значений: при $t \to +\infty$

$$\sum_{\lambda_j \leqslant t} 1 = (1 + o(1))(2\pi)^{-n} t^b \int w(x)\,dx.$$

Доказательство теоремы 1 намечено. М. Ш. Бирман

2941. **Теорема устойчивости для абстрактных дифференциальных уравнений и ее применение к изучению локального поведения решений эллиптических уравнений.** Лакс (A stability theorem for solutions of abstract differential equations, and its application to the study of the local behavior of solutions of elliptic equations. Lax P. D.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 4, 747—766 (англ.)

В гильбертовом пространстве H рассматривается неравенство $\left\| \frac{du}{dt} - Du \right\| \leqslant K\|u\|$ для $0 < t < \infty$, где D — постоянный оператор в H, удовлетворяющий условию $\|(D-\lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d}$ для $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots, \lambda_n \to -\infty$, k и d — постоянные. Пусть $u = u(t)$, $0 < t < +\infty$, принадлежит области определения оператора D, Du непрерывна по t и du/dt существует в сильном смысле и непрерывна для $t > 0$. Доказывается теорема: Если $k < d$, то или $u(t) \equiv 0$ для всех $t > 0$ или $\|u(t)\| \geqslant Ae^{-bt}$ для некоторых постоянных $A > 0$ и $b > 0$. Этот результат применяется для доказательства теоремы Мюллера: Если $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ — решение уравнения $Lu = 0$, $L = \Delta + N$, N — совокупность членов первого порядка, и $u \not\equiv 0$, то нули $u(x)$ имеют конечный порядок. Последнее утверждение понимается в следующем смысле: существуют постоянные $c > 0$ и $b > 0$ такие, что $\|u_r(x)\| \geqslant Cr^b$ для всех $1 > r > 0$, причем $u_r(x) = u(xr)$ и норма $\|u_r\|$ берется в смысле L_2 в единичной сфере с центром в рассматриваемом нуле ($x = 0$). Предполагается, что коэффициенты N дважды дифференцируемы. В § 4 рассматривается произвольный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка Lu в некоторой области D_0 точек x. Решения уравнения $Lu = 0$, по определению, обладают аппроксимационным свойством Рунге, если для любых односвязных областей D_1 и D_2, $D_1 \subset D_2 \subset D_0$ любое решение в D_1 может быть на компактных подмножествах области D_1 равномерно приближено последовательностью решений, допускающих продолжение на D_2. Доказывается, что наличие аппроксимационного свойства Рунге у уравнения $Lu = 0$ равносильно единственности задачи Коши для этого уравнения с данными Коши на любой достаточно гладкой гиперповерхности.

Б. Боярский

2942. **Новые интегральные формулы мажорирования для решений линейного уравнения эллиптического типа и приложения к теории потенциала.** Греко (Nuove formole integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale. Greco Donato), Ricerche mat., 1956, 5, № 1, 126—149 (итал.)

Выводится априорная оценка вторых производных решений линейного эллиптического уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x); \quad (1)$$

предполагается, что коэффициенты удовлетворяют условию Гёльдера (равно как и вторые производные от решения) в замкнутой ограниченной области T. Оценка в любой внутренней подобласти Δ имеет вид

$$\int_\Delta \sum \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|^p dx \leqslant C\int_T \left(|f|^p + |u|^p + \sum\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right) dx \; (p > 1); \quad (2)$$

указывается, от чего зависит константа C. Если вторые производные от функций, представляющих границу области, удовлетворяют условию Гёльдера, то можно положить $\Delta = D$, однако справа надо добавить еще интегралы от p-x степеней граничного значения функции u и его первых и вторых производных (взятых вдоль границы). Эти результаты применяются к исследованию дифференциальных свойств обобщенного потенциала вида

$$w(x) = \int_T L(x, y)z(y)\,dy \; (z \in L_p(T)),$$

где $L(x, y)$ — функция Леви, отвечающая заданному уравнению, и к выводу оценки

$$\int_T \sum \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right|^p dx \leqslant C\int_T |z|^p\,dx.$$

Производные понимаются здесь как производные почти всюду.

Примечание референта. Аналогичные оценки получены А. И. Кошелевым (см. РЖМат, 1957, 5583), а для случая двух независимых переменных — им же еще ранее (РЖМат, 1954, 1661). А. Д. Мышкис

2943. **Теорема существования решения задачи Дирихле для линейного уравнения с m независимыми переменными.** Греко (Un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ad un'equazione lineare ellittica in m variabili. Greco Donato), Ricerche mat., 1956, 5, № 1, 150—158 (итал.)

Результаты предыдущей работы автора (реф. 2942) применяются к доказательству существования решения задачи Дирихле для уравнения (1). При этом коэффициенты a_{ij} предполагаются непрерывными, b_i, $c \leqslant 0$ и свободный член f — измеримыми и ограниченными в T, а задаваемая граничная функция — дважды непрерывно дифференцируемой. Решение, существование которого гарантируется, обладает в T первыми производными, удовлетворяющими условию Гёльдера с любым показателем $\lambda < 1$, и (почти всюду в T) вторыми производными, суммируемыми в любой степени. Уравнение удовлетворяется почти всюду. Для доказательства коэффициенты и правая часть аппро-

ксимируются достаточно гладкими, после чего компактность полученного семейства решений доказывается с помощью оценки (2).

Аналогичное утверждение сформулировал Миранда (Miranda C., Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Ergebn. der Math., Springer, Berlin. 1955), опираясь на результаты Морри (РЖМат, 1953, 750).

А. Д. Мышкис

2944. Некоторые классы теоретико-функциональных решений уравнения Лапласа и волнового уравнения. Такасу (Some classes of function-theoretical solutions of the Laplacian and the wave equation. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1956, 4, № 1, 65—79 (англ.)

Пользуясь теорией функций тернарной комплексной переменной, развитой в работах Нисигаки (РЖМат, 1957, 7843), автор строит классы частных решений как обычного, так и обобщенного уравнения Лапласа, где под обобщенным оператором Лапласа понимается следующее: $A\Phi_{xx}+B\Phi_{yy}+C\Phi_{zz}=0$, а также волнового уравнения в многомерных областях.

А. В. Бицадзе

2945. Расширенное асимптотическое распределение собственных значений для ограниченных областей в n-мерном пространстве. Браунелл (Extended asymptotic eigenvalue distributions for bounded domains in n-space. Brownell F. H.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 1, 119—166 (англ.)

Изучается асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в конечной области D с границей B n-мерного евклидова пространства для задач Дирихле и Неймана.

Приведем формулировку одного из основных результатов работы: Пусть граница B удовлетворяет условиям:

1) В окрестности каждой точки границы она представима уравнением $x_{k_q}=g_q(x_1, x_2, \ldots, x_{k_q-1}, x_{k_q+1}, \ldots, x_n)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми g_q.

2) Выполняется условие Гёльдера

$$\left|g''_{q,k,k'}(\tilde{x})-g''_{q,k,k'}(\tilde{x}')\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\,|\tilde{x}-\tilde{x}'|^{\eta}\,(k,\ k'\neq k_q,\ 0<\eta\leqslant 1)$$

Тогда для числа собственных значений λ_j, меньших данного числа λ, $N_\nu(\lambda)$ ($\nu=0$ соответствует условию Дирихле и $\nu=1$ — условию Неймана) справедлива асимптотическая формула

$$N_\nu(\lambda)=\frac{\mu_n(D)}{(2\sqrt{\pi})^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\lambda^{\frac{1}{2}n}+$$

$$+(-1)^{\nu+1}\frac{\sigma_n(B)}{4(2\sqrt{\pi})^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}+$$

$$+\left[\int_B q_1(y)\,d\sigma_n(y)\right]\frac{1}{3(2\sqrt{\pi})^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\lambda^{\frac{1}{2}(\lambda-2)}+$$

$$+\tilde{O}\left(\lambda^{\frac{1}{2}(n-2-\eta)}\ln\lambda\right).$$

В этой формуле $\mu_n(D)$ — объем области D, $\sigma_n(B)$ — площадь границы B, $q_1(y)$ выражается некоторым образом через кривизну границы B, $\tilde{O}$ есть логарифмически-гауссово усреднение (РЖМат, 1956, 8852).

Доказательство основано на предварительном изучении асимптотического поведения при $\omega\to\infty$ функции Грина оператора $-\Delta+\omega^2$. В этом пункте работа соприкасается с исследованиями Плейеля (Pleijel Å), который предполагал, что граница бесконечно дифференцируема (РЖМат, 1957, 2353), а также с одной работой Гринберга (РЖМат, 1955, 3230). Б. М. Левитан

2946. О решениях уравнения Лапласа в случае цилиндрической симметрии. Коломбо (Sur les solutions de l'équation de Laplace dans le cas d'une symétrie cylindrique. Colombo Serge), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 20, 1471—1473 (франц.)

Решение $u(r, z)$ уравнения

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

при условиях $u(r, 0)=f(r)$, $\lim\limits_{z\to\infty}u(r, z)=0$, дается в виде

$$u(r, z)=\int_0^\infty e^{-\xi z}\bar{f}(\xi)\,J_0(r\xi)\,\xi\,d\xi,$$

где

$$\bar{f}(\xi)=\int_0^\infty f(\rho)\,J_0(\rho\xi)\,\rho\,d\rho.$$

Замена $r=\sqrt{2t}$, $\xi=\sqrt{2s}$ и преобразование Лапласа дают:

$$\int_0^\infty e^{-tp}u(\sqrt{2t}, z)\,dt=\frac{1}{p}\Phi\left(\frac{1}{p}\right)\operatorname{Re}p\geqslant 0,$$

где

$$\Phi(p)=L\left\{e^{-z\sqrt{2s}}\bar{f}(\sqrt{2s})\right\},$$

L — преобразование Лапласа.

Отсюда, используя формулу обращения для преобразования Лапласа, автор получает окончательное выражение для решения

$$u(r, z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{r^2p/2}\Phi\left(\frac{1}{p}\right)\frac{dp}{p},$$

где c — положительная константа.

Решение уравнения (1) при условиях: $u(r, 0)=f(r)$, $u(r, h)=g(r)$, для $0<z<h$ дается формулой

$$u(r, z)=\int_0^\infty\left[\frac{\operatorname{sh}(h-z)\xi}{\operatorname{sh}h\xi}\bar{f}(\xi)+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sh}z\xi}{\operatorname{sh}h\xi}\bar{g}(\xi)\right]J_0(r\xi)\,\xi\,d\xi.$$

Автор утверждает, что этот метод распространяется и на параболическое уравнение $\Delta u=c\partial u/\partial t$ одновременным применением преобразований Ханкеля и Лапласа.

Наконец, рассмотрено решение уравнения Лапласа вида $u(r, \varphi, z)=v(r, z)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}m\varphi$. Для $v(r, z)$ получено выражение

$$v(r, z)=\int_0^\infty e^{-\xi z}\bar{f}(\xi)\,J_m(\xi r)\,\xi\,d\xi.$$

Р. С. Гусарова

2947. Обобщенная теория функций и соответствующая задача Дирихле 1. Сандерс (A generalized function-theory and the related Dirichlet problem. I. Sanders James), Ann. Math., 1956, 64, № 3, 523—543 (англ.)

Автор строит теорию функций для уравнения четвертого порядка эллиптического типа следующего вида: $N(N(\Phi))=N^2(\Phi)=0$, где $N(\Phi)=\sigma^{-1}(\sigma\Phi_x)_x+\tau(\tau^{-1}\Phi_y)_y$; функции $\sigma=\sigma(x)$ и $\tau=\tau(y)$ предполагаются принадлежащими классу C^3, $\sigma>0$, $\tau>0$. При $\sigma\equiv 1$ и $\tau\equiv 1$ получается теория бигармонических функций. Случай $N(\Phi)=0$, это так называемый случай Σ-моногенных функций, рассмотрен в работе Берса и Гелбарта (Bers L., Gelbart A., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 56, 67—93). Комплексная функция $f(z)=\Phi+i\Psi$ класса C^4 в некоторой области D переменной $z=x+iy$ называется Σ_2-моногенной в D, если в D удовлетворяется система уравнений $\sigma(x)\Phi_x+\tau(y)\Psi_y=0$, $N'(\Phi)=0$, где $N'(\Phi)\equiv\sigma(\sigma^{-1}\Phi_x)_x+\tau(\tau^{-1}\Phi_y)_y$. Отсюда следует $N^2(\Phi)=0$. Теория Σ_2-моногенных функций аналогична теории Σ-моногенных функций. В частности для Σ_2-моногенных функций определяется процесс Σ_2-дифференцирования и интегрирования, формальные степени и ряд Тэйлора. Автор строит фундаментальное решение и с его помощью аналог интегральной формулы Коши. Указывается также на возможность обобщения этих результатов на уравнения вида $N^{2m}(\Phi)=0$, $m>1$. Статья представляет только первую часть работы. Задачу Дирихле предполагается рассмотреть во второй части. Б. Боярский.

2948. **Техника преобразований для краевых задач уравнений в частных производных четвертого порядка.** Эринген (A transform technique for boundary-value problems in fourth-order partial differential equations. Eringen A. Cemal), Quart. J. Math., 1955, 6, № 24, 241—249 (англ.)

Решается уравнение

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}\right]+q(x,y)\cdot v=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}a_i(y)\frac{\partial^i v}{\partial y^i}, \qquad (1)$$

рассматриваемое в прямоугольнике $a_1\leqslant x\leqslant b_1$, $a_2\leqslant y\leqslant b_2$ с краевыми условиями

$$\sum_{j=1}^{4}a_{ij}\frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}}v(a_1,y)=\varphi_i(y);$$

$$\sum_{j=1}^{4}b_{ij}\frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}}v(b_1,y)=\bar{\varphi}_i(y)\quad(i=1,2)$$

$$w_j(v)=\psi_j(x)\quad(j=1,2,\ldots,m).$$

Матрицы (a_{ij}) и (b_{ij}) имеют ранг 2, выполняются указанные в работе условия самосопряженности; w — система m линейно независимых условий, тождественно удовлетворяющихся при $y=a_2$ и $y=b_2$.

Показано, как при помощи интегрального преобразования получить решение в виде ряда

$$v(x,y)=\sum_n v_T(\lambda_n,y)\,u(x,\lambda_n)$$

по собственным функциям $u(x,\lambda_n)$ граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, соответствующего левой части уравнения (1) с первой группой краевых условий. Коэффициенты $v_T(\lambda_n,y)$ находятся как решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений порядка m. Подробно разобран пример.

М. И. Серов

2949. **Первая краевая задача для уравнения эллиптического типа четвертого порядка, вырождающегося на границе области.** Захаров В. К., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 4, 694—697

В области D рассматривается эллиптическое уравнение

$$(au_{xx})_{xx}+(bu_{xy})_{xy}+(cu_{yy})_{yy}+$$

$$+\frac{1}{2}(du_{xx})_{xy}+\frac{1}{2}(du_{xy})_{xx}+\frac{1}{2}(eu_{xy})_{yy}+$$

$$+\frac{1}{2}(eu_{yy})_{xy}+\ldots=h(x,y), \qquad (1)$$

члены, содержащие производные ниже 4-порядка, заменены точками; коэффициенты уравнения достаточно гладки; область D лежит в верхней полуплоскости, Γ — граница области D, $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1$, где Γ_0 — отрезок оси x.

Тогда существует такая функция $\lambda(x,y)$, что квадратичная форма

$$B(\xi,\eta,\zeta;x,y)\equiv a\xi^2+(b+\lambda)\eta^2+c\zeta^2+d\xi\eta+$$

$$+e\eta\zeta-\lambda\xi\zeta$$

положительно определена в $\bar{D}$, кроме Γ_0.

Пусть в области D $c_1y^\alpha\leqslant c(x,y)\leqslant c_2y^\alpha$, $c_3y^3\leqslant b+\lambda\leqslant c_4y^3$, $B(\xi,\eta,\zeta;x,y)\geqslant c_5(a\xi^2+y^3\eta^2+y^\alpha\zeta^2)$, где $c_1,\ldots,c_5$ — положительные постоянные.

Постановка первой краевой задачи: найти обобщенное решение уравнения (1), для которого

1) в случае $0\leqslant\alpha<1$, $\beta\geqslant 0$ $u=0$, $du/dn=0$ на $\Gamma_0+\Gamma_1$;

2) в случае $\beta\geqslant 1$, $1\leqslant\alpha<3$ (или $0\leqslant\beta<1$, $\alpha\geqslant 1$) $u=0$ на $\Gamma_0+\Gamma_1$, $du/dn=0$ на Γ_1;

3) в случае $\alpha\geqslant 3$, $\beta\geqslant 1$ $u=0$, $du/dn=0$ на Γ_1.

Во всех случаях обращение в нуль на границе понимается в среднем. Кроме того, предполагается, что коэффициенты при производных 3-го порядка и ниже удовлетворяют определенным неравенствам.

Утверждается, что при сделанных предположениях первая краевая задача в указанной выше постановке имеет единственное решение для любой правой части $h(x,y)$ в уравнении (1), принадлежащей пространству L_2 с определенным весом. А. Ф. Филиппов

2950. **Теоремы вложения для пространства с метрикой, вырождающейся на прямолинейном участке границы области.** Захаров В. К., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 3, 468—471

Пусть D — область в верхней полуплоскости, часть ее границы — отрезок Γ_0 оси x, R_0 — множество элементов вида $Gu=(u_{xx},u_{xy},u_{yy})$, где $u\in\Omega_0$, Ω_0 — множество непрерывных в «D» функций с кусочно-непрерывными вторыми производными, обращающихся в нуль в граничной полоске области D.

Обозначим через R замыкание R_0 в метрике

$$\|Gu\|_R=\left[\iint_D B(u_{xx},u_{xy},u_{yy};x,y)\,dxdy\right]^{1/2},$$

где квадратичная форма

$$B(\xi,\eta,\zeta;x,y)\equiv a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2+d\xi\eta+e\eta\zeta+f\xi\zeta$$

положительно определена в замкнутой области $\bar{D}$, кроме Γ_0; коэффициенты $a,\ldots,f$ непрерывны в $\bar{D}$, при $y\to 0$ $a\to 0$ (или $c\to 0$). Пусть Ω — замыкание Ω_0, определяемое так: если $u_n^0\in\Omega_0$ и, последовательность Gu_n^0 сходится в R, то $\lim u_n^0=u\in\Omega$, и под выражением Gu понимается $\lim Gu_n^0$. Тогда $Gu=(u_{xx},u_{xy},u_{yy})$, где производные — обобщенные в смысле С. Л. Соболева.

Теорема. Если при $(x, y)\in D$ и любых ξ, η, ζ

$$B(\xi, \eta, \zeta; x, y) \geqslant \text{const} \cdot y^{\alpha}\zeta^2, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant \alpha < 3$, то любая функция $u \in \Omega$ принимает в среднем значение 0 на Γ_0; если $0 \leqslant \alpha < 1$, то это же справедливо для du/dy; если, кроме того,

$$B(\xi, \eta, \zeta; x, y) \geqslant \text{const} \cdot y^{3}\eta^2, \qquad (2)$$

где $0 \leqslant \beta < 1$, то это же справедливо и для du/dx.

Аналогичные утверждения устанавливаются и для других типов вырождения на Γ_0 квадратичной формы B. Установлены также достаточные условия для того, чтобы $u \in \Omega$ (определенный порядок роста или убывания функций u, u_x, u_y при $y \to 0$).

Далее утверждается, что в случае выполнения неравенств (1) и (2) для любой $u \in \Omega$ имеем

$$\iint_D \sigma(x, y)\,[u(x, y)]^2\,dxdy \leqslant \text{const}\,\|Gu\|_R,$$

где функция σ растет при $y \to 0$, порядок роста устанавливается в зависимости от величин α и β в (1) и (2). Аналогичные теоремы сформулированы для $du\,dx$ и $du\,dy$. А. Ф. Филиппов

2951. О полноте функции напряжений Буссинека — Папковича. Юбанкс, Штернберг (On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions. Eubanks R. A., Sternberg E.), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 5, 735—746 (англ.)

Авторы другим методом доказывают некоторые теоремы референта (РЖМат, 1955, 1290) о возможности представления общего решения уравнений теории упругости в перемещениях (уравнений Ляме)

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla\cdot u = 0, \qquad (1)$$

u — вектор перемещения, ν — коэффициент Пуассона при помощи трех гармонических функций в случае односвязной области (конечной и бесконечной). Доказывается, что в случае звездной области в решении Буссинека — Папковича

$$u = \nabla(\varphi + r\cdot\psi) - 4(1-\nu)\psi \qquad (2)$$

может быть опущена гармоническая функция φ без уменьшения общности решения (2): ψ — гармонический вектор, r — радиус-вектор точки области упругого тела. В цитированной работе референта сформулированы также более общие теоремы о выражении решения уравнения (1) через три гармонические функции. М. Г. Слободянский

2952. Выражение для функции Грина для одной частной задачи Трикоми. Жермен (An expression for Green's function for a particular Tricomi problem. Germain Paul), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 2, 113—124 (англ.)

Для уравнения

$$Tu \equiv zu_{xx} + u_{zz} = 0 \qquad (1)$$

в полубесконечной области Δ_0, лежащей правее полуоси OB ($x=0$, $z>0$) и характеристики OC: $3x - 2(-z)^{3/2} = 0$ при $z<0$, рассматривается краевая задача Трикоми T: определить в Δ_0 решение уравнения (1), регулярное на бесконечности, по заданным его значениям на OB и на OC.

После замены независимых переменных $t = x/r$; $\xi = \ln r$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $3y = 2z^{3/2}$, уравнение (1) примет вид:

$$Tu = r^{-2z}Mu = r^{-2z}[(1-t^2)u_{tt} + u_{\xi\xi} +$$

$$+ (1/3)(u_\xi - 4tu_t)] = 0, \qquad (2)$$

а область Δ_0 перейдет в полуплоскость $t>0$ плоскости ξ, t, причем квадрант $x>0$, $z>0$ отобразится на полосу $0<t<1$. В плоскости переменных $\xi, \lambda\left(\lambda = \int_f^1 (1-v^2)^{-2/3}\,dv\right)$ строится функция Грина задачи T (РЖМат, 1957, 3173) и «сопряженной задачи T^*» (когда краевые значения решения задаются на OB и на «характеристике в бесконечности» $3x + 2(-z)^{3/2} = \infty$). После применения преобразования Фурье $U = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\alpha\xi)\,u\,d\xi$ к уравнению $Mu = -(2/3)r_0^{-1}z_0\delta_{\xi_0, t_0}$ (здесь δ_{ξ_0, t_0} — распределение Дирака (Schwartz L., Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1951)) построение функции Грина сводится к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$U_{\lambda\lambda} + (1-t^2)^{1/3}[(2/3)\,i\pi\alpha - 4\pi^2\alpha^2]\,U =$$

$$= (2/3)^{1/3}r_0^{-1/3}\exp(2i\pi\alpha\xi_0)\,\delta_{\lambda_0},$$

решение которой записывается в явном виде. После обратного преобразования Фурье, значения производной по x на OB полученной функции Грина для задач T и T^* выражаются через обобщенные гипергеометрические функции.

Тот же прием применяется для построения функции Грина задачи Дирихле для уравнения (1) в квадранте $x>0$, $z>0$ (в плоскости ξ, t — полоса $0<t<1$) и для построения функции Грина так называемой обобщенной задачи Трикоми для уравнения (1), когда в полуплоскости $z<0$ краевые значения решения задаются на произвольной кривой, удовлетворяющей условию $3x > 2(-z)^{3/2}$. Последняя задача рассматривается в полубесконечной области Δ, лежащей правее кривых OB' ($z>0$) и OC' ($z<0$), таких, что в плоскости (ξ, t) они переходят соответственно в линии $t = t_3 = \text{const}$, $t = t_4 = \text{cosnt}$ ($0 < t_3 < 1 < t_4 < +\infty$), краевые значения решения задаются на OB' и OC'.

Имеются опечатки; для последней задачи доказательства лишь намечены. И. Л. Кароль

2953. Смешанная задача для уравнения $\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0$ с данными Коши по кривой $\theta = s(\sigma)$. Баранцев Р. Г., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 5, 919—922

Для уравнения

$$\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0, \quad K(\sigma) > 0,$$

в полосе $S\{\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1;\ -\infty < \theta < +\infty\}$ ищется решение по данным $\psi = \text{const}$ на прямых $\sigma = \sigma_0$, $\sigma = \sigma_1$ и данным Коши на отрезке некоторой нехарактеристической кривой $\theta = s(\sigma)$. Также, как в предыдущей заметке автора (1) (РЖМат, 1958, 1226), задача приводится к виду:

$$Lv \equiv v_{\zeta\zeta} - v_{\vartheta\vartheta} + N(v)\,v = 0, \qquad (1)$$

$$v|_{\zeta=0} = v|_{\zeta=1} = 0;\ v|_{\vartheta=l(\zeta)} = p(\zeta), \qquad (2)$$

$$v_\vartheta|_{\vartheta=p(\zeta)} = q(\zeta),\ 0 \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

где

$$N(\zeta) = -K^{-1/4}(\sigma)\, d^2K^{1/4}(\sigma):d\zeta^2;\ cd\zeta = \sqrt{K(\sigma)}\, d\sigma;$$

$$cd\vartheta = d\theta;\ c = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sqrt{K(\sigma)}\, d\sigma,$$

а $l(\zeta)$ удовлетворяет условию:

$$|l(\zeta') - l(\zeta'')| < |\zeta' - \zeta''|;\ \zeta',\ \zeta'' \in [0,\ 1]. \qquad (3)$$

Как и в (1), автор ищет решение задачи (1)—(2) в виде:

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n B_n(\zeta) \exp(-i\lambda_n \vartheta), \qquad (4)$$

где λ_n и $B_n(\zeta)$ при $n > 0$ — собственные числа и собственные функции задачи Штурма—Лиувилля:

$$B_n'' + [\mu_n^2 + N(\zeta)]\, B_n = 0;\ B_n(0) = B_n(1) = 0, \qquad (5)$$

удовлетворяющие условиям:

$$\mu_{-n} = -\mu_n,\ B_{-n}(\zeta) = -B_n(\zeta),$$

а коэффициенты c_n определяются из разложения $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ в ряды:

$$p(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \bar{z}_n;\ q(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(-i\lambda_n)\, \bar{z}_n, \qquad (6)$$

где

$$z_n = B_n(\zeta) \exp[i\lambda_n l(\zeta)] \qquad (7)$$

и с учетом ортогональности $z_n(\zeta)$ на $(0, 1)$ c_m формально даются формулой

$$c_n = \frac{i}{2\lambda_n} \int_0^1 e^{i\lambda_n l} \{B_n[p'l' + q(1 - l'^2) - i\lambda_n p] - B_n' p l'\}\, dy. \qquad (8)$$

Устанавливается, что если $l'(\zeta)$; $p'(\zeta)$; $q(\zeta)$ имеют ограниченное изменение на $[0, 1]$, $p(0) = p(1) = 0$ и $l(\zeta)$ удовлетворяет условию (3), то ряды (6) с коэффициентами, определяемыми по (8), сходятся соответственно к $p(\zeta)$ и $\frac{1}{2}[q(\zeta - 0) + q(\zeta + 0)]$. При этих условиях ряд (4) сходится равномерно в полосе S. Если существуют N'', l'', q'', $(ql' - p)''$ с ограниченным изменением в $[0, 1]$ и в точках $(0, 0)$, $(1, l(1))$ выполнены условия согласования для первых и вторых производных, то ряд (4) дает классическое решение задачи (1)—(2) во всей полосе S. И. Л. Кароль

2954. **Об эллиптико-параболических линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Фикера** (Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine. Fichera Gaetano), Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, Sez. 1, 5, № 1, 30 p. (итал.)

На множестве A r-мерного пространства, ограниченном границей Σ, состоящей из конечного числа частей $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ регулярных гиперповерхностей класса 1, рассматривается уравнение

$$E(u) = \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{r} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f\ \ (a_{hk} = a_{kh}), \qquad (1)$$

которое предполагается эллиптическим на подмножестве $\Omega \subset A$ и параболическим на $A - \Omega$. a_{hk} — функции класса 2 в $A + \Sigma$, b_h — класса 1, C — непрерывна. Для этого уравнения даны постановки краевых задач, а также необходимые и достаточные условия существования «слабых» решений. Доказывается, что рассмотренные задачи корректно поставлены в смысле Адамара.

Пусть Σ_h' — множество точек $x \in \Sigma_h$, для которых $\sum_{hk}^{1,r} a_{hk}(x) \cos(x_h, n) \cos(x_k, n) = 0$, n — внутренняя нормаль в Σ_h в точке x. На Σ_h определим функцию

$$b(x) = \sum_{h=1}^{r} \left(b_h - \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k}\right) \cos(x_h, n).$$

$\Sigma_h^{(1)}$ — множество точек Σ_h, где $b(x) \geqslant 0$. Положим

$$\Sigma^{(1)} = \Sigma_1^{(1)} + \ldots + \Sigma_p^{(1)};\ \Sigma^{(2)} = \left(\Sigma_1' + \ldots + \Sigma_p'\right) - \Sigma^{(1)};\ \Sigma^{(3)} = \Sigma - \left(\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}\right).$$

Для уравнения (1) ставится задача: найти функцию u, удовлетворяющую (1) и краевым условиям:

$$u(x) = g(x),\ x \in \Sigma^{(2)}$$

$$\alpha(x)\, u(x) + \beta(x) \frac{\partial u}{\partial l} = h(x),\ x \in \Sigma^{(3)}. \qquad (2)$$

Пусть $C(E)$ — класс функций: 1) непрерывных в $A + \Sigma$, 2) $A + \Sigma$ можно разбить на конечное число регулярных областей $T_1, \ldots, T_s$, не имеющих общих внутренних точек таких, что если $b_h(a_{hk}) \not\equiv 0$ в $A + \Sigma$, то $\frac{\partial u}{\partial x_h}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}\right)$ существует для каждой внутренней точки T_i и является непрерывной функцией в T_i; 3) если $a_{hk} \not\equiv 0$ в $A + \Sigma$, то $\frac{\partial u}{\partial x_h}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ непрерывны в $A + \Sigma$. Для функций класса $C(E)$, удовлетворяющих частным случаям условий (2), указаны оценки, из которых следуют теоремы единственности.

Пусть V — класс функций таких, что: 1) $v \in C(E)$, 2) для любой u класса 1 в $A + \Sigma$ и такой, что $E(u)$ непрерывна в A и ограничена в $A + \Sigma$ и удовлетворяющей условиям:

$$u = 0 \text{ на } \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)'},$$

$$\frac{du}{dv} \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \cos(x_h, n) \frac{du'}{dx_k} = 0 \text{ на } \Sigma^{(3)'} \qquad (2')$$

справедливо

$$\int_A (uE^*(v) - vf)\, dx = 0, \text{ где } E^*(v) = \sum_{h,k}^{1,r} \frac{\partial^2 (a_{hk} v)}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial (b_h v)}{\partial x_h} + cv. \qquad (3)$$

Функция $u \in L^q(A)$ называется слабым решением $[L^q, L^p]$ задачи (1), (2'), если для $f \in L^p(A)$ (3) выполнено для любой $v \in V$. Имеют место утверждения:

I. Условием, необходимым и достаточным для существования слабого решения $[L^q, L^p]$ задачи (1), (2')

какое бы ни было $f \in L^p(A)$ является существование константы K такой, что для любой $v \in V$

$$\left(\int_A |v|^{p/(p-1)}dx\right)^{(p-1)/p} \leqslant K\left(\int_A |E^*(v)|^{q/(q-1)}dx\right)^{(q-1)/q}$$

II. Слабое решение $[L^q, L^p]$ является единственным тогда и только тогда, когда область значений $E^*(v)$ $(v \in V)$ образует базис пространства $L^{q/(q-1)}(A)$.

III. Если слабое решение $[L^q, L^p]$ существует для каждой $f \in L^p(A)$ и является единственным, то существует K такое, что

$$\left(\int_A |u|^q dx\right)^{1/q} \leqslant K\left(\int_A |f|^p dx\right)^{1/p}.$$

Аналогичные утверждения имеют место для «слабых» решений в иных смыслах, определенных в работе.

В работе проводится также исследование качественных свойств «слабых» решений уравнения 1-го порядка.

В. П. Ильин

2955. О решении уравнения колебания на всей оси времен. Левина С. Н., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 1, 18—20

В предположении $x > 0$ ищется решение уравнения

$$u_{tt} - \Delta u - cu = 0$$

такое, что $u(t, 0, y) = f(t, y)$ и $\lim_{x\to\infty} u(t, x, y) = 0$. Методами операционного исчисления устанавливается эффективная формула для $u(t, x, y)$

$$u(t, x, y) = f(t-x, y) -$$

$$-\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{t-x}\frac{1}{(t-\tau)^2-x^2}\int_{y-\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}}^{y+\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}}\frac{y-\sigma}{\sqrt{(t-\tau)^2-x^2-(y-\sigma)^2}}\times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\sqrt{c}\sqrt{(t-\tau)^2-x^2-(y-\sigma)^2}\right] f_3(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau +$$

$$+\frac{x\sqrt{c}}{\pi}\int_{-\infty}^{t-x}\frac{1}{(t-\tau)^2-x^2}\int_{y-\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}}^{y+\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}} f(\tau,\sigma)\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\sqrt{c}\sqrt{(t-\tau)^2-x^2-(y-\sigma)^2}\right] d\sigma d\tau.$$

Указываются некоторые достаточные условия, налагаемые на функцию $f(t, y)$, при которых приведенная формула действительно дает решение.

Примечание референта. В тексте статьи автор утверждает, что известная формула Даламбера, дающая решение задачи $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x)$ при произвольных f и F не имеет физического смысла ввиду того, что значения функции $u(x, t)$ в момент времени t зависят от значений начальных функций f и F в моменты времени более поздние, чем t. Это утверждение (не имеющее, впрочем, непосредственного отношения к содержанию работы) является спорным. (Ср. физическую интерпретацию формулы Даламбера, имеющуюся в учебниках по уравнениям математической физики, например в книге Тихонов и Самарский, Уравнения математической физики, 1951, стр. 50).

И. И. Огиевецкий

2956. Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений. Гординг (Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. Gårding Lars), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 71, Paris, 1956, 71—89, Discuss., 90 (франц.)

Работа посвящена упрощению доказательства И. Г. Петровского существования решения задачи Коши для линейного гиперболического уравнения. Основой доказательства теоремы существования у автора, как и у И. Г. Петровского, является вывод неравенства энергетического типа.

Схема вывода основного энергетического неравенства в общих чертах такова

Пусть

$$a(x, D)f = g$$

$$\left(a(x, D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha;\quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_\nu^{\alpha_\nu};\quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j};\right.$$

$$\left. x = x_1, \ldots, x_n\right)$$

рассматриваемое уравнение гиперболического типа. Выделим главную часть $a_0(x, D)$ нашего оператора, т. е. те члены, которые содержат дифференцирования лишь высшего порядка. Будем рассматривать $a_0(x, \xi)$ $(\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ как многочлен относительно «временной» переменной ξ_1. В силу гиперболичности уравнения, $a_0(x, \xi)$ будет по ξ_1 иметь вещественные различные корни. Пусть $b(x, \xi)$ — любой многочлен от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, имеющий по ξ_1 вещественные корни, разделяющие корни $a_0(x, \xi)$ $\left(\text{например, } b(x, \xi) = \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial \xi_1} a_0(x, \xi)\right)$.

Для $\operatorname{Re}(a(x, D)f \cdot b(x, D)f)$ нетрудно вывести соотношение

$$\operatorname{Re}(a(x, D)f \cdot b(x, D)f) = \sum_{j=1}^{\nu} D_j A_j(f) + A^0(f), \quad (1)$$

где сумма $\sum_{j=1}^{\nu} D_j A_j(f)$ заключает в себе все производные от f высшего порядка. Если закрепить x, то с помощью равенства Парсеваля можно установить для любой гиперплоскости $x_1 = \text{const}$ неравенство

$$\int_{x_1=\text{const}} A_1(f)\,dx > C \int_{x_1=\text{const}} \sum_{j=1}^{m} |D^j f|^2\,dx \quad (2)$$

$(m+1$ — порядок уравнения, $A_1(f)$ определяется равенством (1)).

Для переменных коэффициентов, используя (2) и метод «разложения единицы», удается доказать ослабленный вариант неравенства (2).

С помощью дифференцирования уравнения $af = g$ можно доказать неравенства типа (2), содержащие производные от f более высокого порядка.

Искомые «априорные» оценки для интегралов энергетического типа от решений уравнения $af = g$ получаются после этого путем, аналогичным получению соответствующих оценок для волнового уравнения.

Существование решения задачи Коши при нулевых начальных данных эквивалентно плотности в рассматриваемом классе функций множества $\{g\}$, где $g = af$ и f удовлетворяет нулевым начальным условиям. Доказательство этой плотности, эквивалентно установлению теоремы единственности решения задачи Коши для сопряженного оператора $a^*(x, D)$ в классе функционалов над рассматриваемым классом функций. Эта теорема единственности легко вытекает из одного неравенства, доказанного во второй части работы.

В. М. Бабич

2957. О построении разрывных решений квазилинейных уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении «коэффициента вязкости» к нулю. Ладыженская О. А., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 2, 291—294

Для уравнения

$$du/dt + d\varphi(x, t, u)/dx = 0 \quad (\varphi''_{uu} > \alpha > 0)$$

исследуется задача Коши

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

в большой области изменения t и x.

Начальная функция u_0 аппроксимируется достаточно гладкими функциями u_0^n, а функция φ — достаточно гладкими функциями φ_m. При этом предполагается, что u_0^n могут быть выбраны удовлетворяющими условию $du_0^n/dx \leqslant C$.

Показывается, что решение $u_{n,m}^{\varepsilon}$ параболического уравнения

$$\partial u/\partial t + \partial \varphi_m/\partial x = \varepsilon \partial^2 u/\partial x^2,$$

удовлетворяющее начальным условиям $u|_{t=0} = u_0^n$ стремится при $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$, $m \to \infty$ к функции u, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} (u\Phi_t + \varphi\Phi_x)\,dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\Phi(x, 0)\,dx = 0$$

для любой непрерывно дифференцируемой финитной функции $\Phi(t, x)$.

Показывается, что полученное решение u удовлетворяет неравенству $\dfrac{u(x+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta} < C(T, R)$ для $t \in [0, T]$, $|x| \leqslant R$, $\Delta > 0$. Формулируется теорема о единственности решения задачи Коши в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\frac{u(x+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta} < M(t),\ x \in (-R, R),\ \Delta > 0, \qquad (1)$$

$$\int_0^T M(t)\,dt < \infty. \qquad (2)$$

Примечание референта. Результаты реферируемой заметки известны и опубликованы ранее О. А. Олейник (Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3 (65), 229; РЖМат, 1957, 8642). В частности, теорема единственности при условии (1) доказана без дополнительного требования (2). Е. М. Ландис

2958. **Смешанная граничная задача для уравнения теплопроводности.** Маджонес (Problemi al contorno misti per l'equazione del calore. Magenes Enrico), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova 1955, 24, 1—28 (итал.)

Пусть D — ограниченная область m-мерного евклидова пространства $(x_1, \ldots, x_m)$ с гладкой границей FD. Обозначим через F_1D и F_2D ($F_1D + F_2D = FD$) какие-либо части FD. В цилиндрической области $\tau = D \times [0, y_0]$ ($(x_1, \ldots, x_m) \in D$, $0 \leqslant y \leqslant y_0$) рассматривается смешанная задача для уравнения

$$E(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u|_{y=0} = 0\ ((x_1, \ldots, x_m) \in D),\ u|_{S_1} = 0 \quad (S_1 = F_1D \times [0, y_0]),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_2} = \delta \quad (S_2 = F_2D \times [0, y_0]). \qquad (2)$$

К этой задаче легко сводится соответствующая задача для неоднородного уравнения $E(u) = f(y_1, x_1, \ldots, x_m)$ с начальным и краевыми условиями $u|_{y=0} = \mu_1$, $u|_{S_1} = \mu_2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_2} = \delta^*$, если ввести новую неизвестную функцию.

Ограничиваясь для упрощения изложения случаем $m = 2$, автор показывает, что поставленная краевая задача при квадратично суммируемом по S_2 δ имеет единственное квадратично суммируемое по τ регулярное решение, удовлетворяющее условиям (2) в смысле среднеквадратичного приближения по параллельным поверхностям. Л. Н. Слободецкий

2959. **Решение некоторых задач уравнения теплопроводности.** Берлянд Х. Л. (Розв'язування деяких задач рівняння теплопровідності. Берлянд Х. Л.), Наук. зап. Кам'янець-Подільськ. держ. пед. ін-т, 1956, 2, 15—19 (укр.)

Решаются некоторые граничные задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$$

методом наложения решений. Значение решения граничной задачи указывается в начале координат. В. Я. Скоробогатько

2960. **Опыт решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка со многими переменными.** Мамбриани (Un saggio di risoluzione, con la pluriderivazione, di certe equazioni differenziali del secondo ordine non lineari. Mambriani Antonio), Scritti mat. onore Filippo Sibirani, Bologna, 1957, 161—165 (итал.)

Пусть

$$D_k = \sum_{i=1}^{n} X_{ki}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Рассматривается уравнение

$$D_2D_1z + A(x_1, \ldots, x_n)D_1z + B(x_1, \ldots, x_n)z = \frac{D_1z \cdot D_2z}{z}, \qquad (1)$$

которое представляется в виде

$$(D_2 + A)D_1 \ln z + B = 0.$$

Решение последнего уравнения автор дает в явном виде с помощью операторов типа D_1^{-1}, $\exp D_2^{-1}$, построенных ранее (РЖМат, 1958, 2065). Затем дается обобщение на случай, когда в правой части уравнения (1) берется выражение

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} D_1z \cdot D_2z.$$

Для случая $D_1 = D_2$ формула общего решения уравнения (1) имеет вид

$$z = \Omega_1 \cdot \Omega_2^{D^{-1}\exp(-D^{-1}A)} \cdot \exp\left(-D^{-1}e^{-D^{-1}A}D^{-1}e^{D^{-1}A}B\right).$$

Рассмотрены примеры. И. С. Аржаных

2961. **Асимптотика собственных значений и функций одного класса эллиптических систем.** Драпкин А. Б., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 3, 465—467

Изучается задача на собственные значения для системы вида

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x) = -\lambda_k u_k(x)\ (x \in D),\ u_k(x) = 0\ (x \in S), \qquad (1)$$

где $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + A_0(x), \qquad (2)$$

коэффициентами которого служат функциональные матрицы 3-го порядка, определенные для значений $x=(x_1, x_2, x_3)$ из области Ω ($\bar{D}\in\Omega$) и достаточно гладкие в Ω. D предполагается ограниченной поверхностью S типа Ляпунова. Предполагается, что $A(x, \partial/\partial x)$ — оператор эллиптического типа, т. е. для любой вещественной точки $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и любого $x\in\Omega$

$$\det A_2(x, \alpha)=\det\left\{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\right\}\neq 0.$$

Кроме того, автор считает $A(x, \partial/\partial x)$ вариационным оператором от положительно определенного функционала.

Используя метод Карлемана в соединении с оценками Я. Б. Лопатинского, автор устанавливает следующие асимптотические выражения для собственных значений и собственных функций (столбцов) задачи (1):

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\,u_k(x)\sim\frac{1}{12\pi^4}\int\limits_{D_\infty} S_p\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha)+E]\}^{-1}d\alpha\cdot\lambda_n^{3/2},$$

$$n\sim\frac{1}{12\pi^4}\int\limits_{D}\left\{\int\limits_{D_\infty} S_p\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha)+E]\}^{-1}d\alpha\right\}\times\cdot\times dx\cdot\lambda_n^{3/2}.$$

Указывается возможность обобщения результатов на n-мерный случай и на случай оператора несколько более общего вида, чем (2). В. А. Ильин

2962. О регулярных решениях граничных задач для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка для полуплоскости. Лаврук (Про регулярні розв'язки граничних задач для еліптичних систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку для напівплощини. Лаврук Б. Р.), Доповіді АН УРСР, 1957, № 2, 107—111 (укр.; рез. русск., англ.)

Для системы уравнений $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0$, $A=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2A_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ с постоянными коэффициентами, A_{ij} — матрицы, $u=(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ в полуплоскости $x_2>0$ рассматриваются граничные задачи:

1) $\lim\limits_{x_2\to+0} u(x)=f(x_1)$ и 2) $\lim\limits_{x_2\to+0}\frac{\partial^l}{\partial x_1^l}B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(x_1)$,

где $B=B_1\frac{\partial}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, B_1, B_2 — постоянные матрицы, $A_{22}=B_2$, $\det B_2\neq 0$. При некоторых добавочных предположениях (например, в случае задачи 2) предполагается, что ранг

$$\int_{+}\left[(2A_{12}^*-B_1^*)\alpha_1+A_{22}^*\alpha_2\right]A^{*-1}(\alpha)(E, \alpha_2 E)\,d\alpha_2=p,$$

где $A(\alpha)=A_{11}\alpha_1^2+2A_{12}\alpha_1\alpha_2+A_{22}\alpha_2^2$ и интегрирование при $\alpha_1=\pm 1$ производится по контуру, охватывающему все полюсы подынтегрального выражения с положительной мнимой частью), доказывается однозначная разрешимость задач 1) и 2) в классе решений равномерно убывающих на бесконечности. На $f(x_1)$ накладывается следующее ограничение (задача 2): $|f(x_1)|<\frac{C}{(1+|x_1|)^{1+l+\varepsilon}}$, где $C=\text{const}$, $\varepsilon>0$. При этих же предположениях доказывается непрерывная зависимость решений задач 1) и 2) от коэффициентов уравнений, граничного условия и столбца f.

Б. Боярский

2963. Об эллиптических системах уравнений. Малгранж (Sur les systèmes d'équations elliptiques. Malgrange B.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 71, Paris, 1956, 139—142, Discuss. 143 (франц.)

Пусть

$$Df=g \qquad (1)$$

эллиптическая в смысле И. Г. Петровского система дифференциальных уравнений порядка m с неограниченно дифференцируемыми во всем n-мерном пространстве R^n точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициентами.

Вводятся следующие пространства:

1. K^r (r — целое и $\geqslant 0$) — пространство функций с компактными носителями, квадратично суммируемых по R^n вместе с их производными (понимаемыми в смысле теории обобщенных функций) до порядка r. Подпространство K_k^r, состоящее из функций, носители которых лежат в данном компакте k, обозначается через K_k^r.

2. L^r — пространство функций, локально квадратично суммируемых вместе с их производными до порядка r.

3. K^{-r} (L^{-r}) — пространство функций, сопряженное с L^r (K^{-r}). Пространство K^{-r} есть пространство обобщенных функций с компактными носителями. Подпространство K_k^{-r}, состоящее из функций, носители которых лежат в компакте k, обозначается через K_k^{-r}. После введения надлежащего скалярного произведения, K_k^r ($r\gtrless 0$) превращается в пространство Гильберта.

Приводятся следующие предложения:

1. Для любого целого r ($\gtrless 0$) и любого $x\in R^n$ можно указать окрестность θ точки x такую, что преобразование $D: K_\theta^r\to K_\theta^{r-m}$ есть изоморфизм.

2. Если в θ обобщенная функция f такова, что $Df\in L^r$, то $f\in L^{r+m}$.

3. Для любого компакта K преобразование $D: K_k^r\to K_k^{r-m}$ есть гомоморфизм с ядром конечной размерности.

4. Пусть θ — область, дополнение которой не состоит из связных компактов. Если f в θ удовлетворяет системе $Df=0$, то для любого компакта $\theta_1\subset\theta$ можно указать последовательность f_j решений в R^n той же системы, равномерно сходящуюся в θ_1 к f.

5. Для любого целого r $DL^{r+m}=L^r$.

Л. Н. Слободецкий

2964. Линейные уравнения с частными разностями. Форт (Partial linear difference equations. Fort Tomlinson), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 3, 161—167 (англ.)

Известные теоремы о разрешимости системы линейных алгебраических уравнений в зависимости от детерминанта системы, о фундаментальной системе решений, об общем решении и т. п. формулируются применительно к линейным разностным уравнениям с двумя независимыми переменными. Предложен метод построения функции Грина для разностного уравнения. Метод требует знания фундаментальной системы решений. А. Ф. Филиппов

2965. Ударная волна в инвариантной теории распространения волн. Теодореску Н., Ж. матем. и физ. Акад. РНР, 1954, 3, 114—131

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

2966. **О связях наибольшей жесткости. Дольберг М. Д.,** Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80, Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 179—190

Рассматривается упругая система S с функцией влияния $K(x, s)$ и спектром собственных частот $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Система S_n получается из S путем наложения n связей, если существуют такие функции ограниченной вариации $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ в определенном смысле линейно независимые, что

$$\int u(x)\, dp_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $u(x)$ — функция, определяющая любое возможное перемещение системы S_n, а интегрирование проводится по всем точкам системы S. Условия (1) не выполняются для всех возможных перемещений системы S. Если дополнительно потребовать, чтобы в наложенных связях при деформации системы S_n не накоплялась энергия, то справедлива теорема: Для того чтобы n связей, превративших S в S_n, обладали максимальной жесткостью ($\mu_1 = \lambda_{n+1}$), необходимо и достаточно, чтобы:

1) все амплитудные функции системы S, отвечающие частоте λ_{n+1}, удовлетворяли условию (1);

2) квадратичная форма

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \gamma_{ij}(\lambda_{n+1})\, a_i a_j \geqslant 0,$$

где

$\gamma_{ij}(\lambda) = \iint \Gamma(x, s; \lambda)\, dp_i(x)\, dp_j(s)$, $\Gamma(x, s; \lambda)$ — резольвента ядра $K(x, s)$, а μ_1 — первая частота системы S_n.

В работе также показано, что задача о связях наибольшей жесткости эквивалентна разысканию максимума минимумов некоторого функционала при некоторых дополнительных условиях. Отправляясь от такой трактовки, автор существенно дополнил теорему Куранта о минимаксимальных свойствах характеристических чисел. Я. Л. Нудельман

2967. **Свободные поперечные колебания выпучившегося стержня. Мелдер И. К.,** Уч. зап. Латв. ун-та, 1957, 10, 71—80

Рассматриваются малые свободные поперечные колебания призматического стержня с шарнирно-неподвижными концами. В состоянии равновесия стержень имеет начальное упругое искривление, поддерживаемое осевыми составляющими опорных реакций. Величины этих составляющих превышают эйлерову силу.

Сформулированная задача сводится к нелинейному дифференциальному уравнению

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left[P - \frac{EI}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

при $y|_{x=0,\,l} = 0$ и $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0,\,l} = 0$.

Автор ограничивается исследованием движения стержня вида

$$y(x, t) = aH(t)\sin\frac{\pi x}{l},$$

для которого приводит решение в замкнутой форме. Проведен эксперимент, качественно подтвердивший основные выводы аналитического исследования.

Я. Л. Нудельман

2968. **Некоторые вопросы синтеза систем автоматического регулирования методом переходных функций. Красовский А. А.,** Тр. 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования. Т. 2. М—Л. Изд-во АН СССР, 1955, 105—116

2969. **К расчету цилиндрического сосуда с квадратично меняющейся толщиной стенки. Фокке** (Zur Berechnung zylindrischer Behälter mit quadratisch veränderlicher Wanddicke. Vocke W.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 9—10, 399—400 (нем.)

2970. **О дифференциальных уравнениях Хилла в теории движения Луны. I. II. Стеффенсен** (On the differential equations of Hill in the theory of the motion of the Moon. I. II. Steffensen J. F.), Acta math., 1955, 93, № 3—4, 169—177; 1956, 95, № 1—2, 25—37 (англ.)

См. РЖАстр, 1956, 879.

2971. **Особые траектории при парном соударении в обобщенной задаче трех тел. Склянский А. Л.,** Укр. матем. ж., 1957, 9, № 2, 163—175 (рез. франц.)

Рассматривается вопрос о существовании траекторий парного соударения в задаче трех тел, взаимно притягивающихся (при $f(r_k) < 0$) или отталкивающихся (при $f(r_k) > 0$) с силами, по модулю равными

$$m_i m_j |f(r_k)| \quad (i, j, k = 0, 1, 2;\ i \neq j \neq k),$$

где m_i, m_j — массы точек P_i, P_j, r_k — их взаимное расстояние, а $f(r)$ — функция, действительная и аналитическая в окрестности каждого действительного положительного значения аргумента, такая, что

$$\lim_{r \to +0} r^{1-2n} f(r) = l \neq 0 \quad (0 < n < 1)$$

(случай $n < 0$ был исследован в работах референта). Уравнения относительного движения точек P_1 и P_2 записываются в форме Якоби. В предположении, что до момента $t_1 > 0$ движение протекает регулярно, а при $t \to t_1$:

$$\lim r_2 = 0,\ \lim r_0 = \lim r_1 = p_1 > 0,$$

путем применения методов Сундмана и референта, исследуется поведение функций, характеризующих движение, в окрестности момента парного соударения t_1. Исходная система дифференциальных уравнений движения подвергается специальным преобразованиям, как в случае $dr_2/dt \to r_2' < 0$, так и в случае $dr_2/dt \to 0$, в результате чего получаются системы, допускающие применение известных теорем Боля—Коттона об асимптотических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений (в несколько обобщенном виде, указанном в работах референта), что и приводит автора к установлению существования траекторий парного соударения в рассматриваемых случаях. Ю. Д. Соколов

2972. **Векторное решение специальных случаев Лагранжа проблемы трех тел. Клир** (Vector solution of Lagranges special cases of three bodies problem. Klier E.), Бюл. астроном. ин-тов Чехословакии, 1954, 5, № 2, 25—32 (англ.; рез. русск.)

См. РЖАстр, 1955, 922.

2973. **Об ограниченной релятивистской задаче двух тел. Зморович В. А.** Укр. матем. ж., 1954, 6, № 1, 105—113

2974. **О вихревых движениях материальной точки. Аржаных И. С.,** Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, вып. 37, 15—19

2975. **О винтовых потоках в неограниченном пространстве. Филатов А. Н.,** УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв.

АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, № 2, 5—19 (рез. узб.)

Задача заключается в определении в неограниченном пространстве вектора $\mathbf{v}$ из системы уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = k\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega},\quad \operatorname{div}\mathbf{v} = \theta$$

($\boldsymbol{\omega}$ и θ — заданные величины) при условии

$$|\mathbf{v}R^{2+\mu}| < L,\quad R\to\infty,\quad 0<\mu<1.$$

Вначале путем сведения к системе интегральных уравнений, показано, что в однородном случае $\boldsymbol{\omega}=0$ (в двух предположениях: 1) $k=\text{const}$, 2) $k=f(x, y, z)$) $\mathbf{v}\equiv 0$. Тем самым доказана теорема единственности для неоднородных уравнений. С помощью преобразования Карсона по трем координатам получено явное решение неоднородной системы. Делаются некоторые выводы, относящиеся к случаю винтовых движений жидкости.

Затем рассмотрена более общая система

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_k,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_k = \theta_k,\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Доказана теорема единственности и показано, что можно получить решение в явном виде с помощью преобразования Карсона. Дано явное выражение решения при $n=2$. И. С. Аржаных

2976. **Применение теории распределений к проблеме крыла при сверхзвуковых скоростях. Зауэр** (Anwendung der Distributionstheorie auf das Problem des Überschall-Tragflügels. Sauer R. Mém. méc. fluides offerts à M. Dimitri P. Riabouchinsky. Paris, Publ. Sci. Techn. Ministère Air, 1954, 289—308) (нем.)

2977. **О периодической задаче Гурса. Самосюк Г. П.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 97—109

Для специальной задачи Гурса

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad u|_{r=t} = \Phi(\vartheta, \varphi), \qquad (1)$$

где $\Phi(\vartheta, \varphi)$ — функция, постоянная вдоль образующих характеристического конуса, решение имеет вид:

$$u(r, \vartheta, \varphi, t) = \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\vartheta', \varphi') \times$$

$$\times K(r, \vartheta, \vartheta', \varphi-\varphi', t)\, d\omega'. \qquad (2)$$

На этой основе строится решение периодической (с периодом $2\pi x$) задачи Гурса

$$\Delta u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\quad 0<r<t,\ 0<\vartheta\leq 2\pi,\ -\infty<\varphi<\infty, \qquad (3)$$

$$u_x|_{r=t} = \Phi_x(\vartheta, \varphi),$$

где $\Phi_x(\vartheta, \varphi)$ — периодическая (с периодом $2\pi x$ по углу φ) функция. Решение имеет вид:

$$u_x(r, \vartheta, \varphi, t) = \int_0\int_{-\pi x}^{\pi x} \Phi_x(\vartheta', \varphi') \times$$

$$\times H_x(r, \vartheta, \vartheta', \varphi-\varphi', t)\, d\omega', \qquad (4)$$

где

$$H_x = \frac{1}{2\pi x}\int_L E(\varphi-\varphi', \alpha, x)\, K(r, \vartheta, \vartheta', \alpha, t)\, d\alpha, \qquad (5)$$

L — некоторый контур на комплексной плоскости, а E — ядро типа ядра Зоммерфельда

$$E(\varphi'-\varphi, \alpha, x) = \frac{e^{\frac{\alpha}{x}i}}{e^{\frac{\alpha}{x}i} - e^{\frac{\varphi'-\varphi}{x}i}}.$$

Исследуются свойства выражений (4) и (5), доказана единственность решения задачи (3). При $x\to\infty$ из (4)—(5) получается решение разветвленной задачи Гурса. Ю. Н. Днестровский

2978. **Температурное поле в трехслойной стенке при граничном условии четвертого рода. Смирнов М. С.**, Тр. Моск. технол. ин-т пищ. пром-сти, 1957, вып. 8, 17—20

Методами операционного исчисления решается одномерная задача теории теплопроводности:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2},\quad 0\leqslant x\leqslant R,$$

$$\tau>0,$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2\frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2},\quad R\leqslant x\leqslant L,$$

$$t_1(x, 0) = t_2(x, 0) = t_0 = \text{const};$$

$$-\lambda_2\frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial x} + \alpha[t_c - t_2(x, \tau)] = 0 \text{ при } x=L;$$

$$\frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0;$$

$$-\lambda_1\frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} = -\lambda_2\frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial x} \text{ при } x=L;$$

$$t_1(x, \tau) = t_2(x, \tau) \text{ при } x=R.$$

Решение, полученное в результате формальных преобразований в виде бесконечных рядов, в работе не исследуется. С. С. Дымков

2979. **Проблема изменения температуры в тонком сферическом слое. Цеули** (Sul problema delle temperature variabili in una calotta sferica sottile. Zeuli Tino), Rend. Semin.-mat. Univ. e Politecn. Torino. 1954, 13, 335—356 (итал.)

2980. **Обоснование применимости метода последовательных приближений при решении первой внутренней краевой задачи для системы уравнений теории упругости. Имшенецкая Е. Ф.**, Докл. Львовск. политехн. ин-та, 1957, 2, № 1, 3—9

Названная задача решается с помощью представления вектора смещения через потенциал поверхностных деформаций (подстановка Фредгольма). Для исследования полученного интегрального уравнения рассматривается сопряженное уравнение Вейля. Известный способ Пуанкаре для исследования интегральных уравнений задач Дирихле и Неймана распространяется на уравнения теории упругости. В результате доказана применимость метода последовательных приближений к решению первой внутренней задачи теории упругости с помощью интегрального уравнения Фредгольма.

Примечание референта. Фундаментальные решения уравнений теории упругости записаны неверно (лишний множитель $1/r^2$). И. С. Аржаных

2981. **Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью. Моссаковский В. И.**, Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 4, 443—452

2982. **О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Ворович И. И.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 4, 173—186

2983. О центре изгиба. Новожилов В. В., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 2, 281—284

Показано, что положение координат центра изгиба стержня односвязного поперечного сечения в произвольной декартовой системе координат определяется формулами

$$x_i = \iint [\alpha^* (x - x_0) + \beta^* (y - y_0)]\, \varphi dS +$$

$$+ \frac{\nu}{1+\nu} \iint [\alpha^* (y - y_0) - \beta^* (x - x_0)]\, \Phi dS,$$

$$y_i = -\iint [\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0)]\, \varphi dS -$$

$$- \frac{\nu}{1+\nu} \iint [\alpha (y - y_0) - \beta (x - x_0)]\, \Phi dS.$$

Здесь Φ — функция кручения Прандтля, φ — гармоническая функция кручения Сен-Венана,

$$\alpha = \frac{S_x^2 - I_{xx} S_0}{B}, \quad \alpha^* = \beta = \frac{I_{xy} S_0 - S_x S_y}{B},$$

$$\beta^* = \frac{S_y^2 - I_{yy} S_0}{B},$$

$$B = \begin{vmatrix} I_{yy} & I_{xy} & S_y \\ I_{xy} & I_{xx} & S_x \\ S_y & S_x & S_0 \end{vmatrix};$$

ν — коэффициент Пуассона, I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}, S_x, S_y — моменты инерции и статические моменты площади поперечного сечения (S_0), x_0 и y_0 — координаты центра тяжести этой площади.

В том случае, когда координатные оси совпадают с главными центральными осями инерции поперечного сечения, указываемые формулы принимают вид

$$x_i = -\frac{1}{I_x} \left\{ \iint y \varphi dS - \frac{\nu}{1+\nu} \iint x \Phi dS \right\},$$

$$y_i = \frac{1}{I_y} \left\{ \iint x \varphi dS + \frac{\nu}{1+\nu} \iint y \Phi dS \right\},$$

где I_x, I_y — главные моменты инерции поперечного сечения.

Таким образом, определение положения центра изгиба стержня с односвязным поперечным сечением сводится к решению задачи о его кручении и к соответствующим квадратурам. К. В. Соляник-Красса

2984. О принципе предельной амплитуды. Ладыженская О. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 161—164

В качестве способа однозначного определения «физически интересных» решений уравнения

$$Lu \equiv -\Delta u + c(x)\, u = \omega^2 u + q(x) \qquad (1)$$

в неограниченном пространстве изменения $x = (x_1, x_2, x_3)$ предлагается «принцип предельной амплитуды». Доказана теорема: Если $q(x)$ финитно и оператор L не имеет собственных значений, то предел $u(x) = \lim_{t \to +\infty} v(x, t)\, e^{-i\omega t}$ существует, удовлетворяет уравнению (1) и «условиям излучения» Зоммерфельда. Здесь $v(x, t)$ — решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями для уравнения

$$v_{tt} - \Delta v + cv = q(x)\, e^{i\omega t}.$$

Отмечается, что если оператор L имеет хотя бы одно собственное значение, то предел $v(x, t)\, e^{-i\omega t}$ при $t \to +\infty$ в сильном смысле не существует.

А. Г. Свешников

2985. Асимптотические представления решений задач дифракции на параболических поверхностях. Хокстадт (Asymptotic formulas for diffraction by parabolic surfaces. Hochstadt Harry), Communs Pure and Appl. Math., 1957, 10, № 3, 311—329 (англ.)

На основании разложения, данного Бухгольцем (Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer, Berlin, 1953),

$$\frac{e^{ikr}}{ikr} = -2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip(\varphi - \varphi_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_p - i\infty}^{-\sigma_p + i\infty} \Gamma\left(s + \frac{1+p}{2}\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(-s + \frac{1+p}{2}\right) \cdot m_{-s}^{p}(-2ik\xi)\, \omega_{-s}^{p}(-2ik\xi_0) \times$$

$$\times m_s^p(-2ik\eta) \cdot \omega_s^p(-2ik\eta_0)\, ds;$$

$$\xi < \xi_0;\ \eta < \eta_0;\ |\sigma_p| < \frac{1 + |p|}{2},$$

получено асимптотическое представление по большому параметру k для нормальной производной функции Грина 1-й краевой задачи для волнового уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ в области внутри параболоида вращения. Здесь r — расстояние между двумя точками с параболическими координатами ξ, η, φ и ξ_0, η_0, φ_0; $m_\chi(x)$ и $\omega_\chi^\mu(x)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$[xf'(x)]' + \left(k^2 x - \frac{\mu^2}{4x} - 2ik\chi\right) f(x) = 0,$$

получающегося при разделении переменных в волновом уравнении в параболических координатах (μ и χ — постоянные разделения).

Аналогичные асимптотические представления получены для функции Грина второй краевой задачи для параболоида вращения, а также для функций Грина 1-й и 2-й краевых задач внутри параболического цилиндра.

Эти асимптотические представления применяются для исследования ряда задач: дифракции плоской волны на параболоиде вращения и параболическом цилиндре, дифракции сферической волны на параболоиде вращения и цилиндрической волны на параболическом цилиндре. В последнем случае удается получить картину поля и вблизи каустики. А. Г. Свешников

2986. Общая теория электромагнитного поля. Ч. 4—5. Колино (Teoria general de los campos electromagneticos. Colino Antonio), Rev. telecomun., 1957, 11, № 47, 2—38 исп., англ.)

Ч. I, II, III см. РЖМат, 1956, 3125, 1957, 7090.

Часть 4 посвящена цилиндрическим волнам. После получения общих формул методом разделения переменных рассматриваются частные задачи: скин-эффект, дифракция различного вида волн на цилиндре, возбуждение поля через отверстия в цилиндре, образование цилиндрических поверхностных волн (волны Зоммерфельда и волны Губо), цилиндрические рупоры, излучатель с V-образным рефлектором, распространение волн над плоской землей (точные и асимптотические выражения).

В части 5 рассматриваются сферические волны. Получаются общие выражения для полей в сферических координатах, которые прилагаются к решению частных задач: колебания проводящей сферы, возбуждение сферических волн, дифракция различных волн на сфере.

Решения многих задач иллюстрируются графиками. В целом материал частей 4 и 5 дан на уровне соответствующих глав известной книги Дж. Стрэттона «Теория

электромагнетизма» с отдельными добавлениями и изменениями в частных задачах. Ю. Н. Днестровский

2987. **Распределение тока в длинном цилиндре как краевая задача. Алёхин В. М.**, Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1956, 43/57, 65—79

В квазистационарном приближении рассматривается плоская задача определения электромагнитного поля при протекании тока в бесконечном проводе произвольного сечения. Решение представляется в виде конечных сумм. Коэффициенты разложения находятся из условий сшивания решений на поверхности провода в конечном числе точек. Какого-либо обсуждения выбора точек сшивания не проводится. Этот же метод решения предлагается и для общего неквазистационарного случая. Ю. Н. Днестровский

2988. **Линейное уравнение в частных производных второго порядка, применяемое в релятивистской динамике двух тел. Чорэнеску** (O ecuaţie liniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea ce intervine în dinamica relativistă a două corpuri. Ciorănescu N.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1956, 8, № 4, 709—714 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассмотрены некоторые результаты для уравнения вида:

$$E(u) \equiv r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + P(r^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + Q(r^2)\, r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + R(r^2)\, r \frac{\partial u}{\partial r} + T(r^2) \frac{\partial u}{\partial \theta} + S(r^2)\, u = 0,$$

где P, Q, R, T и S — ряды, целые относительно r^2. Затем рассматривается аналогичный метод решения более общего уравнения, в котором коэффициенты P, Q, R, T, S являются рядами, целыми относительно r. Решение такого уравнения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанный метод применяется к исследованию уравнения, полученного проф. О. Оническу для релятивистской задачи двух тел:

$$m_0^2 c^2 F_1^2 + FF_1 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$x(x+a)(x+b)\, y'' + K(x+a)(x+b)\, y' + (Ax^3 + Bx^2 + Cx)\, y = 0,$$

где a, b, A, B, C — постоянные. Последнее уравнение в свою очередь может быть сведено к соответствующему уравнению Риккати. Е. С. Алексеев

2989. **О свойствах некоторых решений уравнения Бете—Сальпетера. Кащеев В.**, Studentu zinātniskie darbi. Latv. Univ., Научн. студ. работы. Латв. ун-т, 1957, сб. 2, 34—40

Рассмотрены некоторые свойства уравнения Бете—Сальпетера (БС), являющегося одним из формализмов в квантовой теории поля, не использующих теорию возмущений. Уравнение БС решалось при следующих предположениях: а) половина полной энергии связанной системы двух фермионов $E = 0$; б) масса покоя кванта поля $\mu = 0$; в) БС-волновая функция в импульсном пространстве пропорциональна единичной матрице: $\Phi(p) \sim J$. Показано, что первое условие берется не просто для удобства, а необходимо вытекает из требования совместности уравнений при условии в). Грин (РЖМат, 1956, 2271) показал отсутствие спектра в случае $\Phi(p) \equiv \Phi(p^2)$. В данной работе показана ошибочность его рассуждений и доказано наличие спектра. Кроме возможности получения точечного спектра собственных значений из сплошного спектра, путем привлечения дополнительных физических соображений показаны и чисто математические возможности существования дискретного спектра (наряду возможно со сплошным). Высшие приближения в БС-уравнении можно учесть заменой в уравнении лестничного приближения одночастичных гриниановна модифицированные функции Грина.

Е. С. Алексеев

2990. **Замечание к теории билокальных полей. Хорват** (Megjegyzések a bilokális terek elméletéhez. Horváth János), Magyar fiz. folyóirat, 1955, 3, № 5—6, 467—487 (венг.)

2991. **Система дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением в теории оболочек. Векуа** (Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen. Vekua I. N. (Math. Forschungsber., 1956, 2). Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 107 S., ill.) (нем.)

Перевод из журнала Матем. Сб., 1952, **31**, № 2, 207—314.

См. также: 3042, 3043; 3045, 3069, 3070, 3171, 3243, 3244, 3268, 3270—3274, 3276—3289

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

2992. **Вариационные задачи с запаздывающим аргументом. Эльсгольц Л. Э.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 257—258

Краткое сообщение о докладе, сделанном автором на конференции по функциональному анализу в г. Москве. Без доказательств приводятся некоторые результаты по разработанной автором теории вариационных задач с запаздывающим аргументом (см., например, Вестн. Моск. ун-та, 1952, № 10, 57—61).

М. К. Керимов

2993. **Проблема Дугласа для поверхностей постоянной средней кривизны. Вернер** (Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Werner Helmut), Math. Ann., 1957, 133, № 4, 303—319 (нем.)

Рассматривается вопрос о существовании поверхности данного топологического строения с постоянной средней кривизной H, опирающейся на заданную систему контуров (при $H = 0$ получается известная задача Дугласа для минимальных поверхностей).

Устанавливается существование указанной поверхности рода нуль для заданной системы простых контуров $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, расположенных внутри единичной сферы при $H \leqslant 1/2$.

Аналитически задача сводится к отысканию вектор-функции $\mathbf{r}(u, v)$, рассматриваемой в многосвязной области G плоскости uv, которая вдоль границы G описывает заданную систему жордановых кривых γ_k и сообщает минимум функционалу

$$I(\mathbf{r}) = \iint_G \left[\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2 + \frac{4}{3} H (\mathbf{r} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v) \right] du dv.$$

Предполагая существование функции $\mathbf{r}(u, v)$ с конечным интегралом Дирихле, строится минимизирующая последовательность $\mathbf{r}_n(u, v)$ для функционала I. С ее помощью строится новая минимизирующая последовательность функций $\tilde{\mathbf{r}}_n(u, v)$, совпадающих с $\mathbf{r}_n(u, v)$ на границе G и удовлетворяющих в G уравнению $\Delta\mathbf{r} = 2H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$.

Переходя к пределу по надлежащим образом выбранной подпоследовательности $\tilde{\mathbf{r}}_n$, получается функция $\mathbf{r}(u, v)$, удовлетворяющая уравнениям

$$\Delta\mathbf{r} = 2H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v),\ \mathbf{r}_u^2 = \mathbf{r}_v^2,\ \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = 0.$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(u, v)$ задает поверхность, которая и решает поставленную задачу.

В связи с переходом от минимизирующей последовательности $\mathbf{r}_n$ к $\tilde{\mathbf{r}}_n$ решается краевая задача для уравнения $\Delta\mathbf{r} = 2H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ в многосвязной области G при непрерывных значениях на границе. Устанавливаются априорные оценки для этого решения, играющие роль как при решении упомянутой краевой задачи, так и при переходе к пределу по подпоследовательности $\tilde{\mathbf{r}}_n$, дающей решение основной задачи.

А. В. Погорелов

2994. **Один пример к задаче наименьшей площади. Флеминг** (An example in the problem of least area. Fleming Wendell H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 6, 1063—1074 (англ.)

Описывается пример простой замкнутой спрямляемой кривой в трехмерном пространстве, для которой задача об отыскании поверхности наименьшей площади, имеющей данную кривую своей границей, не имеет решения конечного топологического типа при условии, что тип допустимых поверхностей не ограничен сверху.

Л. Д. Кудрявцев

2995. **Однородная форма вариационных принципов и законы сохранения. Румер Ю. Б.,** Уч. зап. Новосибирский гос. пед. ин-т, 1957, вып. 12, 3—8

Предлагается наглядный вывод законов сохранения в механике консервативных голономных систем и в теории поля, основанный на переходе к однородной форме функции Лагранжа, рассматривая независимые переменные как дополнительные искомые функции вспомогательных параметров с последующим возвращением к первоначальным независимым переменным.

И. С. Аржаных

2996. **О лагранжиане специальной теории относительности. Инфельд** (On the Lagrangian in special relativity theory. Infeld L.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 5, 491—495 (англ.; рез. русск.)

Пусть кинетический потенциал мировой точки будет

$$L = L(x_\nu, x'_\nu),\ x'_\nu = \frac{dx_\nu}{ds},\ dx_\nu dx_\nu = -ds^2 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu=4} (dx_\nu)^2,\ x_4 = it,$$

причем независимое переменное s определяется из связи $x'_\nu x'_\nu + 1 = 0$.

Уравнения движения автор получает из вариационного принципа с учетом связи,

$$\delta \int \left[L + \frac{\lambda}{2}(x'_\nu x'_\nu + 1) \right] ds = 0.$$

Множитель связи легко находится:

$$\lambda = -L + \frac{\partial L}{\partial x'_\nu} x'_\nu$$

и уравнения движения принимают вид

$$(Lx'_\nu)' = \left(\frac{\partial L}{\partial x'_\nu} + x'_\nu \frac{\partial L}{\partial x'_\rho} x'_\rho \right)' - \frac{\partial L}{\partial x_\nu}.$$

В случае, когда $L = -m = \text{const}$, получается инерционное движение, а при $L = -m + \varphi(x_\nu)$ имеем:

$$\left[(m + \varphi) x'_\nu\right]' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}.$$

Специально рассмотрен случай $\varphi = -g^2/r$, $g = \text{const}$. Если положить

$$L = -m + eA_\nu x'_\nu,$$

то получаются уравнения движения в электромагнитном поле.

И. С. Аржаных

2997. **Вариационный принцип для классических теорий поля. Пахнер** (Ein Variationsprinzip für klassische Feldtheorien. Pachner Jaroslav), Ann. Phys., 1957, 19, № 6—8, 353—368 (нем.)

2998. **Скобки Пуассона. Шенон** (Parentheses de Poisson. Chenon R.), Sémin. theor. phys. L. Broglie. Fac. sci. Paris, 1955—1956, 25, № 13, 1—9 (франц.)

Вариационную задачу механики

$$\delta \int L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0$$

с помощью замены $\dot{q}_i = v_i$ можно свести к задаче

$$\delta \int \left(L - \frac{\partial L}{\partial v_i} v_i \right) dt + \frac{\partial L}{\partial v_i} dq_i = 0.$$

В соответствии с этим рассматривается общая вариационная задача

$$\delta \int \omega = 0,$$

где ω — линейная дифференциальная форма. Напоминается об операции вычисления внешней производной и отмечается, что экстремали последней задачи определяются ассоциированными уравнениями $\partial d\omega / \partial dx_i = 0$. В качестве примера получены канонические уравнения Гамильтона. Автор напоминает также основные операции для внешних форм Картана любого порядка (внешняя производная и алгебраическая производная). Затем рассматривается вариационная задача теории поля

$$\delta \int L\left(x_\mu, \varphi^\alpha, \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_\mu}\right) [dx^1 dx^2 \dots dx^p] = 0,$$

которая с помощью замены $\partial\varphi^\alpha / \partial x_\mu = v^\alpha_\mu$ приводится к задаче

$$\delta \int L\,[dx^1 \dots dx^p] + \frac{\partial L}{\partial v^\alpha_\mu} [dx^1 \dots dx^{\mu-1} \pi^\alpha dx^{\mu+1} \dots dx^p] = 0,$$

где $\pi^\alpha = d\varphi^\alpha - v^\alpha_\mu dx^\mu$. Отсюда делается естественный переход к обобщению

$$\delta \int \omega = 0$$

(ω — внешняя форма степени p). Вариационные уравнения последней задачи имеют вид

$$d_k d\omega = 0, \qquad (1$$

где d_k — оператор алгебраической производной, $d\omega$ — внешняя производная. Первым интегралом последних

уравнений автор называет функционал $F(f)\equiv\int f$ с внешней формой f степени $p-1$, обладающей тем свойством, что в силу уравнений (1) имеем: $\delta F=0$. Отмечается, что форма f определяется с точностью до внешней производной, так как $F(d\theta)=0$. Определяется по двум интегралам $F(f)$ и $G(g)$ третий

$$(F,\ G)\equiv\int(f,\ g),$$

причем $(f,\ g)=f^k g^l d_l d_k\omega$, $df=f^k d_k d\omega$, $dg=g^k d_k d\omega$. Устанавливается связь первого интеграла с бесконечно малыми преобразованиями, которые допускает форма $(\omega'=\omega+d\theta)$. Отмечается тождество Якоби. Показано, что введенное автором понятие о скобке Пуассона в расширенном смысле имеет важное значение для квантовой теории поля. В заключение ставится вопрос о дальнейшем возможном обобщении скобок Пуассона. И. С. Аржаных

2999. Решение уравнений теории пограничного слоя с помощью вариационного исчисления. Уэмацу, Хатта (Lösung der Grenzschichtgleichungen durch Variationsrechnung. Uematu Tokio, Hatta Keiji), Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1954, Tokio, 1955, 299—302 (нем.)

Рассматриваются уравнения пограничного слоя

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$u=v=0$ при $y=0$, $u=U(x)$ при $y\to\infty$ и отмечается, что после замены du/dx через $-dv/dy$, найденное из уравнения неразрывности, уравнение Прандля является условием экстремальности функционала

$$\int_0^h\left[w\left(U\frac{\partial U}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\nu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dy$$

(h — толщина пограничного слоя, w — вспомогательная функция). В соответствии с этим рассматривается вариационная задача с дополнительным условием

$$\int_0^h(U-u)\,dy=\text{const},$$

а множитель Лагранжа связывается с w уравнением $\Lambda=-2w\frac{dU}{dx}$. Тем самым для w устанавливается дифференциальное уравнение. Затем выводится формула для силы трения. Вариационная задача решается прямым методом Ритца. При численном решении конкретного примера получается для коэффициента трения значение

$$1{,}333\sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}},$$

что незначительно отличается от известных результатов. И. С. Аржаных

3000. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. Шмыглевский Ю. Д., Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 2, 195—206

Ставится и решается задача о поверхности тела вращения, которое испытывает наименьшее сопротивление в сверхзвуковом осесимметричном потоке. Вначале рассматривается потенциальное течение. Автор замечает, что соответствующую вариационную задачу можно сформулировать, не прибегая к точному интегрированию уравнений движения. С этой целью рассматривается область S, ограниченная образующей искомой поверхности вращения и двумя характеристиками. Затем специально преобразуется уравнение неразрывности с помощью уравнения движения и вычисляется интеграл по S от левой части полученного уравнения. На основании формулы Грина после использования уравнений характеристик можно вычислить интеграл, определяющий силу давления через некоторые величины, связанные соответствующими условными уравнениями. Так возникает вариационная задача с дополнительными условиями, два из которых интегральные и одно дифференциальное. Полученная задача имеет вырожденный характер. Ее разрешимость основана на своеобразном характере граничных условий. После решения данной задачи автор переходит к случаю вихревого движения газа. Аналогичные вычисления позволяют и в этом случае получить законченные результаты. И. С. Аржаных

3001 К. Кратчайшие линии. Вариационные задачи. Люстерник (Kürzeste Linien. Eine Einführung in die Variatiönsrechnung. Lusternik L. A. Übers. aus dem Russ. Berlin, VeB dtsch. Verl. Wiss., 1957, 108 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1957, 7097).

См. также: 2869, 3152

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

3002. Заключительный анализ свертки Вандермонда. Гулд (Final analysis of Vandermonde's convolution. Gould H. W.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 6, 409—415 (англ.)

Сверткой Вандермонда называется следующее тождество для биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{r}{i}\binom{q}{k-i}=\binom{r+q}{k}.$$

Оно получается из тождества $(1+z)^r(1+z)^q=(1+z)^{r+q}$ путем сравнения коэффициентов при z^k.

В своей статье (РЖМат, 1958, 117) автор получил некоторые обобщения и аналоги свертки Вандермонда.

В частности, если $A_1(\alpha,\beta)\equiv\binom{\alpha+\beta n}{n}\frac{\alpha}{\alpha+\beta n}$, то

$$\sum_{k=0}^{n}A_k(\alpha,\beta)\cdot A_{n-k}(\gamma,\beta)=A_n(\alpha+\gamma,\beta).\qquad(1)$$

В реферируемой статье показано, что тождество (1) и другие тождества подобного рода вытекают из некоторых общих теорем, принадлежащих немецкому математику конца XVIII в. Роте и устанавливающих

зависимость между коэффициентами тейлоровских разложений некоторых функций. В таком плане рассматривается, например, тождество, обобщающее биномиальную теорему Ньютона и восходящее к Абелю:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha+\beta k)^k\gamma[\gamma+\beta(n-k)]^{n-k-1}=$$

$$=(\alpha+\gamma+\beta n)^n.$$

Делается попытка указать общий прием для получения комбинаторных тождеств и их обобщений, основанный на применении теорем Роте и разложений функций в ряды Абеля и Ньютона.

В конце статьи упоминается о возможности применения методов обращения рядов (Лагранж, Бюрман и др.) для получения такого рода тождеств.

М. Б. Балк

3003. О многочленах, образующих возвратную последовательность 2-го порядка. Паламодов В. П., Матем. просвещение, вып. I, 1957, 139—147

3004. Замечания к статье «Расстояние до начала некоторого множества точек в E^n». Уэндел (Comment on «The distance to the origin of a certain point set in E». Wendel J. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 12, 413—414 (англ.)

Устанавливается выражение для $M=\min\sum_{i=0}^{m}a_i^2$ при связях $\sum_{i=0}^{m}a_i=1$, $\sum_{i=0}^{m}i^k a_k=0$, $k=1, 2, \ldots, r$ $(0<r<m-1)$:

$$M=1-\frac{(m!)^2}{(m+r+1)!(m-r-1)!}.$$

Доказательство проведено более коротким путем, чем в статье Каруша и Вулфсона (РЖМат, 1956, 3082), в которой получен аналогичный результат. Использованы геометрические соображения с применением свойств ортогональных полиномов. С. П. Пулькин

3005. Примеры применения простейших функций в физике и технике. Жуков В. Е., Уч. зап. Выборгск. гос. пед. ин-та, 1957, 2, 50—65

3006. Характеристика показательной функции. Гурье (A characterization of the exponential function. Ghurye S. G.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 255—257 (англ.)

Если $f(x)$ — непрерывная функция, принимающая действительные положительные значения при $x\geqslant 0$ и если для всех $x\geqslant 0$ и любых натуральных n количество различных чисел среди n чисел $f(x)$, $[f(x/2)]^2$, ..., $[f(x/n)]^n$ ограничено, то $f(x)=e^{ax}$.

А. И. Маркушевич

3007. Заметка об определителях, содержащих гиперболические синусы и косинусы. Родеха (Nota sobre determinantes de senos y cosenos hipelrbolicos. Rodeja E. G.), Rev. mat. hisp.-amer., 1954, 14, № 4—5, 200—201 (исп.)

3008. Замечания о некоторых элементарных способах решения экстремальных задач с использованием элементарных неравенств. Ацел (Megjegyzések néhány módszerhez szélsöérték-feladatok elemi megoldására az elemi egyenlötlenségek felhasználásával. Aczél János), Acta Univ. Debrecen., 1956 (1957), 3, № 2, 23—40 (венг.; рез. нем.)

3009. Топологическая теорема в фундаментальной конценции исчисления бесконечно малых. Ямаиака (Topological theorem in the fundamental concept of the infinitesmal calculus. Yamanaka Yukio), Ямагути дайгаку ригаккайси, Yamaguchi J. Sci., 1955, 6, 80—85 (англ.)

Приводится ряд абстрактных определений и доказываются две несложные теоремы абстрактного характера. Понятия производной и интеграла могут быть описаны в терминах этих определений.

В. А. Ефремович

3010. Обобщение формулы Тейлора. Бондарев А.Л., Матем. просвещение, вып. I, 1957, 129—137

3011. О дифференциалах. Эгервари (A differenciálokról. Egerváry Jenö), Mat. lapok, 1957, 8, № 1—2, 79—85 (венг.)

3012. Разложение обобщенных гипергеометрических функций. Мейер (Ontwikkelingen van gegeneralisserde hypergeometrische functies. Meijer C. S.), Simson Stevin, 1957, **31**, № 3, 117—139 (гол.)

3013. О средней скорости изменения функций. Лабутин Д. Н., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 65—71

Если функция непрерывна на сегменте и этот сегмент разбит на равные частичные сегменты, то средняя скорость изменения функции на всем сегменте равна среднему арифметическому средних скоростей изменения на частичных сегментах. Приводятся доказательство этого очевидного утверждения и примеры.

Примечание референта. Требование непрерывности функции является излишним.

С. П. Пулькин

3014. Геометрическая интерпретация локальной формулы Тейлора. Харкеевич Ю. Ф., Тр. Иркутского ун-та, 1957, **15**, 111—116

Производится построение значений ξ в остаточном члене $\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$ формулы Тейлора при $n=1, 2, 3$ и $b-a=1$.

Примечание референта. В статье имеется ряд неточностей и неправильных утверждений. Из того, что в примере, рассмотренном автором, значения ξ с возрастанием n приближаются к левому концу отрезка $[a; b]$, нельзя сделать общего вывода.

А. Г. Школьник

3015. О разностях дробного порядка. Каттнер (On differences of fractional order. Kuttner B.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 27, 453—466 (англ.)

Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность и пусть $s\geqslant\sigma>-1$ (здесь и ниже σ отлично от целого числа). Если

$$\Delta^\sigma a_n=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-s-1+m}{m}a_{n+m}$$

существует (ряд сходится), то для больших n $\Delta^s a_n=o(n^{\sigma+1})$. Результат является наилучшим в том смысле, что если функция $\chi(n)>0$ такова, что $\chi(n)\to 0$ при $n\to\infty$, то найдется последовательность $\{a_n\}$ такая, что $\Delta^\sigma a_n$ существует, но утверждение $\Delta^s a_n=o(n^{\sigma+1}\chi(n))$ ошибочно.

Если $\sigma>-1$ и $\Delta^\sigma a_n$ существует, то соотношение $\Delta^{r+s}a_n=\Delta^r(\Delta^s a_n)$ справедливо для $s\geqslant\sigma$, $r\geqslant\sigma$, $r+s\geqslant\sigma$.

При более частных предположениях указанные результаты были отчасти получены Андерсеном (Mat. Tidsskrift, 1946, B, 33—52).

Основной результат статьи: Пусть $\sigma>-1$ и $\Delta^\sigma a_n$ существует, если $s\geqslant\sigma$, $r+s\geqslant\sigma$, $k\geqslant\sigma-r$, $k\geqslant 0$ или если $s\geqslant\sigma$, $r+s=\sigma$, $k>\sigma-r$, $k\geqslant 0$, то ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-r-1+m}{m}\Delta^s a_{n+m}$$

суммируем (C, k) к $\Delta^{r+s}a_n$.

А. А. Миролюбов

3016. О вычислении объемов тел вращения с помощью определенных интегралов. Жуков В. Е., Уч. зап. Выборгск. гос. пед. ин-та, 1957, 2, 66—71

3017. Общие теоремы интегрируемости для степенных рядов. Кеннеди (General integrability theorems for power series. Kennedy P. B.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 58—62 (англ.)

Для функции $f(x)=\sum_0^\infty c_n x^n$ $(0\leqslant x<1;\ c_n\geqslant 0)$ доказываются теоремы:

1) Пусть $\varphi(x)$ неотрицательна и неубывающая в $(0, 1)$, $\varphi(x)\in L(0, 1)$ и $\Phi(n)=\int_{1-1/n}^1 \varphi(x)\,dx$. При этих условиях $f(x)\varphi(x)\in L(0, 1)$ тогда и только тогда, когда $\sum c_n\Phi(n)$ сходится.

2) Пусть существует целое число $p\geqslant 1$ такое, что $\varphi(x)$, $\varphi^1(x)$, ..., $\varphi^{(p-1)}(x)$ абсолютно непрерывны для $0\leqslant x\leqslant 1$ и равны 0 при $x=1$. Пусть, кроме того, $\varphi^{(p)}(x)$ имеет постоянный знак и $|\varphi^{(p)}(x)|$ — неубывающая функция на множестве, содержащемся в $(0, 1)$, на котором $\varphi^{(p)}(x)$ существует. При этих условиях $f(x)\varphi(x)\in L(0, 1)$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum n^{-p}|\varphi^{(p-1)}(1-1/n)|\,c_n$ сходится.

3) Пусть $0<\eta<1$. Если $\gamma<1$ и δ — любое действительное число, то $(1-x)^{-\gamma}\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-\delta}f(x)\in L(\eta, 1)$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum n^{\gamma-1}(\log n)^{-\delta}c_n$ сходится. Если $\delta>1$, то $(1-x)^{-1}\times\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-\delta}f(x)\in L(\eta, 1)$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum(\log n)^{1-\delta}c_n$ сходится.

Приведенные теоремы содержат как частный случай результат Хейвуда (РЖМат, 1956, 5963, теорема 1).

С. П. Пулькин

3018. О некоторых элементарных теоремах для обобщенных интегралов. Пейович (Sur quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées. Peyovitch T.), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1956, 5, № 2, 77—80 (франц.)

3019. (φ)-сходящиеся интегралы и их применения в математической физике. Гхош (On (φ) convergent integrals and their application to mathematical physics. Ghosh P. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, 48, № 1, 33—44 (англ.)

Пусть $\varphi(x)$ — невозрастающая функция на $[0, \infty)$ с непрерывной производной и $\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx=k\neq 0$. (φ)-пределом функции $f(x)$, R-интегрируемой в $[0, \infty)$, автор называет предел $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda K}\int_0^\infty \varphi'\left(\frac{t}{\lambda}\right)f(t)dt$. (φ)-предел функции $\int_0^x f(t)\,dt$ при $x\to\infty$ называется (φ)-интегралом и обозначается $(\varphi)=\int_0^\infty f(t)\,dt$. Доказываются три теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости (φ)-интеграла по параметру. Рассматриваются частные случаи $\varphi(t)=e^{-t}$, $\varphi(t)=e^{-t^2}$. Даются применения (φ)-интеграла в квантовой механике к выводу обобщенного правила вычисления матричных элементов и в атомной физике к выводу формулы рассеяния Резерфорда.

С. П. Пулькин

3020. Выпуклые свойства линейных и мультилинейных форм. Дингхас (Konvexitätseigenschaften von linearen und multilinearen Formen. Dinghas Alexander), Arch. Math., 1957, 8, № 2, 135—143 (нем.)

В пространстве последовательностей действительных чисел $\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\}$ вводится в рассмотрение функционал

$$\Phi_r(x)=\left(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n^r\right)^{1/r},\quad \sum a_n=1,\quad -\infty<r<\infty,$$

называемый функционалом Минковского (ряды $\sum a_n x^n$ предполагаются сходящимися). Доказываются следующие его свойства: 1) $\Phi_r(x)$ $(x\neq(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda))$ является непрерывной и строго возрастающей функцией r; 2) для любых линейно независимых x и y имеют место неравенства

$$\Phi_r(x+y)>\Phi_r(x)+\Phi_r(y)\ \text{ при }\ r<1\ \text{ и}$$

$$\Phi_r(x+y)<\Phi_r(x)+\Phi_r(y)\ \text{ при }\ r>1.$$

Далее, при условии, что все $x_n>0$: 3) $[\Phi_r(x)]^r$ логарифмически выпуклая функция r; 4) при убывании $r>0$ $\Phi_r(x)$ — логарифмически выпуклая функция от $1/r$, а при возрастании $r<0$ — логарифмически вогнутая функция $1/r$.

Эти свойства справедливы и для функционала Минковского, определенного в пространстве неотрицательных, равномерно ограниченных и измеримых функций $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

$$M_r(f)=\left\{\int_{I_0}[f(x)]^r\,d\mu(x)\right\}^{1/r}\quad(I_0\equiv[0, 1]).$$

С помощью функционала Минковского доказывается неравенство

$$\sum a_k x_k y_k\leqslant\left(\sum a_k x_k^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r}\left(\sum a_k y_k^r\right)^{1/r}$$

и соответствующее ему неравенство Гёльдера, а также ряд других неравенств.

Далее рассматривается билинейная форма

$$\Psi_{r,s}(x, y)=\sum_{i,k}a_{ik}x_i^r y_k^s$$

$$\left(a_{ik}\geqslant 0,\ \sum a_{ik}=1,\ x_i,\ y_k>0\right)$$

и доказывается ее логарифмическая выпуклость по r и s. Этим же свойством обладает и мультилинейная форма и функционал, определенный в пространстве функций:

$$\Psi_{r,s}(f, g)=\int_{I_1}[f(x)]^r[g(y)]^s\,dxdy$$

$$(I_1\equiv 0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1).$$

А. Г. Школьник

3021. Теорема Грина. Краль, Маржик (Der Greensche Satz. Král Josef, Mařík Jan), Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 2, 235—247 (нем.; рез. русск.)

Пусть φ, ψ — непрерывные вещественные функции с ограниченным изменением в интервале $\langle a, b\rangle$; пусть $f=\varphi+i\psi$. Если F — непрерывная комплексная (или вещественная) функция на множестве $f(\langle a, b\rangle)$, то положим

$$\int_f F dx=\int_a^b F(f(t))\,d\varphi(t),\quad \int_f F dy=\int_a^b F(f(t))\,d\psi(t),$$

$$\int_f F dz=\int_f F dx+i\int_f F dy.$$

Далее, пусть E_1 (соответственно E_2) означает множество всех (конечных) вещественных (соответственно комплексных) чисел. Если $A\subset E_2$, $t\in E_1$, обозначим $A_t^1=E[x\in E_1;\ x+it\in A]$, $A_t^2=E[y\in E_1;\ t+iy\in A]$. Пусть еще $V_0(a, b)$ — множество всех непрерывных комплексных функций f с ограниченным изменением в интервале $\langle a, b\rangle$ таких, что $f(a)=f(b)$. Если

$f \in V_0(a, b)$, определим на множестве $E_2 = f(\langle a, b\rangle)$ функцию $\operatorname{ind}_f \xi = \frac{1}{2\pi i}\int_f \frac{dz}{z-\xi}$.

Имеет место следующая теорема: Пусть $f \in V_0(a, b)$, $K = f(\langle a, b\rangle)$, $G = E[z; \operatorname{ind}_f z \neq 0]$. Пусть F — непрерывна на $G \cup K$ и $A \subset G$ такое, что A_y^1 счетно для почти всех y $y \in E_1$ и что для $z = x + iy \in G - A$ существует конечная производная $\frac{\partial F(x+iy)}{\partial x}$. Тогда для почти всех $y \in E_1$ множество G_y^1 является соединением конечного числа ограниченных открытых интервалов, существует интеграл Перрона

$$S(y) = \int_{G_y^1} \operatorname{ind}_f(x+iy)\frac{\partial F(x+iy)}{\partial x}\,dx$$

и имеет место равенство $\int_{E_1} S(y)\,dy = \int_f F dy$.

При аналогичных предположениях справедливо равенство

$$-\int_{E_1}\left(\int_{G_x^2}\operatorname{ind}_f(x+iy)\frac{\partial F(x+iy)}{\partial y}\,dy\right)dx = \int_f F dx.$$

Отсюда вытекает следующая теорема: Пусть P, Q — непрерывные функции на $G \cup K$, а A — такое множество ($A \subset G$), что A_t^1, A_t^2 счетны для почти всех $t \in E_1$ и что для всех $z = x + iy \in G - A$ существуют конечные производные $\frac{\partial Q(x+iy)}{\partial x}$, $\frac{\partial P(x+iy)}{\partial y}$. Предположим также, что существуют интегралы Лебега

$$\int_G \operatorname{ind}_f z\frac{\partial P(z)}{\partial y}\,dxdy,\quad \int_G \operatorname{ind}_f z\frac{\partial Q(z)}{\partial x}\,dxdy.$$

Тогда

$$\int_G \operatorname{ind}_f\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_f P dx + \int_f Q dy.$$

Из резюме автора

3022. Об одной бесконечной системе линейных уравнений. Реньи (Egy végtelen lineáris egyenletrendszerről. Rényi Kató), Mat. lapok, 1957, 8, № 1—2, 61—67 (венг.; рез. англ., русск.)

Рассматривается бесконечная система линейных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1}x_n = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (1)$$

Доказаны следующие две теоремы:

1. Если в (1) $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \geqslant 1$.

2. Если (1) имеет место и $b_{k_s} = 0$, где $k_s < cs$ с постоянной $c > 1$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} > 0$. Из резюме автора

3023. Функциональное уравнение $f(x+y) = f(x)f(y)$. Неванлинна (Funktionaaliyhtälöstä $f(x+y) = f(x)f(y)$. Nevanlinna Rolf), Arkhimedes, 1957, № 1, 1—16 (финск.)

Пусть A — билинейный оператор из пространств R^m, R^n (R^m — m-мерное евклидово пространство) в R^n, удовлетворяющий условию $AhAk = AkAh$ $(k, h \in R^m)$. Доказывается, что дифференциальное уравнение $dy = Adxy$ имеет при начальном условии $y(x_0) = y_0$ $(x_0 \in R^m, y_0 \in R^n)$ единственное решение $y = f(x - x_0)\,y_0$, где $f(x) = E + \sum_{q=1}^{\infty}(Ax)^q/q!$ (E — единичный оператор). При этом оператор $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+y) = f(x)f(y)$, являясь единственным дифференцируемым решением его.

Г. Ф. Кангро

3024. Один класс линейных функциональных уравнений. Германеску (Une classe d'équations fonctionnelles linéaires. Ghermanescu Michel), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 3, 274—276 (франц.)

Рассматривается линейное функциональное уравнение

$$f(M) + a_1(M)f^1(M) + \ldots + a_n(M)f^n(M) = 0, \qquad (1)$$

где $f(M)$ — искомая функция от точки M, принадлежащей некоторой области D многомерного пространства, $a_k(M)$ — данные коэффициенты, автоморфные относительно некоторого преобразования $[M, \theta(M)]$ (т. е. $a_k[\theta(M)] = a_k(M)$), а $f^k(M) = f[\theta_k(M)]$, причем величины $\theta_k(M)$ определяются из рекуррентных соотношений $\theta_k(M) = \theta[\theta_{k-1}(M)]$. Без доказательства устанавливается, что уравнение (1) имеет нетривиальное решение в D тогда и только тогда, когда таким же решением обладает по крайней мере одно из функциональных уравнений

$$f^1(M) - \lambda_k(M)f(M) = 0, \qquad (2)$$

где $\lambda_k(M)$ — некоторый корень характеристического уравнения $\lambda^n(M) + a_1(M)\lambda^{n-1}(M) + \ldots + a_n(M) = 0$.

Дается также общий вид решения уравнения (1) при помощи решений уравнений (2). Г. Ф. Кангро

3025 К. Универсальная математика. Часть I. Функции и пределы. Бауэрс, Брандт, Кейпел, Дьюрен, Прайс, Скотт (Universal mathematics. Part I. Functions and limits. A book of experimental text materials. Preliminary ed. Bowers F. A. I., Jr, Brandt R. N., Capel C. E., Duren W. L., Jr, Price G. B., Scott W. R. Lawrence, Kansas, Univ., 1954, 310 pp.) (англ.)

Книга написана на основе указаний комитета по пересмотру студенческих программ, созданного Американской математической ассоциацией, и представляет собой попытку нового подхода к введению в курс высшей математики. Издание ее носит пробный характер.

В полном объеме Универсальная математика будет состоять из двух частей: I. Функции и пределы и II. Структура множеств, из которых, пока что, имеется только первая. Курс мыслится как обязательная предварительная подготовка по математике для студентов университетов США всех специальностей.

Реферируемая книга содержит идеи основных абстрагированных понятий математики (числа, функции, предела, непрерывности, производной, интеграла и т. п.), с которыми придется встретиться студенту при дальнейшем изучении курса высшей математики. Чтобы облегчить усвоение материала, даются два параллельных текста: формальный (отмечен звездочкой!) и более простой интуитивный, содержащий конкретные модели общих математических концепций. Приведенные упражнения также разбиты на две рубрики, причем задачи технически просты и носят в основном, иллюстративный характер.

Кратко остановимся на содержании книги по главам. В введении выясняются, в общих чертах, положение математики в науке и особенности математического метода. Гл. 1 посвящена действительным числам и их геометрическим интепретациям. В частности, рассматриваются декартовы координаты на плоскости, как упорядоченные пары чисел. Гл. 2 в основном описательная, трактует вопросы, связанные с измерением величин. В гл. 3 дается общее определение функции, под которой понимается тройка $\{f, A, B\}$, содержащая

два множества A и B и отношение f между ними, в силу которого из декартового произведения $A \times B$ — множества всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$, выделяется некоторое подмножество $\{(a,b)\}$ не содержащее элементов a, входящих в две различные пары (a, b) и (a, b'). Рассматриваются основные типы функций (тождественная, единичная, полиномиальная, рациональная и др.) и операции над ними. Определяются максимум и минимум действительнозначной функции. Изучаются выпуклые функции и множества. С помощью разностных отношений формулируются условия возрастания и убывания функций. В гл. 4 вводится понятие предела Моор—Смитовского (Moor—Smith) типа для частично упорядоченного процесса. Отсюда, при конкретизации, получается предел числовой функции и обычное определение непрерывности ее. В гл. 5 рассматриваются производная и некоторые ее приложения. Гл. 6 посвящена интегралу Римана, который вводится на основе рассмотрения ступенчатых функций. В гл. 7, с помощью определенного интеграла, определяется логарифмическая функция; обращение последней приводит к показательной функции. Гл. 8 суммарная, содержит общие списки формул дифференцирования, интегрирования и обзорные упражнения. В приложении приводятся полные системы аксиом для различных подмножеств вещественных чисел (действительные числа, натуральные числа, рациональные числа). В качестве модели множества действительных чисел рассматривается множество бесконечных десятичных дробей. Б. П. Демидович

3026 К. Общий курс математического анализа (Конспект лекций). 2-е изд. Романовский П. И. (Моск. авиац. ин-т). М., Оборонгиз, 1957, 331 стр., илл., беспл.

3027 К. Частные производные. Гиллесфри (Derivadas parciales. Gillesfrie R. P. Trad. Madrid, Dossat (s. a.), 112 p. ill., 80, 00 ptas), Bibliogr. hisp., 1957, 16, № 4, 97 (исп.)

3028 К. Техника математического анализа. Трантер (Techniques of mathematical analysis. Tranter Clement John. London, Engl. Univ. Press, 1957, XII, 396 pp., ill., 27 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 398, 8 (англ.)

3029 К. Лекции по теории аппроксимации. Ахиезер (Teoria aproksymacji. Achiezer N. I. Tłum. z ros. Warszawa, PWN, 1957, 292 s., il., 24 zł), Przew. bibliogr., 1957, 13, № 20, 290 (польск.)
Перевод с русского (М.—Л., Гостехиздат, 1947).

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3030. Об одном неравенстве, относящемся к рядам с положительными убывающими членами. Кшиж (An inequality concerning series with decreasing positive terms. Krzyz Jan), Ann. Univ. M. Curie Skłodowska, 1955 (1957), A9, № 1—13, 187—193 (англ.; рез. русск., польск.)

Положим $U_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $a_0 > 0$, $a_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}/U_k.$$

Будем говорить, что последовательность U_n удовлетворяет свойству (A), если U_n возрастает, а последовательность a_n не возрастает. Тогда: 1. Если $\lim_{n\to\infty} U_n$ существует, то $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 1$. 2. Если U_n удовлетворяет свойству (A), то

$$\tau_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}.$$

Существует последовательность U_n, удовлетворяющая (A), такая, что $\tau_n > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \log n \left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$, начиная с некоторого n_0. Отсюда вытекает, что для U_n, удовлетворяющих (A), $\tau_n = 0(\log n)$, причем правая часть не может быть уменьшена. 3. Для U_n, удовлетворяющих (A), имеем $(U_0 + U_1 r + U_2 r^2 + \ldots)\left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} r + \ldots + \frac{1}{U_n} r^n + \ldots\right) \leqslant \frac{1}{r(1-r)^2} \log \frac{1}{1-r}$, $0 < r < 1$. Знак равенства достигается для $U_n = n + 1$.
И. И. Огиевецкий

3031. О сходимости ряда $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots$ Пламодов В. П., Матем. просвещение, вып. I, 1957, 148

3032. Об арифметико-геометрических рядах. Карр (On the arithmetico-geometric series. Carr A. J.), Math. Gaz., 1957, 41, № 335, 44—46 (англ.)

Рассматриваются суммы $S^r_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} C^k_{r+k-1} x^k$. При помощи элементарных преобразований находятся формулы для $S^r_{n+1}(x)$; например, $S^r_{n+1}(x) = \frac{1}{(1-x)^r} - x^n \sum_{p=1}^{r-1} C^p_{n+r} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{r-p}$. Отсюда получается формула суммы ряда

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} C^p_{p+r} x^p = x^n \sum_{p=0}^{r-1} C^p_{n+r} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{r-p} \quad (|x| < 1).$$

Получена также формула для $\sum_{p=1}^{n} p^r x^p$. В записи символа $\sum_{p=1}^{n} p^r x^p$ опечатка.
С. П. Пулькин

3033. Сравнение полной силы некоторых хаусдорфовских методов. Басу (On compariso of the total strength of some hausdorff methods. Basu S. K.), Math. Z., 1957, 67, № 4, 303—309 (англ.)

Метод суммирования A вполне сильнее (totally stronger; в дальнейшем в. с.) метода B, если из $s_n \to s\ (B)$ следует, что $s_n \to s\ (A)$ для всякого конечного или бесконечного s, если же это имеет место только для конечных s, то метод A не в. с. метода B. Последовательность s_n суммируется методом Хаусдорфа к s, если $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$, где

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k,$$

$\{\mu_n\}_0^\infty$ — последовательность регулярных моментов. Метод суммирования Хаусдорфа, соответствующий моментной последовательности $\mu_n = \left(\frac{\beta}{n+\beta}\right)^\alpha$ $(\alpha, \beta > 0)$, обозначим через Γ^α_β, метод суммирования Гёльдера порядка α (соответствует моментной последовательности $\mu_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^\alpha$) обозначим как H^α.

Доказываются, например, следующие теоремы:
Теорема 2. Если $\alpha > 0$, то 1) для $0 < \beta < 1$, Γ^α_β в. с. H^α, но H^α не в. с. Γ^α_β; 2) для $\beta > 1$, H^α в. с. Γ^α_β, но Γ^α_β не в. с. H^α.
Теорема 3. 1) Если $\alpha > 1$, то Γ^α_β в. с. Γ_β; 2) если $0 < \alpha < 1$, то Γ_β в. с. Γ^α_β; 3) если $0 < \beta < 1$,

то Γ_β в. с. H^β; 4) если $\beta>1$, то H^β в. с. Γ_β; где $\Gamma_\beta=\Gamma_\beta^1$.
И. И. Огиевецкий

3034. К теоремам Фробениуса и Кноппа о суммируемости методом Абеля. Раджагопал (On a theorem of frobenius and knopp for Abel summability. Rajagopal C. T.), Math. Z., 1957, 67, № 4, 310—319 (англ.)

Определения суммируемости методами Чезаро, Гёльдера и Абеля последовательностей и функций см. Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., 1951.

Пусть σ_n^α обозначает чезаровское (гёльдеровское) среднее порядка α последовательности s_n ($n=0, 1, 2, \ldots$).

Теорема 1. Если $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{\alpha_0+1}=s$, $\alpha_0\geqslant 0$, то для любой функции $f(x)$ с ограниченной вариацией в $0\leqslant x\leqslant 1$ при $\alpha\geqslant\alpha_0$ будем иметь:

$$y\sum_0^\infty e^{-yn}f(e^{-yn})\,\sigma_n^\alpha \begin{cases} \text{сходится для } y>0; \\ \text{стремится к } s\int_0^1 f(t)\,dt \\ \text{при } y\to+0. \end{cases}$$

Для $\alpha_0=0$ см. РЖМат, 1955, 4909.

Пусть $\sigma^\alpha(u)$ обозначает чезаровское (гёльдеровское) среднее порядка α функции $s(u)$, ограниченной и лебеговски интегрируемой в любом конечном интервале $0<u<x$, $x>0$.

Теорема 1'. Если $\lim_{x\to\infty}\sigma^{\alpha_0+1}(x)=s$, $\alpha_0\geqslant 0$, то для любой функции $f(x)$ с ограниченной вариацией в $0\leqslant x\leqslant 1$ при $\alpha\geqslant\alpha_0$ будем иметь

$$y\int_0^\infty e^{-yu}f(e^{-yu})\,\sigma^\alpha(u)\,du \begin{cases} \text{существует как интеграл} \\ \text{Коши—Лебега при } y>0; \\ \text{стремится к } s\int_0^1 f(t)\,dt \\ \text{при } y\to+0. \end{cases}$$

Хорошо известно, что последовательность, суммируемая методом Чезаро (C, α) (или методом Гёльдера (H, α)), суммируется также методом Абеля (для $\alpha=1$ это было показано Фробениусом). Кнопп (Math. Z., 1944, 50, 755—760) показал, что аналогичный результат (при замене чезаровских, гельдеровских и абелевских средних их интегральными аналогами) справедлив также и для функций в случае $0<\alpha\leqslant 1$, но может оказаться неверным для $\alpha>1$.

Полагая в формулировке теоремы 1' $f(x)=1$, автор приходит к утверждению, которое рассматривает как косвенное обобщение результата Кнопна на случай $\alpha>1$. И. И. Огиевецкий

3035. Заметка о множителях суммируемости. Бозанкет, Татчелл (A note on summability factors. Bosanquet L. S., Tatchell J. B.), Mathematika, 1957, 4, № 7, 25—40 (англ.)

Ряд $\sum a_n$ называют суммируемым $(C, -1)$ к s, если он сходится к s и $\lim_{n\to\infty} na_n=0$. О суммировании (C, α) при $\alpha>-1$ см. Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., 1951.

Ряд $\sum a_n$ суммируем методом $|A|$ (абсолютно суммируем методом Абеля) к s, если $\sum a_n x^n$ сходится для $0\leqslant x<1$, $\sum a_n x^n$ имеет ограниченную вариацию в $0\leqslant x<1$ и $\lim\sum a_n x^n=s$ при $x\to 1-0$.

Теорема 1. Если $\alpha\geqslant -1$, то для того чтобы ряд $\sum a_n\varepsilon_n$ суммировался методом $|A|$, предполагая, что ряд $\sum a_n$ суммируется методом (C, α), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1)\ \sum_1^\infty\frac{|\varepsilon_n|}{n}<\infty,\quad 2)\ \sum_1^\infty n^\alpha|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n|<\infty.$$

Здесь

$$\Delta^\alpha\varepsilon_n=\sum_{k=n}^\infty A_{k-n}^{-(\alpha+1)}\varepsilon_k,\quad A_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}$$

Достаточность для всех $\alpha\geqslant 1$ см. РЖМат, 1957, 7133. Необходимость для $\alpha=0$ (откуда вытекает их необходимость для всех $\alpha>0$) установлена Татчелом (РЖМат, 1956, 528). В реферируемой работе устанавливается необходимость для $\alpha=-1$ (и, следовательно, как показано в работе, для всех $-1\leqslant\alpha<0$). В добавлении рассматриваются некоторые другие результаты того же рода, базирующиеся, в частности, на приведенном в работе следующем неравенстве для чезаровских чисел:
Если $-1<\alpha<0$ и $0\leqslant n\leqslant m$, то

$$\left|\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{\nu=0}^n A_{m-\nu}^\alpha a_\nu\right|\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{A_k^\alpha}\sum_{\nu=0}^k A_{k-\nu}^\alpha a_\nu\right|,$$

где a_ν — некоторые числа. И. И. Огиевецкий

3036. Плотности множеств целых чисел и преобразования последовательностей нулей и единиц. Агнью Ральф Палмер (Densities of sets of integers and transforms of sequences of zeros and ones. Agnew Ralph Palmer), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 369—389 (англ.)

Пусть E — бесконечное множество положительных целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$. Положим $S(t)=\sum_{\lambda_k<t}1$, $D(t)=\frac{S(t)}{t}$. Тогда верхней плотностью $\bar D$ множества E будет $\bar D=\limsup_{t\to\infty}D(t)$ (соответственно, нижняя плотность $\underline D=\liminf_{t\to\infty}D(t)$), в случае существования $D=\lim_{t\to\infty}D(t)$, D — плотность множества E. Сущность работы заключается в применении процессов суммирования к функции $D(t)$ для получения других определений плотностей последовательности и изучения свойств и взаимоотношений между этими определениями. Так, например, используя интегральную форму преобразования арифметическими средними, приходим к следующему определению верхней плотности:

$$\bar D_M=\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x D(t)\,dt.$$

В работе вводится некоторый общий класс верхних плотностей $\bar D_\Phi=\limsup_{x\to\infty}F(x)$ (соответственно, нижняя плотность $\underline D_\Phi=\liminf_{x\to\infty}F(x)$), где $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty\Phi(t)\,ds(xt)$, а $\Phi(t)$ для $t\geqslant 0$ — положительна, непрерывно, монотонно убывает и $\int_0^\infty\Phi(t)\,dt=1$. Полагая, в частности, функцию $\Phi(t)$ равной соответственно $\frac{1}{r!}\left(\log\frac{1}{t}\right)^r$,

$E(t)$ $\left[E(t)=\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$ — экспоненциальная интегральная функция$\right]$, e^{-t}, $\frac{1}{\pi}\log(1+1/t^2)$ приходим к плотностям $\overline{D}_M^{(r)}$, $\overline{D}_A$, $\overline{D}_\alpha$, $\overline{D}_p$, соответствующим методам суммирования Гёльдера, Абеля, преобразованию Пуассона. Следующая формула характеризует связь между $\underline{D}$, $\overline{D}$, $\underline{D}_\Phi$, $\overline{D}_\Phi$:

$$\underline{D}\leqslant\underline{D}_\Phi\leqslant\overline{D}_\Phi\leqslant\overline{D}.$$

В п. 3 работы устанавливается следующий основной результат:

Теорема. Верхняя плотность $\overline{D}_\Phi$ и верхняя плотность $\overline{D}$ любого множества положительных целых чисел удовлетворяют условию

$$\operatorname*{l.u.b.}_{x>0}\int_{(1-\overline{D})x}^{x}\Phi(t)\,dt\leqslant\overline{D}_\Phi\leqslant\overline{D}$$

и, следовательно, также более слабому, но простому условию

$$\left[\max_{t>0}t\Phi(t)\right]\cdot\overline{D}\leqslant\overline{D}_\Phi\leqslant\overline{D}.$$

Кроме того, каждому числу θ, $0\leqslant\theta\leqslant1$, соответствует множество E положительных чисел, для которого $\overline{D}=\theta$, верхняя плотность $\overline{D}_\Phi$ этого множества определяется из формулы

$$\overline{D}_\Phi=\operatorname*{l.u.b.}_{x>0}\int_{(1-\theta)x}^{x}\Phi(t)\,dt.$$

В § 4 указывается эффективный метод построения только что упомянутого в теореме специального множества, представляющего последовательность, состоящую из нулей и единиц, с заданной верхней плотностью $\overline{D}=\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant1$, и показывается, что в случае этой последовательности, для определения ее плотности $\overline{D}_\Phi$, справедлива формула

$$\overline{D}_\Phi=\max_{x>0}\int_{\lambda x}^{x}\Phi(t)\,dt.$$

Далее строится таблица для определения верхней плотности. Приводятся некоторые асимптотические формулы для вычисления плотности.

Примечание референта. В работе отсутствует литературный обзор работ по теории плотности числовых последовательностей (упоминается лишь работа Дворецкого (C. r. Acad. sci. Paris, 1947, 225, 481—483), в связи с чем, вероятно, не цитируется работа Шнирельмана (Math. Ann., 1933, 107, 649—690), где впервые было введено понятие плотности числовой последовательности. И. И. Огиевецкий

3037. Теоремы обращения для бесконечных произведений. Слепенчук К. М., Научн. зап. Днепропетр. ун-та, 1956, 45, 199—206

Пусть (A_1) — класс матриц $A=(a_{nk})$, для которых $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$, $n=1,\ 2\ldots$; (A_2) — класс матриц A, для которых $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}-1|<\infty$, $n=1,2,\ldots$; (A_3) — класс матриц A, для которых $\lim_{k\to\infty}a_{nk}=a_n$, $n=1,2,\ldots$, существует и равен 0 или 1, причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}-a_n|$ сходится для $n=1,\ 2,\ \ldots$.

Доказывается, что если матрица $A\subset(A_1)$ и удовлетворяет условиям: 1) $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=1$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, 2) существует последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$, $k_n\to\infty$ при $n\to\infty$, такая что $\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}-1|+\sum_{k=k_n+1}^{\infty}|a_{nk}|<M$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, то для того, чтобы из суммируемости (A) к числу P любого бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty}|1+u_k|$, для которого $u_k\to0$ при $k\to\infty$ и $|1+u_k|>C$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, следовала бы его сходимость к P, необходимо и достаточно, чтобы $l_{n+1}-l_n\leqslant K$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, где $\{l_n\}$ — возрастающая последовательность, образованная из всех элементов последовательности $\{k_n\}$.

Аналогичные теоремы установлены для классов матриц (A_2) и (A_3). М. Д. Калашников

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3038. О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов. Геронимус Я. Л., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80; Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 87—100

С некоторыми дополнениями приводится подробное доказательство ранних результатов автора (Докл. АН СССР, 1940, 29, 536—538).

Пусть $\{a_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ $(\lambda_k\neq0)$ — две последовательности комплексных чисел. Следуя Перрону и Стилтьесу, по данным числам строится последовательность многочленов $\left\{P_k^{(i)}(z)\right\}$, причем многочлены $P_n^{(1)}(z)$ и $\lambda_1P_{n-1}^{(2)}(z)$ являются частными решениями разностного уравнения

$$y_n-(z-a_n)\,y_{n-1}+\lambda_ny_{n-2}=0. \tag{1}$$

Если имеет место периодичность, т. е.

$$a_n=a_m,\ \lambda_n=l_m,\ n-s\equiv m\ (\mathrm{mod}\,k);\ (m=0,\ 1,\ \ldots,\ k),$$
$$n\geqslant s+1,\ s\geqslant0, \tag{2}$$

то решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами

$$y_{n+2k}-(p_k-r_{k-2})\,y_{n+k}+ly_n=0,\quad n\geqslant s-1. \tag{3}$$

Здесь p_k и r_{k-2} — некоторые полиномы относительно z и $l=l_1l_2\ldots l_k$. Решение уравнения (3) находится в явной форме; указываются некоторые его свойства и свойства многочленов вида $P_k^{(i)}(z)$.

Если все параметры $\{\alpha_\nu\}$ и $\{\lambda_\nu\}$ $(\lambda_\nu>0)$ вещественны, то, как известно, соответствующие многочлены $\{P_n(x)\}$ ортогональны в том смысле, что существует такое $d\psi(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P_m(x)\,P_n(x)\,d\psi(x)=0,\quad m\neq n,$$

и удовлетворяют уравнению (1). Показывается, что при выполнении условия (2) $\psi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)$. Функция $\psi_1(x)$ является абсолютно непрерывной компонентой, а $\psi_2(x)$ — функция скачков. Устанавливаются основные свойства $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$. Доказательство основано на рассмотрении непрерывных дробей.

В заключение приводится несколько примеров. В работе автора (Изв. АН СССР, 1941, 5, № 3, 203—210) рассмотрен более общий случай предельной периодичности. А. А. Миролюбов

3039. Эллиптические функции как последовательности Турана. Кошмидер (Elliptische Funktionen als Turánsche Folgen. Koschmieder Lothar), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, 60, № 1, Abt. 2, 3—6 (нем.)

Последовательность $\{\varphi_n(u)\}$ функций действительного переменного u есть последовательность Турана, если определители

$$D_n(u)=\begin{vmatrix}\varphi_{n-1}(u) & \varphi_n(u)\\ \varphi_n(u) & \varphi_{n+1}(u)\end{vmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

отрицательны. Если модуль k есть положительная правильная дробь, то эллиптические функции Якоби $\mathrm{sn}(\alpha u+\beta)$ и $\mathrm{cn}(\alpha u+\beta)$ (α, β — действительные параметры) образуют последовательности Турана на действительной оси (кроме точек $2mK/\alpha=u_m$, m — целое, где $D_n(u_m)=0$). $\mathrm{dn}(\alpha u+\beta)$, вообще говоря, не есть последовательность Турана. Рассматриваются предельные случаи $k=0$; $k=1$; $\alpha=\pm1$, $\beta=0$; $\alpha=-1$, $\beta=K$. И. Г. Соколов

3040. Асимптотическое разложение функций Лежандра при обращении в бесконечность их степени и порядка. Торн (The asymptotic expansion of Legendre functions of large degree and ordre. Thorne R. C.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1957, A249, № 971, 596—620 (англ.)

Исследуются решения уравнения Лежандра

$$(1-z^2)w''-2zw'+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right\}w=0 \quad (1)$$

в случае, когда m и n — большие положительные числа ($0<m<n$), а z — комплексная переменная. В качестве фундаментальной системы уравнения (1) берутся функции Лежандра первого и второго рода $P_n^{-m}(z)$ и $Q_n^{-m}(z)$ степени n и порядка m, причем применяется определение Гобсона, основанное на представлении этих функций в виде контурных интегралов. Положим

$$u=n+1/2,\ m=\alpha u,\ \beta=\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Тогда функции

$$(z^2-1)^{1/2}P_n^{-m}(z) \quad \text{и} \quad (z^2-1)^{1/2}Q_n^{-m}(z)$$

удовлетворяют уравнению

$$w''=\left\{\frac{z^2-\beta^2}{(z^2-1)^2}u^2-\frac{z^2+3}{4(z^2-1)^2}\right\}w. \quad (2)$$

Отправляясь от уравнения (2), автор получает три типа асимптотических разложений функций Лежандра при $u\to\infty$, широко используя работы Олвера (РЖМат, 1955, 5776, 5209; 1957, 3087).

Положив

$$W=\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^{-1/2}w, \quad (3)$$

мы приводим уравнение (2) к виду

$$\frac{d^2W}{d\xi^2}=\{u^2+f(\xi)\}W, \quad (4)$$

где $f(\xi)=\dfrac{z^2-1}{4(z^2-\beta^2)^2}\{z^2(4\alpha^2-1)+(1-\alpha^4)\}$.

Доказывается, что

$$(z^2-\beta^2)^{1/2}P_n^{-m}(z)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1/2)}}\left\{\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}\right\}^{1/2}W_1(\xi);$$

$$(z^2-\beta^2)^{1/2}Q_n^{-m}(z)\sim\frac{\pi e^{-m\pi i}}{\sqrt{2\pi(n+1/2)}}\left\{\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}\right\}^{1/2}W_2(\xi),$$

где $W_1(\xi)$ и $W_2(\xi)$ — решения уравнения (4).

Из теории Олвера следует, что нельзя получить асимптотическое разложение по функциям экспоненциального типа, которое было бы действительным в окрестности точки обращения в нуль коэффициента при u^2. Чтобы устранить эту трудность, вместо функций $e^{\pm u\xi}$, вводится функция Эйри $w=\mathrm{Ai}(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\dfrac{d^2w}{dt^2}=tw$ и условию $\mathrm{Ai}\left(e^{-\frac{2}{3}\pi i}t\right)-\mathrm{Ai}(t)=\dfrac{e^{\pi i/3}\sqrt{t}}{\pi\sqrt{3}}I_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}t^{3/2}\right)$, где I обозначает видоизмененную функцию Бесселя, и получаются асимптотические разложения с помощью функции Эйри.

Асимптотические разложения функций Лежандра по функциям типа Эйри имеют место при $u\to\infty$ равномерно относительно z в области D'_z, получающейся удалением из плоскости z, разрезанной от $+1$ до $-\infty$, области L'_z, состоящей из окрестности точки $z=-1$ и полосы

$$|\mathrm{Re}\,z|<\beta+\delta,\quad 0\geqslant\mathrm{Im}\,z\geqslant-\delta_1\quad(\delta_1>0)$$

Наконец, приводятся асимптотические разложения функции Лежандра по видоизмененным функциям Бесселя и Ганкеля. Ю. Л. Рабинович

3041. Вывод рекуррентных соотношений для образующей функции $u_{3,3}=[1-x^3+(x-z)^3]^{-1/3}$. Феррер-Фигерас (Sobre las relaciones de recurrencia deducidas de la funcion generatriz $u_{3,3}=[1-x^3+(x-z)^3]^{-1/3}$. Ferrer Figueras Lorenzo), Gac. mat., 1956, 8, № 8, 252—255 (исп.).

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3042. О применении обобщенных функций к исследованию переходных процессов в электрических цепях. Бразма Н. А., Zinath. raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-т, 1957, **10**, 59—69

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами на полупрямой решается применением метода преобразования Фурье обобщенных функций.

Г. Е. Шилов

3043. Характеристические функции линейных систем с постоянными коэффициентами, имеющих одну степень свободы. Бабистер (Response functions of linear systems with constant coefficients having one degree of freedom. Babister A. W.), Quart J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 3, 360—368 (англ.)

Рассматриваются характеристические функции вида

$$L=\int_0^\infty e^2d\tau \quad \text{и} \quad L_1=\int_0^\infty\left[\frac{de}{d\tau}\right]^2d\tau,$$

где e означает «погрешность» линейной системы, т. е. отставание системы от действующего на нее возмущения.

Пусть дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$a_n\frac{d^nx}{d\tau^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{d\tau^{n-1}}+\cdots+a_0x=f(\tau), \quad (1)$$

где a_0, a_1, ..., a_n постоянны, а $f(\tau)$ — данная функция. Предполагается, что все корни характеристического уравнения у (1) имеют отрицательную дей-

ствительную часть, т. е. система устойчива. Функция e определена равенством

$$e = \frac{1}{a_0} f(\tau) - x.$$

Изучаются следующие случаи:

1. Свободное движение $[f(\tau) = 0]$ при ненулевых начальных условиях. Приводятся выражения функций L и L_1, содержащие коэффициенты уравнения (1) и некоторые квадратичные формы относительно начальных данных.

1а. Приводится также выражение функции L, содержащее члены из выражения частотной характеристики системы и начальные данные.

2. Вынужденное движение при нулевых начальных условиях. Рассматриваются возмущения: а) вида функции начального скачка ($f = 0$ при $\tau \leqslant 0$ и $f = f_0$ при $\tau > 0$), б) вида начального импульса, в) возмущение, изменяющееся с постоянной скоростью. Посредством подходящих подстановок эти случаи приводятся к случаю 1. Получаются выражения функций L и L_1, содержащие коэффициенты уравнения (1).

Приводятся рассуждения об использовании результатов статьи для подыскивания системы, «оптимальной» согласно условиям задачи. Библ. 10 назв.

Н. А. Бразма

3044. Графическое выполнение периодических преобразований функций и его применение в проблемах автоматического регулирования. Профос, Келлер (Graphische Durchführung periodischer Funktionaltransformationen und ihre Anwendung auf Regelprobleme. Profos P., Keller H.), Techn. Rundschau Sulzer, 1957, **39**, № 1, 19—25 (нем.)

3045. Разложение иррегулярной функции Кулона. Хэм (Expansions of the irregular Coulomb function. Ham Frank S.), Quart. Appl. Math., 1957, **15**, № 1, 31—39 (англ.)

Радиальное волновое уравнение водорода для притягивающего потенциала имеет вид

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{2}{r} - \frac{L(L+1)}{r^2}\right) U = 0, \qquad (1)$$

где r — радиальная координата, U — радиальная часть волновой функции, умноженная на r, L — квантовое число углового момента, $E = -\frac{1}{n^2}$ — энергия.

Уравнение (1) имеет решения вида

$$U^{(L,n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-2k} U_k^{(L)}(z), \quad \text{где} \quad z = (8r)^{1/2}.$$

Если $2L + 1$ — не целое, то получаются два линейно независимых решения уравнения (1):

$$U_1^{(L,n)} = \frac{z}{2} J_{2l+1}^n(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} n^{-2k} \sum_{\alpha=2k}^{3k} a_{k,\alpha}^{(L)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1} J_{2L+1+\alpha}(z),$$

$$U_2^{(L,n)} = \frac{z}{2} J_{-(2l+1)}^n(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} n^{-2k} \sum_{\alpha=2k}^{3k} b_{k,\alpha}^{(L)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1} J_{-(2L+1)+\alpha}(z),$$

где $J_m(z)$ — функции Бесселя, а $a_{k,\alpha}^{(L)}$ и $b_{k,\alpha}^{(L)}$ — постоянные, зависящие от L и определяемые уравнениями

$$a_{k,\alpha}^{(L)} = \frac{1}{4\alpha}\left[(\alpha + 2L)\, a_{k-1,\alpha-2}^{(L)} - a_{k-1,\alpha-3}^{(L)}\right],$$

$$b_{k,\alpha}^{(L)} = -\frac{1}{4\alpha}\left[(2L + 2 - \alpha)\, b_{k-2,\alpha-2}^{(L)} + b_{k-1,\alpha-3}^{(L)}\right].$$

Если $2M + 1$ — целое положительное число, то имеет место линейная зависимость

$$\frac{\Gamma(n + M + 1)\cos(2M+1)\pi}{n^{2M+1}\Gamma(n - M)} J_{2M+1}^n(z) - J_{-(2M+1)}^n(z) = 0.$$

В этом случае для второго линейно независимого решения автор получает выражение, в которое входят функции Вебера, и оно получается иррегулярным.

Ю. Л. Рабинович

3046. Излучение газовых тел определенной геометрической формы. Тихомирова А. С., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 165—176

См. также: 2645 К, 2829, 2891, 2896, 2915, 2918, 2946, 2955, 2964, 2978, 3054, 3060, 3079, 3087

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

3047. О приближении элементов топологических пространств. Зингер (Asupra aproximării elementelor în spații topologice. Singer Ivan), Bul. științ. Acad. RPR, Sec. mat. și fiz., 1956, 8, № 4, 687—694 (рум.; рез. русск., франц.)

В топологическом пространстве E рассматриваются некоторый класс замкнутых подпространств $\mathfrak{M}$ и неубывающая последовательность $\{M_n\}$ $(M_n \in \mathfrak{M})$. Элемент $x \in E$ аппроксимируется элементами подпространств M_n, если $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n}$. Вводится понятие максимального подпространства, обобщающее понятие о гиперплоскости в нормированном пространстве, и на основании этого обобщается теорема Банаха о приближении элементов нормированного пространства линейными комбинациями заданных элементов.

С. И. Зуховицкий

3048. Монотонные линейные формы на частично упорядоченных векторных пространствах. Неф (Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen. Nef Walter), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 3, 190—197 (нем.)

В аксиоматической теории интегрирования, разработанной Хадвигером и его школой, основную роль играют (вообще говоря, бесконечномерное) частично упорядоченное векторное пространство M над полем

вещественных чисел (под M можно понимать, например, пространство всех интегрируемых функций вещественного переменного) и заданная на этом пространстве линейная форма $F(x)$ (интеграл от функции x; если x, y — вещественные функции переменного t, то $x \geqslant y$ означает, что $x(t) \geqslant y(t)$ при всех t); соотношение $x \geqslant y$ между элементами пространства M задается указанием порядкового конуса P, составленного из всех $x \geqslant 0$. Линейная форма F предполагается монотонной в том смысле, что $F(x) \geqslant F(y)$ при $x \geqslant y$. Важным является вопрос о том, в каком случае заданную на подпространстве L пространства M монотонную линейную форму F_0 можно продолжить до монотонной линейной формы, заданной на всем M (это связано с задачами расширения понятия интеграла, подобного переходу от интеграла Римана к интегралу Лебега).

В реферируемой работе решаются следующие два вопроса.

1. В каком случае частично упорядоченное векторное пространство M допускает монотонные линейные формы, отличные от формы $F(x) \equiv 0$? Необходимым и достаточным условием для этого является наличие в M хотя бы одного такого одномерного подпространства L и хотя бы одного такого полного (т. е. пересекающегося с каждым лучом в M) и ограниченного (т. е. не содержащего полностью ни одного луча) выпуклого множества K, что L не содержится целиком в $y - K - P$ ни при каком $y \in M$ ($y - K - P$ обозначает совокупность всех элементов вида $y - x - z$, $x \in K$, $z \in P$). В частности, M допускает монотонную линейную форму, принимающую на данном элементе e ($-e \notin P$) значение 1, если порожденный элементом e луч в пространстве M удовлетворяет сформулированному выше условию.

2. В каком случае заданная на подпространстве L пространства M ненулевая монотонная форма F_0 может быть продолжена до монотонной формы на всем M? Здесь необходимым и достаточным является существование в M такого полного и ограниченного выпуклого множества K_0, что множество значений функционала F_0 на пересечении $L \cap (\bar{K}_0 + P)$, где $\bar{K}_0$ есть любое множество, конгруэнтное K_0 ($\bar{K}_0 = y + K_0$, y — произвольно), ограничено снизу (подобные монотонные формы на L автор называет M-монотонными). И. М. Яглом

3049. О продолжении монотонных линейных форм. Неф (Über die Fortsetzung monotoner Linearformen. Nef Walter), Math. Z., 1956, 66, № 2, 129—142 (нем.)

Продолжение исследований автора о монотонных линейных формах в частично упорядоченных векторных пространствах (реф. 3048), тесно связанных с аксиоматической теорией интегрирования Хадвигера. Рассматривается вопрос о продолжении монотонной линейной формы F_0, заданной на подпространстве L частично упорядоченного векторного пространства M, до монотонной линейной формы F, заданной на всем M. Условия, при которых возможно такое продолжение, были выяснены в предыдущей работе; здесь обсуждается вопрос об единственности или неединственности продолжения. Устанавливается, что при заданных L и F_0 значения η, которые может принимать линейная форма F в фиксированной точке $y \in M$, образуют (собственный или несобственный) интервал $I(y)$, который может также состоять из единственной точки или быть пустым, при этом для каждого $\eta \in I(y)$ существует такое продолжение F линейной формы F_0, что $F(y) = \eta$. Границы интервала $I(y)$ (если они существуют) обозначаются через $\bar{p}(y)$ и $\underline{p}(y)$; изучаются свойства функционалов $\bar{p}(y)$ и $\underline{p}(y)$ (так функционал $\bar{p}(y)$ является выпуклым: если $\bar{p}(y_1)$ и $\bar{p}(y_2)$ существуют, то $\bar{p}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \leqslant \frac{\bar{p}(y_1)+\bar{p}(y_2)}{2}$). Особо рассматриваются такие элементы y, для которых $I(y)$ вырождается в точку: это элементы, для которых значение $F(y)$ продолженной формы определяется однозначно. Доказывается, что совокупность всех таких y образует векторное пространство N, промежуточное между L и M.

Далее специально рассматривается продолжение F линейной формы F_0, заданной на подпространстве L пространства M, на пространство $\{L, y\}$, получаемое из L присоединением единственного элемента $y \notin L$ (т. е. на пространство сумм $x + \tau y$, $x \in L$, τ вещественно). При этом возможные значения $F(y)$ образуют (собственный или несобственный) интервал $J(y)$; если этот интервал сводится к единственной точке, то элемент y называется однозначно оцениваемым по (L, F_0). Множество всех элементов y, однозначно оцениваемых по (L, F_0), образует векторное пространство $L^*(F_0)$ — однозначно оцениваемую оболочку (L, F_0) —, промежуточное между L и M. Далее рассматриваются свойства однозначно оцениваемой оболочки $L^*(F_0)$; например, доказывается, что $(L^*(F_0))^*(F) = L^*(F_0)$. И. М. Яглом

3050. Инвариантные линейные формы. Неф (Invariante Linearformen. Nef Walter), Math. Nachr., 1956, 15, № 2, 123—140 (нем.)

Работа примыкает к предшествующим исследованиям автора о монотонных линейных формах частично упорядоченных векторных пространств, связанных с хадвигеровской теорией инвариантного интегрирования (см., например, реф. 3048). Основную роль здесь играет векторное пространство $\mathfrak{M}$, в котором действует группа Γ линейных преобразований (например, пространство интегрируемых функций вещественного переменного $f(t)$ и группа сдвигов: $f(t) \to f(t+a)$), и инвариантные относительно Γ линейные формы f пространства $\mathfrak{M}$. При этом форма f называется $(\mathfrak{M}, \Gamma)$-инвариантной, если $f(x) = f(y)$ для любых двух равносоставленных относительно $(\mathfrak{M}, \Gamma)$ элементов $x \approx y\ (\mathfrak{M}, \Gamma)$ множества $\mathfrak{M}$, т. е. для таких x и y, что $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} y_k$, $y_k = \sigma_k x_k$, $\sigma_k \in \Gamma$. $(\mathfrak{M}, \Gamma)$-инвариантным формам взаимно однозначно отвечают линейные формы, задаваемые на фактор-пространстве $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{H}$, где $x \in \mathfrak{H}$, если $x \approx 0\ (\mathfrak{M}, \Gamma)$; аналогично этому $(\mathfrak{M}, \Gamma)$-инвариантные формы на подпространстве $\mathfrak{L}$ пространства $\mathfrak{M}$ однозначно соответствуют линейным формам на факторпространстве $\overline{\mathfrak{L}} = (\mathfrak{L} + \mathfrak{H})/\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{L} + \mathfrak{H}$ — минимальное линейное подпространство $\mathfrak{M}$, порождаемое подпространствами $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$); отсюда вытекают условия существования на $\mathfrak{M}$ ненулевых инвариантных линейных форм и условия возможности продолжения заданной на $\mathfrak{L}$ линейной формы до инвариантной линейной формы на всем $\mathfrak{M}$.

Далее предполагается, что векторное пространство $\mathfrak{M}$ является частично упорядоченным; предыдущие рассмотрения составляют частный случай этой более сложной ситуации, отвечающий упорядочению, при котором отношение $x \geqslant y$ означает совпадение x и y, т. е. порядковый конус $\mathfrak{M}$ состоит из одного элемента 0 (ср. указанную выше работу автора). Предполагается, что из $x \geqslant y$ следует $\sigma x \geqslant \sigma y$ ($\sigma \in \Gamma$). При этом возникают основные понятия: $x \gtrsim y\ (\mathfrak{M}, \Gamma)$ (x больше y по $(\mathfrak{M}, \Gamma)$-равносоставленности), если $x \approx x' \geqslant y' \approx y\ (\mathfrak{M}, \Gamma)$, и $x \sim y\ (\mathfrak{M}, \Gamma)$ (x эквивалентно y по $(\mathfrak{M}, \Gamma)$-равносоставленности), если $x \gtrsim y\ (\mathfrak{M})$ и $y \gtrsim x\ (\mathfrak{M}, \Gamma)$; при этом для монотонной линейной формы f пространства $\mathfrak{M}$ из $x \gtrsim y\ (\mathfrak{M}, \Gamma)$ следует $f(x) \geqslant f(y)$. Монотонные инвариантные линей-

ные формы на $\mathfrak{M}$ взаимно однозначно соответствуют монотонным формам на фактор-пространстве $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{H}$ (здесь $x \in \mathfrak{H}$, если $x \sim 0\,(\mathfrak{M}, \Gamma)$; упорядочение элементов векторного пространства $\overline{\mathfrak{M}}$ определяется естественным образом); монотонные $(\mathfrak{M}, \Gamma)$-инвариантные линейные формы на векторном подпространстве $\mathfrak{L}$ пространства $\mathfrak{M}$ однозначно отвечают монотонным формам на фактор-пространстве $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} + \mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ ($\overline{\mathfrak{L}}$ есть подпространство $\overline{\mathfrak{M}}$). Это позволяет перенести на инвариантные формы все результаты, полученные ранее без учета требования инвариантности, в частности все результаты упомянутой выше работы автора.

Наконец, последняя часть работы посвящена рассмотрению того случая, когда $\mathfrak{M}$ есть топологическое векторное пространство (см., например, Bourbaki N., Espaces vectoriels topologiques, Paris, 1953; топология предполагается инвариантной относительно Γ); при этом ищутся условия существования на $\mathfrak{M}$ ненулевых непрерывных и инвариантных линейных форм (или непрерывных, инвариантных и монотонных линейных форм; изучение последних сильно облегчается тем, что каждая монотонная инвариантная линейная форма является непрерывной) и условия возможности продолжения заданной на подпространстве $\mathfrak{L}$ подобной формы на все пространство $\mathfrak{M}$. В качестве примера полученных здесь результатов можно упомянуть следующие теоремы: 1) Ненулевые непрерывные и инвариантные формы существуют на $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{M}$ содержит такие отличные от $\mathfrak{M}$ и пустого множества открытые и выпуклые множества $\mathfrak{L}$, что $\mathfrak{L} + \mathfrak{H} = \mathfrak{L}$ ($\mathfrak{H}$ определяется как выше); 2) Ненулевую линейную форму f_0 подпространства $\mathfrak{L}$ локально выпуклого векторного пространства $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{L}$ таково, что $\mathfrak{L} + \mathfrak{H} = \mathfrak{L}$) можно продолжить до непрерывной и инвариантной формы f на $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если f_0 $(\mathfrak{M}, \Gamma)$-инвариантна и непрерывна на $\mathfrak{L}$. И. М. Яглом

3051. О квазинормированных пространствах. Павел (On quasi normed spaces. Pavel M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 5, 479—484 (англ.; рез. русск.)

Автор называет квазинормой функцию $\|x\|$, заданную в линейном множестве E и удовлетворяющую условиям: 1) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $x \in E$, $y \in E$; 2) $\|\lambda x\| = |\lambda|^r \|x\|$, λ — элемент поля скаляров, $x \in E$, $0 < r \leqslant 1$; 3) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Если в E ввести расстояние $d(x, y) = \|x - y\|$, то оно превращается в линейное топологическое пространство — QN-пространство. Приводятся примеры квазинормированных пространств; указывается, что произведение конечного числа QN-пространств и фактор-пространство QN-пространства по замкнутому подпространству — снова QN-пространства. Автор показывает, что в QN-кольцах, важным примером которых он считает совокупность всех линейных эндоморфизмов QN-пространства с обычным определением нормы и операций, имеют место простейшие факты теории нормированных колец, как, например, открытость множества регулярных элементов, голоморфность резольвенты и т. д. В. П. Хавин

3052. Теорема полноты Рисса — Фишера для пространств функций и линейных структур. Гальперин, Люксембург (The Riesz—Fischer completeness theorem for function spaces and vector lattices. Halperin Israel, Luxemburg W. A. J.), Trans. Roy. Soc. Canada 1956, Sec. 3, 50, June, 33—39 (англ.)

Линейная структура R называется полунормированной, если в ней задана функция $\|z\|$, называемая «полунормой», удовлетворяющая условиям: $0 \leqslant \|z\| < \infty$ для всех $z \in R$; $\|z\| = \|x\|$, если $x = |z|$; для положительных элементов $\|x\| = 0$ при $x = 0$; $\|x\| \leqslant \|y\|$ при $x \leqslant y$; $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$; $\|kx\| = k\|x\|$ при $k > 0$. Если, кроме того, из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$, то полунорма называется нормой и R называется линейной нормированной структурой.

Рассматриваются свойства полунорм, и для линейной нормированной структуры R доказывается теорема: R обладает свойством полноты в том и лишь в том случае, когда выполняется условие: если $\{x_n\}$ есть последовательность положительных элементов и $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, то имеется такой $x \in R$, что $\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant x$ при любом натуральном n.

Аналогичная теорема дает условие полноты пространства типа $L^{\lambda}(B)$, определенного в статье Эллиса и Гальперина (РЖМат, 1954, 4489). Д. П. Мильман

3053. О рефлективной функции длины. Гальперин, Люксембург (Reflexivity of the length function. Halperin Israel, Luxemburg W. A. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 496—499 (англ.)

Используются понятия и обозначения статьи Эллиса и Гальперина (РЖМат, 1954, 4489). Множество E называется «чисто бесконечным», если $\gamma(E) = \infty$, и $e \subset E$ влечет $\gamma(e) = 0$. Доказывается: 1) $\sup_e \lambda(u_e) \leqslant \lambda^{**}(u) \leqslant \lambda(u)$ для любого u и любой функции длины λ; 2) $\lambda^{**}(u) = \sup_e \lambda(u_e)$, если $\lambda^{**}(u) < \infty$ либо если S не содержит чисто бесконечных подмножеств; 3) $\lambda^{**} = \lambda$ в том и только в том случае, когда выполняется условие: для каждого u либо $\lambda(u) = \sup_e \lambda(u_e)$, либо имеется чисто бесконечное множество $E = E(u)$, для которого $\lambda(u_F) = \infty$ для всех $F \subset E$ с $\gamma(F) > 0$. Результаты 2) и 3) относятся к любой функции длины.

Функцию длины λ, для которой $\lambda^{**} = \lambda$, авторы называют «рефлективной». Еще один (достаточный) признак рефлективности имеется в указанной выше статье: функция длины должна быть сглаженной. Приводится пример рефлективной, но не непрерывной функции длины, а также некоторые другие примеры. Д. П. Мильман

3054. Множество всех обобщенных пределов ограниченных последовательностей. Джерисон (The set of all generalized limits of bounded sequences. Jerison Meyer), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 79—89 (англ.)

Изучается множество L всех обобщенных пределов вещественных числовых последовательностей. Под обобщенным пределом понимается линейный функционал φ, определенный на пространстве M ограниченных последовательностей и удовлетворяющий условиям:

1) $\varphi(x) \geqslant 0$, если $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\} \geqslant 0$, т. е. $\xi_i \geqslant 0$ для всех i;

2) $\varphi(Tx) = \varphi(x)$, где T — оператор, определенный на M равенством $Tx = \{\xi_2, \xi_3, \ldots\}$;

3) $\varphi(1, 1, \ldots) = 1$.

Пусть $T_n = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} T^i$.

Теорема 1. Если $\psi = \lim_{\nu} T^*_{n_\nu} \varphi_\nu$, где $\{n_\nu\}$ — неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел и φ_ν для любого ν удовлетворяет условиям 1) и 3), то $\psi \in L$.

Из теоремы 1 следует, в частности, существование обобщенных пределов, так как если взять функционалы θ_p, $\theta_p(x) = \xi_p$, то множество $\{T^{*n}\theta_p\} \subset B^*$, где B^* — единичный шар пространства M^*, и в силу компактности B^*, это множество будет иметь предельные точки, принадлежащие L по теореме 1.

Обозначим через $\mathfrak{H}(S)$ замкнутую выпуклую оболочку множества $S \subset M^*$ и пусть A — множество функционалов вида $\psi = \lim_\nu T^*_{n_\nu}\varphi_\nu$.

Теорема 2. $\mathfrak{H}(A) = L$.

Дается следующее уточнение теоремы 2. Пусть Ω' — множество экстремальных точек шара B^*, удовлетворяющих условию 1), N — множество функционалов из Ω' вида $\theta_p(x) = \xi_p$ и Ω — дополнение N до Ω'. Пусть Q — множество всех функционалов вида $\psi(x) = \chi(\{\varphi(T_n x)\})$, где $\chi, \varphi \in \Omega$.

Теорема 3. $\mathfrak{H}(Q) = L$.

При доказательстве этой теоремы используются представление M в виде множества непрерывных функций на Ω', выражение линейного функционала $\varphi \in M^*$ в виде

$$\varphi(x) = \int_{\Omega'} x(\omega)\, dm(\omega), \quad x \in M, \quad \omega \in \Omega',$$

где m — некоторая борелева мера на Ω', однозначно определяемая функционалом φ, и индивидуальная эргодическая теорема, найденная Какутани.

Последовательность $x \in M$ называется почти сходящейся, если $\psi(x)$ не зависит от $\psi \in L$.

Теорема 4. Для того чтобы существовало такое σ, что $\psi(x) = \sigma$ для всех $\psi \in L$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_n n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_{i+k} = \sigma$$

равномерно по k.

В заключение рассматривается вопрос о наибольшем обобщенном пределе и показывается, что

$$\psi_0(x) = \sup_{\psi \in L} \psi(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{k\to\infty}}\; n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_{i+k}.$$

В. И. Соболев

3055. О базисах в некоторых пространствах непрерывных функций. Бессага (Bases in certain spaces of continuous functions. Bessaga C.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 1, 11—14 (англ.; рез. русск.)

Автор называет нормой базиса $\{e_n\}$ банахова пространства наименьшее положительное число K такое, что

$$\left\| \sum_{n=1}^p t_n e_n \right\| \leqslant K \left\| \sum_{n=1}^q t_n e_n \right\|$$

для любых действительных $t_1, t_2, \ldots, t_q$ и натуральных $p < q$.

Доказывается, что в пространстве $C(D/H)$ функций, определенных и непрерывных в гильбертовом кирпиче D и обращающихся в нуль на замкнутом подмножестве $H \subset D$, существует базис с нормой единица.

Примечание референта. На стр. 12 автор формулирует при помощи условий I—IV верную теорему, однако указанная им конструкция базиса нуждается в некоторых дополнениях. В. Н. Никольский

3056. О некотором классе пространств типа B_0. Бессага, Пелчинский (On a class of B_0-spaces. Bessaga C., Pełczyński A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 4, 375—377, XXX (англ.; рез. русск.)

Обозначим через $\mathfrak{N}$ класс тех пространств типа B_0 (определение пространств типа B_0 см. в статье Мазура и Орлича (Masur S., Orlicz W., Studia math., 1948, 10, 182)), в которых нельзя построить однородной и непрерывной нормы.

Указывается ряд условий, позволяющих судить о принадлежности пространства E типа B_0 к классу $\mathfrak{N}$. Например, необходимым и достаточным условием является существование B_0-пространства E_1 и пространства X, изоморфного пространству s, таких, что $E = E_1 \times X$. В. Н. Никольский

3057. Определение R-преобразования Рейнольдса. Молинаро (Détermination d'une R-transformation de Reynolds. Molinaro Italico), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 24, 2890—2893 (франц.)

Дюбрей-Жакотен и автор предложили определение преобразования Рейнольдса (аналогичного осреднению гидродинамического потока в теории турбулентности), в котором вместо обычного требования

$$R(Rf) = Rf \quad \text{(A)}$$

используется ослабленное требование

$$2R(f \cdot Rf) = (Rf)^2 + R(Rf)^2 \quad \text{(B)}.$$

В реферируемой работе показывается на примере, что из (B), вообще говоря, (A) не следует. В построенном примере пространство функций, на которые действует оператор осреднения R, состоит из функций, заданных на прямой. Требуется, чтобы операция R удовлетворяла дополнительно условиям: 1) из $f \leqslant g$ следует $Rf \leqslant Rg$, 2) $R\,1 = 1$ и 3) $R[f(x+h)] = (Rf)(x+h)$. Найден общий вид преобразования R, удовлетворяющего всем этим условиям, а именно: $Rf = ae^{-ax}\int_{-\infty}^{x} f(t)\, e^{at} dt$ $(a > 0)$. Так, например, $Rx = x - 1/a$ и $R(Rx) = x - 2/a \neq Rx$, следовательно, аксиома (B) здесь выполнена, а аксиома (A) нет. Л. А. Дикий

3058. К теории компактных операторов в локально выпуклых пространствах. Кёте (Zur Theorie der kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen. Köthe Gottfried), Portugaliae math., 1954, 13, № 1, 97—104 (нем.)

Пусть E — локально выпуклое пространство, $\mathfrak{M}$ — семейство слабо ограниченных множеств в E', поляры которых образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для некоторой локально выпуклой топологии $\mathfrak{T}_\mathfrak{M}$ в E', и $\mathfrak{N}$ — семейство множеств в локально выпуклом пространстве F, также определяющее топологию $\mathfrak{T}_\mathfrak{N}$ в F'. $A \in L(E, F)$ называется $(\mathfrak{T}_\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$-предкомпактным, если оно переводит некоторую $\mathfrak{T}_\mathfrak{M}$-окрестность нуля в множество, предкомпактное (т. е. вполне ограниченное) в нормированном пространстве F_N, натянутом на какое-то $N \in \mathfrak{N}$ как на единичный шар. Устанавливается следующее обобщение теоремы Шаудера о вполне непрерывности сопряженного оператора: $(\mathfrak{T}_\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$-предкомпактность A равносильна $(\mathfrak{T}_\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$-предкомпактности A'. Этот результат применяется к (F)-пространствам и строится пример непрерывного линейного отображения (F)-пространства в (F)-пространство, не являющегося вполне непрерывным, но обладающего вполне непрерывным сопряженным. В последнем параграфе обобщаются две теоремы Л. Шварца (РЖМат, 1954, 2052), а именно: устанавливается, что если E и F — локально выпуклые пространства (соответственно (F)-пространства), $B \in L(E, F)$ и $B(E)$ замкнуто, причем ядро B конечномерно (соответственно $B(E)$ имеет конечную факторразмерность в F), то эти свойства не нарушаются при прибавлении к B любого вполне непрерывного $C \in L(E, F)$. Д. А. Райков

3059. О линейных преобразованиях, удовлетворяющих условию Фредгольма, и о спектре некоторых семейств преобразований. Оден (Sur les transformations linéaires qui vérifient une condition de Fredholm et sur le spectre de certaines familles de

transformations. Audin Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 24, 2880—2882 (франц.)

Сохраняются обозначения предыдущей статьи автора (РЖМат, 1957, 7154).

Пусть E — некоторое пространство над телом вещественных или комплексных чисел, G — подпространство пространства E^*, алгебраически двойственного по отношению к E, E_0 — пересечение всех G-гиперплоскостей. Линейное преобразование T пространства E в себя называется N-преобразованием, если оно имеет конечный индекс, G-бинормально и $T^{-1}(0) \cap E_0 = (0)$. Формулируется ряд предложений, характеризующих N-преобразования в общем случае, а также в частных случаях, когда индекс равен 0, или когда все T-цепочки обладают конечной длиной. Если E наделено отделимой топологией, согласующейся с векторной структурой, то аналогичные предложения формулируются для N-гомоморфизмов. Кроме того, в этом случае рассматривается семейство $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ непрерывных преобразований, где Λ — топологическое пространство, и формулируются некоторые результаты относительно множества N (множество Нётера) тех точек $\lambda \in \Lambda$, для которых T_λ является N-гомоморфизмом. Полученные результаты применяются к пространствам более специального типа (E — банахово пространство, Λ — открытое множество комплексной плоскости), и тогда автор приходит к некоторым предложениям, содержащимся в работах Аткинсона, И. Ц. Гохберга, референта.

С. Н. Крачковский

3060. Об обратной матрице для K-матрицы. Парамесваран (On the reciprocal of a K-matrix. Parameswaran M. R.). J. Indian Math. Soc., 1956, 20, № 4, 329—331 (англ.)

Матрица $A = (a_{nk})$ называется K-матрицей, если она преобразует любую сходящуюся последовательность $\{s_k\}$ в сходящуюся последовательность $\{\sigma_n\}$. Если матрица A удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < M \quad (M \text{ не зависит от } n),$$

то она называется K_r-матрицей. Доказывается, что если K-матрица A имеет двустороннюю обратную K_r-матрицу A^{-1}, то A^{-1} сама является K-матрицей.

М. Д. Калашников

3061. О множествах равномерно вполне непрерывных операторов и правильных приближениях. Го Дацзюнь, Сычуань дасюэ сюэбао, Цзыжань кэсюэ, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 1, 79—96 (кит.; рез. русск.)

Множество $\mathfrak{M}$ линейных операторов A, отображающих банахово пространство E в себя, называется равномерно вполне непрерывным, если $\bigcup_{A \in \mathfrak{M}} A(S)$ компактно для любого ограниченного множества S из E. Если операторы A_n равномерно вполне непрерывны и, кроме того, сходятся сильно к вполне непрерывному оператору A, то говорят, что A_n правильно приближают оператор A. Устанавливаются некоторые свойства множеств равномерно вполне непрерывных операторов и правильных приближений. Например, доказывается, что если при любом $\varepsilon > 0$ для множества $\mathfrak{M}$ существует в пространстве операторов равномерно вполне непрерывная ε-сеть, то $\mathfrak{M}$ равномерно вполне непрерывно. В частности, изучаются достаточные условия для того, чтобы множество интегральных операторов в L^2 было равномерно вполне непрерывным.

С. Н. Крачковский

3062. О спектрах некоторого класса операторов. Шмульян (Про спектри деякого класу операторів. Шмульян Ю. Л.), Наук. зап. Житомирськ. держ. пед. ін-т. Сер. фіз.-матем., 1957, 3, 159—168 (укр.)

Дается подробное изложение предложений, опубликованных ранее (РЖМат, 1956, 6683). И. Ц. Гохберг

3063. Абелевы кольца и спектры операторов в l_p. Краббе (Abelian rings and spectra of operators on l_p. Krabbe G. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 783—790 (англ.)

Обозначим через A оператор, определенный в пространстве l_p ($p > 1$) последовательностей $\{\xi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ матрицей $\| a_{j-k} \|_{-\infty}^{\infty}$, где числа a_k ($k = 0, \pm 1, \ldots$) являются коэффициентами Фурье

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} a(\theta)\, d\theta$$

некоторой функции ограниченной вариации $a(\theta)$ ($-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$). С. Б. Стечкин (Докл. АН СССР, 1950, 71, № 2, 237—240) установил, что операторы такого вида являются линейными ограниченными операторами, переводящими пространство l_p в себя.

Множество $\mathfrak{L}$ всех операторов указанного выше вида образует коммутативное кольцо. Устанавливаются свойства кольца $\mathfrak{L}$ и некоторых его подколец, а также свойства спектров операторов из кольца $\mathfrak{L}$.

И. Ц. Гохберг

3064. Об операторах Лорана в l_p. Хартман (On Laurent operators on l_p. Hartman Philip), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 45—48 (англ.)

Пусть $f(\varphi)$ — комплекснозначная функция с ограниченным изменением на сегменте $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Пусть $f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi}$.

Сопоставим f оператор Лорана $F = F(f)$, определенный на числовых последовательностях из l_p ($p > 1$) равенством $y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n-k} x_k$ или сокращенно $y = Fx$.

Пусть f нормирована условиями: $f(\varphi) = f(\varphi + 0)$, если $-\pi \leqslant \varphi < \pi$, и $f(\pi) = f(\pi - 0)$. Тогда спектр $\sigma(f)$ оператора F равен замыканию множества значений f, т. е. F имеет ограниченный обратный в том и только в том случае, если $|f| \geqslant \text{const} > 0$. В этом случае $F^{-1}(f) = F(1/f)$.

Для абсолютно непрерывных f эта теорема была доказана Краббе (реф. 3063).

Б. М. Левитан

3065. Линейные функциональные уравнения и интерполяционные ряды. Дейвис (Linear functional equations and interpolation series. Davis Philip), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 4, 503—532 (англ.)

В пространстве n комплексных переменных $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ рассматривается область B и в ней пространство $L^2(B)$ аналитических в B функций $f(Z)$, для которых $\| f \| = \left\{ \int_B |f|^2\, d\omega \right\}^{1/2} < \infty$ ($d\omega$ — элемент объема). Изучается функциональное однородное уравнение

$$L(f) = 0, \qquad (1)$$

где L — линейный оператор, а $f \in L^2(B)$, а также неоднородное уравнение и система уравнений, с точки зрения разложения их решений в ряды определенного вида и получения полных систем решений. Пусть $\{L_k\}$ — полная система функционалов над $L^2(B)$ (т. е. из $L_k(f) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, вытекает $f \equiv 0$). Доказывается, что функциональное уравнение $L(u) = 0$ эквивалентно счетному множеству «интерполяционных» условий $\tilde{L}_k(u) = 0$, где $\tilde{L}_k(f) = L_k(L(f))$ и, в частности, уравнение $L(u) = 0$ имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда система

функционалов $\{\tilde{L}_k\}$ неполна. Отсюда сразу же следует, что если уравнение $L(u)=0$ решается при дополнительных условиях $A_k(u)=0$ $(k=0, 1, \ldots)$, где $\{A_k\}$ — некоторое множество линейных функционалов, то эта проблема эквивалентна множеству интерполяционных условий $\hat{L}_k(u)=0$, где множество функционалов $\{\hat{L}_k\}=\{\tilde{L}_k\}\cup\{A_k\}$. И, следовательно, эта проблема может исследоваться точно теми же средствами, что уравнение $L(u)=0$ без дополнительных условий. Далее формулируется доказанная ранее автором в совместной работе с Уолшем теорема о двойной ортогональности: Пусть $\{\tilde{L}_k\}$ — множество линейно независимых функционалов. Тогда существуют ортонормальное множество функций $\{\varphi_k^*(Z)\}$ и биортогональное к нему множество функционалов $\{\tilde{L}_k^*\}$, причем каждый функционал $\tilde{L}_k^*$ есть конечная линейная комбинация функционалов $\tilde{L}_k$: $\tilde{L}_k^*=\sum_0^k a_{kp}\tilde{L}_p$. С помощью этой теоремы доказывается следующий результат (теорема 3): Функция $g(z)$ есть решение уравнения (1) тогда и только тогда, когда найдется функция $f(z)\in L^2(B)$, для которой $g(Z)=f(Z)-\sum_0^\infty \tilde{L}_k^*(f)\varphi_k^*(Z)$. Последний ряд для $g(Z)$ обладает одновременно многими свойствами как рядов Фурье, так и интерполяционных рядов. Далее аналогичное изучение ведется для неоднородного уравнения $L(u)=f$ и для системы уравнений. Рассматривается также вопрос о сходимости полученных интерполяционных рядов для функций, не принадлежащих $L^2(B)$; дело в том, что используемые линейные операторы и функционалы часто могут быть естественно определены для всех аналитических функций, не обязательно входящих в $L^2(B)$ (например, $L(f)=f'(Z)$).

С. Я. Хавинсон

3066. 1. Линейные преобразования пространства Гильберта. 2. Пространство *H*. 3. График линейного преобразования. Р и д о (1. Transformations linéaires de l'espace de Hilbert. 2. Espace *H*. 3. Graphique d'une transformation linéaire. R i d e a u G.), Sémin. Th. Kahan. Fac. sci. Paris, 1955—1956, **3**, № 6, 1—9 (франц.).

1. Симметрические преобразования. 2. Линейные ограниченные преобразования. 3. Ограниченные симметрические преобразования. Р и д о (1. Transformations symétriques. 2. Transformations linéaires bornées. 3. Transformations symétriques bornées. R i d e a u G.), Sémin. Th. Kahan. Fac. sci. Paris, 1955—1956, **3**, № 7, 1—7 (франц.)

Излагаются указанные в заглавии вопросы теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Новых результатов статьи не содержат.

И. Ц. Гохберг

3067. Условие того, что нормальный оператор имеет замкнутую область численных значений. М э н Ц з и н - х у а (A condition that a normal operator have a closed numerical range. M e n g C h i n g - H w a), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 1, 85—88 (англ.)

Областью численных значений ограниченного линейного оператора T, действующего в гильбертовом пространстве, называется совокупность чисел (Tx, x), где x — произвольный единичный вектор. Автор показывает, что для того чтобы область численных значений некоторого ограниченного нормального оператора T была замкнутым множеством в комплексной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы совокупность крайних точек выпуклой замкнутой оболочки спектра T не содержала точек непрерывного спектра рассматриваемого оператора.

Ю. М. Березанский

3068. О теореме Фридрихса о расширениях положительно определенных операторов. С о л о м о н (Despre teorema lui Friedrichs asupra extinderii operatorilor pozitiv-difiniţi. S o l o m o n L i v i u), Comun. Acad. RPR, 1956, **6**, № 5, 627—634 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть S — симметрический оператор с положительной нижней гранью и плотной в гильбертовом пространстве H областью определения D_S. Следуя Фридрихсу, автор вводит на D_S новую метрику, определяемую скалярным произведением $[u, v]=(Su, v)$ $(u, v\in D_S)$, и замыкание многообразия D_S в этой метрике обозначает через H_S $(H_S\subset H)$. Далее, через A обозначается самосопряженное расширение оператора S по Фридрихсу (при этом $D_A\subset H_S$, $R_A=H$). Используя понятие о слабом замыкании оператора, автор устанавливает, что: 1) при любых $u\in D_A$, $v\in H_S$ будет $[u, v]=(Au, v)$, 2) $H_S=H_A$.

Примечание референта. Оба результата не являются новыми. Автору, по-видимому, неизвестна статья М. Г. Крейна (Матем. сб., 1947, **20**, № 3, 431—495). Первый из указанных выше результатов совпадает с леммой 2, стр. 458, а второй — с одним из утверждений теоремы 10, стр. 459 этой статьи.

И. М. Глазман

3069. О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов. К р е й н М. Г., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 5, 970—973

Изучается связь между дифференциальными системами:

$$\varphi''-V(r)\varphi+\lambda\varphi=0,\ \varphi(0,\lambda)=1,$$

$$\varphi_r'(0,\lambda)=h\quad(0\leqslant r<r_\infty),\qquad(1)$$

$$\psi''-[p(p-1)/r^2+q(r)]\psi+\lambda\psi=0,$$

$$\lim_{r\to 0} r^{-p}\psi(r,\lambda)=1/1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1),\qquad(2)$$

где $V(r)$ и $q(r)$ — вещественные непрерывные функции, p — натуральное число.

Имеет место следующая теорема:

Пусть $\tau(\lambda)$ — некоторая спектральная функция задачи (1), а $P(\lambda)=\lambda^p+\ldots+a_p$ — многочлен, неотрицательный на спектре функции τ.

Тогда функция

$$\tau_P(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} P(\mu)\,d\tau(\mu)$$

будет спектральной функцией задачи (2), в которой

$$\frac{p(p-1)}{r^2}+q(r)=V(r)-2\frac{d^2}{dr^2}\ln W_*(\varphi_{\alpha_1},\ldots,\varphi_{\alpha_p}),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — корни многочлена P, W_* — формально составленный определитель Вронского для функций $\varphi(r, \alpha_1), \ldots, \varphi(r, \alpha_p)$, в котором каждая четная производная $\varphi^{(2k)}(r, \alpha_j)$ заменена на $(-\alpha_j)^k\varphi(r, \alpha_j)$, а нечетная $\varphi^{(2k+1)}(r, \alpha_j)$ — на $(-\alpha_j)^k\varphi'(r, \alpha_j)$.

Решением системы (2) будет функция ψ, определяемая по формуле

$$\psi=(-1)^p P^{-1}(\lambda)W_*(\varphi_\lambda, \varphi_{\alpha_1}, \ldots$$

$$\ldots, \varphi_{\alpha_p})/W_*(\varphi_{\alpha_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_p}).$$

Эта теорема может быть применена к эффективному построению систем (1) и (2) по соответствующей спектральной функции

$$\tau(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} R(\mu)\,\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \quad (\lambda\geqslant 0,\ \tau(\lambda)=0,\ \lambda\leqslant 0),$$

где $R(\mu)$ — рациональная функция, неотрицательная на полуоси $\mu\geqslant 0$.

В конце заметки формулируется следующая теорема: Для того чтобы неубывающая функция $\tau(\lambda)=\tau(\lambda-0)$ $(-\infty<\lambda<\infty,\ \tau(-\infty)=0)$ была спектральной функцией некоторой задачи (2) с непрерывной $q(r)$ и натуральным p, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\tau_*(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\tau(\mu)}{(\mu^2+1)^{p/2}}$$

была спектральной функцией некоторой системы (1) с непрерывным потенциалом $V(r)$ $(0\leqslant r<r_\infty)$, при этом $q(r)$ и $V(r)$ будут одинаковой гладкости.

Уточняются также условия на функцию $\tau(\lambda)$. Доказательства не приводятся. Б. М. Левитан

3070. Элементарные решения некоторых дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Лион (Solutions élémentaires de certains opérateurs différentiels à coefficients variables. Lions J. L.), J. math. pures et appl., 1957, 36, № 5, 57—64 (франц.)

Устанавливается существование элементарного решения E дифференциального оператора

$$L=\frac{d^2}{dx^2}+r(x)\frac{d}{dx}+s(x), \qquad (1)$$

где $r(x)$, $s(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, $-\infty<x<\infty$, т. е. решение уравнения $LE=\delta$, где δ — функция Дирака.

Идея доказательства состоит в сведении с помощью оператора преобразования оператора L к оператору $\frac{d^2}{dx^2}$.

Полученный результат обобщается на случай, когда L есть произведение конечного числа дифференциальных операторов вида (1), действующих по различным переменным.

Примечание референта. Существование элементарных решений для дифференциальных операторов любого порядка на оси хорошо известно; см., например, Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы (РЖМат, 1957, 1614К).

Я. И. Житомирский

3071. О минимальном вполне регулярном пространстве, соответствующем данному кольцу непрерывных функций. Хенриксен (On minimal completely regular spaces associated with a given ring of continuous functions. Henriksen Melvin), Michigan Math. J., 1957, 4, № 1, 61—64 (англ.)

Кольца $C(X)$ и $C(Y)$ всех вещественнозначных непрерывных функций, определенных на вполне регулярных пространствах X и Y, называются строго изоморфными, если одно из пространств, например X, плотно в Y и любая $f\in C(X)$ допускает однозначное продолжение в $\tilde{f}\in C(Y)$. Изучается вопрос о существовании во вполне регулярном пространстве X такого минимального подмножества μX, что $C(X)$ и $C(\mu X)$ строго изоморфны. Доказывается, что если такое μX существует, то оно единственно и есть множество ηX, состоящее из совокупности всех изолированных точек пространства X и тех неизолированных точек $p\in X$, для которых $C(X-\{p\})$ и $C(X)$ не являются строго изоморфными. Показывается, что если Y — вполне регулярное пространство, допускающее неограниченные непрерывные функции и такое, что $\eta Y=Y$ (например, бесконечное дискретное пространство), то для $X=\beta Y$, где βY — бикомпактное расширение Стоуна—Чеха пространства Y, μX не существует. В. И. Соболев

3072. Индуктивные пределы нормированных алгебр. Уорнер (Inductive limits of normed algebras. Warner Seth), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 190—216 (англ.)

Пусть E означает далее локально m-выпуклую алгебру, т. е. алгебру над полем вещественных или комплексных чисел, наделенную топологией, обладающей фундаментальной системой выпуклых окрестностей нуля U, и каждая из которых идемпотентна (т. е. $U^2\subset U$). По поводу используемой терминологии общей теории топологических линейных пространств, см., например, РЖМат, 1955, 2760. E называется i-t-алгеброй, если каждое идемпотентное поглощающее замкнутое выпуклое множество в E является окрестностью нуля. i-t-алгебра может не быть t-пространством. E называется алгебраическим индуктивным пределом локально m-выпуклых алгебр E_α относительно их гомоморфизмов g_α в E, если топологией E служит сильнейшая из локально m-выпуклых топологий E, при которых все g_α непрерывны. Эта топология может не совпадать с сильнейшей из всех вообще локально выпуклых топологий в E, при которых каждое g_α непрерывно, т. е. алгебраический индуктивный предел алгебр E_α может не быть «линейным» индуктивным пределом пространств этих алгебр. Устанавливаются достаточные условия совпадения этих двух индуктивных пределов, показывающие, в частности, что пространства «финитных» функций являются локально m-выпуклыми алгебрами относительно обычного умножения. Множество $A\subset E$ называется i-ограниченным, если λA при некотором $\lambda>0$ имеет ограниченную идемпотентную оболочку. Алгебра E называется i-ограниченно замкнутой (i-bornological), если ее гомоморфизмы в любую локально m-выпуклую алгебру, ограниченные на всех i-ограниченных множествах, непрерывны. На i-ограниченно замкнутые локально m-выпуклые алгебры переносятся, с соответствующей перефразировкой, все основные свойства ограниченно замкнутых локально выпуклых пространств. Так, i-ограниченно замкнутые алгебры можно охарактеризовать как алгебраические индуктивные пределы нормированных алгебр; утверждение, что произведение семейства i-ограниченно замкнутых алгебр E_α $(\alpha\in A)$ является i-ограниченно замкнутой алгеброй, равносильно утверждению, что проблема Улама имеет на A положительное решение, т. е. что каждая ненулевая счетноаддитивная мера, определенная на всех подмножествах из A и принимающая лишь значения 0 и 1, сосредоточена в некоторой точке. Приводится несколько других равносильных формулировок последнего утверждения и среди них следующая (которую автор предлагает принять за аксиому): каждый ультрафильтр на A, содержащий вместе с любым счетным набором своих элементов и их счетное пересечение, есть фильтр всех надмножеств некоторого $\alpha\in A$. E называется P-алгеброй, если множество всех $x\in E$, для которых $x^n\to 0$, есть окрестность нуля в E. В терминах этого класса алгебр формулируются необходимые и достаточные условия i-ограниченно замкнутости некоторых метризуемых локально m-выпуклых алгебр. В заключение приводится несколько нерешенных вопросов, в частности: является ли алгебра всех аналитических функ-

ций в некоторой области G, наделенная топологией равномерной сходимости на каждом компакте $K \subset G$, i-ограниченно замкнутой? Д. А. Райков

3073. N^*-алгебры и группы конечного класса. Цудзи (N^*-algebras and finite class groups. Tsuji Kazô), Bull. Kyushu Inst. Technol. Math., Natur. Sci., 1955, № 1, 1—9 (англ.)

Рассматриваются локально компактные унимодулярные группы конечного класса (последнее требование равносильно тому, что они обладают полной системой окрестностей единицы, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов). Для этих групп определяется N^*-алгебра конечного класса, т. е. полная нормированная $*$-алгебра $\mathfrak{A}$ над полем комплексных чисел, к которой формально присоединена единица и в которой существует дополнительная операция ψ со следующими свойствами: 1) операция ψ есть непрерывное линейное отображение $\mathfrak{A}$ на ее центр $\mathfrak{A}^\psi$ и является тождественным отображением на самом $\mathfrak{A}^\psi$; 2) операция ψ сохраняет свойство эрмитовости и положительной эрмитовости; 3) $(ab)^\psi = (ba)^\psi$ для любых $a, b \in \mathfrak{A}$. Устанавливается связь между максимальными двусторонними идеалами алгебры $\mathfrak{A}$, характерами алгебры $\mathfrak{A}$ и максимальными идеалами центра алгебры $\mathfrak{A}$. Доказывается теорема бохнеровского типа: Если след σ (т. е. непрерывный линейный функционал, удовлетворяющий условиям $\sigma(ab) = \sigma(ba)$, $\sigma(a^*a) \geqslant 0$) алгебры $\mathfrak{A}$ как линейный функционал на групповом кольце финитных функций на группе имеет вид $d\sigma(t) = \varphi(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ — непрерывная центральная функция положительного типа на группе, то $\varphi(t)$ представима в виде $\varphi(t) = \int_X \chi(t)\,d\omega(\chi)$, где $\omega(\chi)$ — регулярная мера Бореля на локально компактном пространстве X. М. И. Граев

3074. Средние значения для непрерывных функций на компактной группе. Уэстон (Mean values for continuous functions on a compact group. Weston J. D.), Portugaliae math., 1956, **15**, № 3—4, 105—110 (англ.)

Пусть в некотором пространстве X каждой конечной последовательности точек $x_1, \ldots, x_n$ ставится в соответствие точка $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ так, что: 1) $\mu(x, \ldots, x) = x$, 2) если двойная последовательность $\{x_j^i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ любым способом расположена в виде простой последовательности $x_1, \ldots, x_{mn}$, то

$$\mu(x_1, \ldots, x_{mn}) = \mu\big[\mu\big(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^m\big), \ldots$$

$$\ldots, \mu\big(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m\big)\big].$$

В таком случае μ можно назвать средней точкой для точек $x_1, \ldots, x_n$.

В работе предполагается, что X — полное метрическое пространство и среднее μ удовлетворяет следующим дополнительным условиям: 3) если $0 \leqslant a < b$ и n — любое целое положительное число, то существует такое число $c < b$ (зависящее от a, b и n), что

$$d\{\mu(x_1, \ldots, x_n), \mu(y_1, \ldots, y_n)\} \leqslant c,$$

если только $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(x_i, y_i) \geqslant a$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(x_i, y_i) \leqslant b$;

4) если $E \subset X$ — произвольное ограниченное множество и E_μ — множество всех средних значений конечных последовательностей точек из E, то $\bar{E}_\mu$ компактно. Если φ — непрерывная функция, отображающая компактную топологическую группу T в X, то левое среднее значение функции φ можно определить как точку $\mu[\varphi] \in X$, обладающую следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная последовательность точек $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$ такая, что для всех $t \in T$ выполняется неравенство

$$|\mu[\varphi(s_1 t), \ldots, \varphi(s_n t), \mu[\varphi]]| < \varepsilon.$$

Доказывается, что левое среднее значение существует, единственно и совпадает с правым средним значением. Б. М. Левитан

3075. Гармонический анализ на локально компактных группах. Цудзи (Harmonic analysis on locally compact groups. Tsuji Kazô), Bull. Kyushu Inst. Technol. Math., Natur. Sci., 1956, № 2, 16—32 (англ.)

На случай произвольной локально компактной группы обобщаются две теоремы: 1) теорема бохнеровского типа, ранее доказанная Маутнером (Mautner F. I., Ann. Math., 1950, **51**, 1—25; 1951, **52**, 528—555) и другими авторами для сепарабельного случая, и 2) общая теорема Планшереля, установленная для случая сепарабельной унимодулярной группы Сигалом (Segal I. E., Ann. Math., 1950, **52**, 272—292; Mem. Amer. Math. Soc., 1950, **9**). М. И. Граев

3076. Вклад в гармонический анализ. Рейтер (Contributions to harmonic analysis. Reiter H.), Acta math., 1956, **96**, № 3—4, 253—263 (англ.)

Пусть G — локально компактная абелева группа и $\hat{G}$ — ее группа характеров.

Доказывается следующая теорема: Пусть Γ — замкнутая подгруппа группы $\hat{G}$ и пусть Λ' — замкнутое счетное подмножество фактор-группы $\hat{G}/\Gamma$, состоящее из независимых элементов.

Пусть Ω — прообраз множества Λ' в $\hat{G}$ и Λ — любая представляющая система (mod Γ) для Ω, т. е. подмножество Ω, содержащее в точности один эквивалентный элемент (mod Γ) для каждого элемента Ω. Пусть I — замкнутое инвариантное относительно сдвигов на G подпространство пространства $L^1(G)$ с коспектром, содержащимся в Ω (коспектром множества I называется замкнутое множество всех элементов группы $\hat{G}$, для которых преобразования Фурье всех функций из I равны нулю). Тогда I состоит из всех тех функций из $L^1(G)$, преобразования Фурье которых обращаются в нуль на Ω.

Для произвольной $f(x) \in L^1(G)$

$$\operatorname{dist}\{f, I\} = \inf_{f_0 \in I} \int |f(x) - f_0(x)|\,dx =$$

$$= \int_{G/g} \sup_{\lambda \in \Lambda} \left| \int_g f(xs)\,\overline{(xs, \lambda)}\,ds \right| dx',$$

где g — подгруппа G, соответствующая Γ, dx' — мера Хара на G/g.

В работе имеются также другие результаты, относящиеся к природе спектра ограниченных функций на абелевых группах. Б. М. Левитан

3077. Вклад в гармонический анализ. II. Рейтер (Beiträge zur harmonischen Analyse. II. Reiter H.), Math. Ann., 1957, **133**, № 4, 298—302 (нем.)

Замкнутое множество Ω группы характеров $\hat{G}$ (реф. 3076) называется множеством единственности, если существует только одно замкнутое инвариантное линейное подпространство пространства $L^1(G)$ с коспектром Ω, а именно множество, состоящее из всех функций, преобразования Фурье которых обращаются в нуль на Ω. В противном случае множество Ω называется множеством неединственности.

Доказывается следующая теорема: Пусть Ω' — замкнутое множество единственности в группе $\hat{G}'$

Пусть $\hat{G}'$ — гомоморфный образ группы $\hat{G}$ и Ω — прообраз множества Ω' в $\hat{G}$. Тогда Ω — множество единственности.

Из этой теоремы, в частности, следует, что из каждого множества единственности в R_n, $n \geqslant 1$, получается новое множество единственности в R_N, $N > n$. Б. М. Левитан

3078. Гармонический анализ, основанный на некоторых коммутативных банаховых алгебрах. Домар (Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras. Domar Yngve), Acta math., 1956, 96, № 1—2, 1—66 (англ.)

Пусть G — коммутативная локально компактная группа, $\hat{G}$ — ее группа характеров; $\hat{f}(\hat{x})$ — преобразование Фурье функции $f(x)$. Несколько видоизменяя определения автора, проведем следующие построения. Замкнем кольцо непрерывных финитных функций $f(x)$ $(x \in G)$ со сверткой в качестве операции умножения по некоторой норме $\|f\|$, относительно которой свертка и каждый гомоморфизм $f \to \hat{f}(\hat{x})$ ($\hat{x}$ фиксировано) непрерывны. Предполагается, что норма такова, что для полученного кольца F выполнено следующее свойство: для каждой окрестности $\hat{U}$ нуля группы $\hat{G}$ найдется такая непрерывная суммируемая по мере Хара функция $f_{\hat{U}} \in F$, что: 1) $\hat{f}_{\hat{U}}(\hat{x}) \not\equiv 0$, неотрицательна и аннулируется вне $\hat{U}$; 2) если $g(x)$ — любая непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|g(x)| \leqslant |\hat{f}_{\hat{U}}(x)|$ $(x \in G)$, то $g \in F$, причем $\|g\|$ равномерно (при фиксированной $f_{\hat{U}}$) ограничены.

Автор показывает, что пространством регулярных максимальных идеалов кольца F служит группа характеров $\hat{G}$. На кольцо F обобщается тауберова теорема Винера: если замкнутый идеал $I \subseteq F$ таков, что для каждого $\hat{x} \in \hat{G}$ найдется $f \in I$ такая, что $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$, то $I = F$. Рассматриваются некоторые примеры колец F. В частности, исследуется норма

$$\|f\| = \int_G |f(x)|\, p(x)\, dx, \qquad (1)$$

где $p(x) \geqslant 1$ — фиксированная ограниченная в каждой компактной части G функция, удовлетворяющая неравенству $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1)\, p(x_2)$. Доказывается, что для того чтобы норма (1) приводила к кольцу F, необходимо и достаточно выполнение следующего требования: для каждого $x \in G$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \log p(nx) < \infty. \qquad (2)$$

Во второй части работы (главы 3, 4) изучаются представления $f \to T_f$ кольца F в кольце линейных непрерывных операторов, действующих в некотором линейном нормированном пространстве A. Предполагается, что $\|T_f\| \leqslant \|f\|$ и из соотношения $T_f a = 0$, справедливого при фиксированном $a \in A$ для всех $f \in F$, вытекает равенство $a = 0$. Спектром элемента $a \in A$ называется максимальное множество из $\hat{G}$, где аннулируются все функции $\hat{f}(\hat{x})$ для таких f, что $T_f a = 0$. Вводятся также другие определения спектра и показывается их эквивалентность с приведенным выше; эти результаты близки к соответствующим результатам Бёрлинга для вещественной оси (Beurling A., Acta math., 1945, 77; 1949, 81). Изучаются элементы из A со спектром, состоящим из одной точки; полученные факты напоминают некоторые результаты Уэрмера (РЖМат, 1955, 2295) и Рисса (РЖМат, 1953, 603). Ввиду сложности формулировок результатов второй части работы, мы приведем лишь одну теорему относительно кольца $F = F\{p\}$, построенного по норме (1) ($p(x)$ удовлетворяет (2)), обобщающую результат Бёрлинга. Рассмотрим пространство A, состоящее из функций $a(x)$ $(x \in G)$, для которых $\|a\| = \operatorname{vrai}\max |a(x)/p(-x)| < \infty$. Представление кольца $F\{p\}$ в кольце ограниченных операторов, действующих в A, зададим формулой

$$(T_f a)(x) = \int_G a(x - y) f(y)\, dy.$$

Тогда спектр функции $a(x)$ в указанном выше смысле состоит из тех характеров $\hat{x}(x)$, которые получаются в результате замыкания семейства функций $(T_f a)(x) \in A$ $(f \in F\{p\})$. Замыкание берется в топологии, в которой окрестность $U(a_0; \varepsilon, C)$ $(\varepsilon > 0$, $C \subseteq G$ компактно) функции $a_0(x)$ задается неравенством

$$\sup_{x \in C} |a(x) - a_0(x)| + |\,\|a\| - \|a_0\|\,| < \varepsilon.$$

Для некоторого класса функций $a(x) \in A$ (который описан в статье) вместо семейства $(T_f a)(x)$ в приведенной теореме можно брать семейство линейных комбинаций сдвигов функции $a(x)$.

Отметим, что Б. И. Коренблюмом (РЖМат, 1957, 7141) изучены в случае вещественной оси кольца функций с нормой (1), где $p(x) = e^{\alpha|x|}$ $(\alpha > 0)$ не удовлетворяет (2). Теоремы типа Винера и Бёрлинга для этих колец существенно отличаются от соответствующих теорем для медленно растущих весов $p(x)$. Ю. М. Березанский

3079. О спектральном анализе в узкой топологии. Домар (On spectral analysis in the narrow topology. Domar Y.), Math. scand., 1956, 4, № 2, 328—332 (англ.)

Бёрлингом (Beurling A., Acta. math., 1945, 77, 127—136) доказана следующая теорема: Пусть $\varphi(x) \not\equiv 0$ $(-\infty < x < \infty)$ — ограниченная равномерно непрерывная функция; тогда среди замыкания в смысле узкой сходимости линейных комбинаций сдвигов функции $\varphi(x)$ найдется по крайней мере одна функция вида $e^{i\lambda x}$, где λ вещественно. При этом под узкой сходимостью $\psi_n(x) \to \psi(x)$ в совокупности ограниченных на всей оси функций понимается равномерная сходимость $\psi_n(x)$ к $\psi(x)$ на каждой конечной части оси вместе со сходимостью равномерных норм: $\|\psi_n\| \to \|\psi\|$ $(\|\psi\| = \sup_{-\infty < x < \infty} |\psi(x)|)$.

Приводится доказательство этой теоремы, основывающееся только на теории преобразований Фурье. Отмечается, что это доказательство легко переносится на коммутативные локально компактные группы. По поводу перенесения теоремы Бёрлинга на группы см. также другую работу автора (реф. 3078). Ю. М. Березанский

3080. Некоторые элементарные функциональные уравнения и пятая проблема Гильберта. Родстрём (Några elementära funktionalekvationer och Hilbert's femte problem. Rådström Hans), Nord. mat. tidskr., 1955, 3, № 4, 129—147, 182—183 (шведск.; рез. англ.)

Автор дает элегантное и элементарное доказательство теоремы о том, что всякая евклидова локальная группа размерности 1 локально изоморфна аддитивной группе действительных чисел. Предварительно он рассматривает топологические полугруппы с операцией $x \circ y$, определенной на интервале I системы действительных чисел. Если операция дифференцируема и производная всюду отлична от нуля, то $x \circ y = f^{-1}(f(x) + f(y))$, где f — строго монотонная дифференцируемая функция на I. Рассматривается также функциональ-

ное уравнение $F(x \circ y) = F(x) + F(y)$, играющее важную роль в доказательстве. В заключение автор приводит некоторые исторические замечания о пятой проблеме Гильберта, отмечая, что она остается все еще открытой для евклидовых локальных групп.

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 5, 509.

E. Hewitt

3081. Характеристика элементов наилучшего приближения в произвольном банаховом пространстве. Зингер (Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque. Singer Ivan), Acta scient. math., 1956, 17, № 3—4, 181—189 (франц.)

Пусть G — подпространство некоторого банахова пространства E и $x \in E \setminus G$. Незначительной перефразировкой одной леммы Банаха (Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1947, стр. 48) устанавливается следующая характеристика наименее уклоняющегося от x элемента $q \in G$: для того чтобы для $q \in G$ было $\|x - q\| = \inf_{z \in G} \|x - z\|$, необходимо и достаточно существование линейного функционала $f \in E^*$ такого, что $\|f\| = 1$, $f(z) = 0$ для всех $z \in G$ и $f(x) = -\|q - x\|$. Рассматриваются некоторые конкретные пространства, в частности, пространство $E = C(Q)$ всех действительных функций, непрерывных на бикомпактном хаусдорфовом пространстве Q, и приводится, исходя из указанной теоремы, новое доказательство теоремы Чебышева о характеристике полинома наименьшего уклонения в $C(Q)$ в той ее формулировке, которая приведена в статье референта (РЖМат, 1957, 1597). С. Н. Зуховицкий

3082. Приближенный метод вычисления характеристических элементов и значений. Лежанский (Approximate method of calculating characteristic elements and values. Leżański T.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 1, 1—3 (англ.; рез. русск.)

Пусть H — пространство Гильберта, A — линейный ограниченный симметричный оператор, имеющий чисто точечный спектр. Пусть, далее, λ_0 есть единственное собственное значение оператора A в интервале (α_1, β_1) и $\alpha_1 < \alpha < \lambda_0 < \beta < \beta_1$. Обозначим через $\tilde{H}$ пространство абстрактных функций $x(\lambda)$, $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, со значениями из H и с конечным интегралом $\int_\alpha^\beta \|x(\lambda)\|^2 d\lambda$. Пусть Φ_ε обозначает множество функций $x(\lambda)$, удовлетворяющих условию $\int_\alpha^\beta \|Ax(\lambda) - \lambda x(\lambda)\|^2 d\lambda < \varepsilon$. Положим $d = \inf_{x(\lambda) \in \Phi_\varepsilon} \|z - \int_\alpha^\beta x(\lambda) d\lambda\|$, где z — произвольный элемент из H. Утверждается, что если функция $x^*(\lambda) \in \tilde{H}$ удовлетворяет условию $\|z - \int_\alpha^\beta x^*(\lambda) d\lambda\| < d + \varepsilon_1$, то

$$\|x^* - z_\Delta\| \leqslant M(\alpha_1, \beta_1, \alpha, \beta) \cdot \sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon_1,$$

где z_Δ есть ортогональная проекция элемента z на собственное подпространство элементов, отвечающих собственному числу λ_0, а $x^* = \int_\alpha^\beta x^*(\lambda) d\lambda$.

Дается также метод приближенного вычисления собственных значений. Доказательства не приводятся. В. Н. Никольский

3083. О методе наискорейшего спуска для решения нелинейных операторных уравнений. Гуань Чжаочжи (Kwan Chao-Chih), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 4, 638—650 (кит.; рез. франц.)

Методом наискорейшего спуска исследуются нелинейные уравнения вида: $F(x) = 0$, где $F(x)$ — потенциальный оператор (Вайнберг М. М., Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 55) в гильбертовом пространстве H. Доказывается предложение: Пусть оператор $F(x)$ имеет в некоторой области $G \subset H$ непрерывную производную Фреше, удовлетворяющую условию: $m\|h\|^2 \leqslant (F'(x)h, h) \leqslant M\|h\|^2$, где $0 < m < M$ и $h \in H$. Тогда итерационный процесс: $x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n F(x_n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, где $(m - \sqrt{m^2 - M^2k}) M^{-2} \leqslant \varepsilon_n \leqslant (m + \sqrt{m^2 - M^2k})$, $0 < k < (mM^{-1})^2$, сходится к решению уравнения с быстротой геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = 1 - k$.

Доказательство сходимости итерационного процесса не использует потенциальности $F(x)$. Показано, что, путем перехода к другому скалярному произведению, итерационный процесс: $x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n F(x_n)$, где F — потенциальный оператор, переходит при $\varepsilon_n = 1$ в итерационный процесс Л. В. Канторовича, представляющий обобщение классического метода Ньютона. Рассмотрена связь с различными другими приближенными методами. Метод и полученные результаты прилагаются к нахождению решений нелинейных уравнений в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения (обыкновенные и с частными производными) и уравнения типа Гаммерштейна. Библ. 17 назв. М. М. Вайнберг

3084. О приближенном решении нелинейных функциональных уравнений. Альтман (On the approximate solution of non-linear functional equations. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 5, 457—460 (англ.; рез. русск.)

Предлагается итерационный метод решения нелинейных функциональных уравнений в банаховых пространствах, который, так же как и метод Л. В. Канторовича (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28, 104), обобщает классический метод Ньютона. Однако, в отличие от метода Канторовича, метод автора не требует, чтобы производная Фреше имела обратный оператор. Этим расширяется область применимости обобщенного метода Ньютона и устраняются трудности, связанные с оценкой нормы обратного оператора. Пусть $F(x)$ — нелинейный функционал, заданный в банаховом пространстве и дифференцируемый по Фреше в некотором шаре $S = S(x_0, r)$. Рассматривается уравнение

$$F(x) = 0. \qquad (1)$$

Пусть $f(x) = \operatorname{grad} F(x) \equiv F'(x)$, $f_n = F'(x_n)$, $f_n(y) = dF(x_n, y)$ и $f_0(y) \neq 0$. Доказываются следующие теоремы.

1. Пусть $|F(x_0)| \leqslant D$, $\|y\| |f_0(y)|^{-1} \leqslant B$, $\|F'(x) - F'(x_0)\| \leqslant C$, $F'(x_0) \neq 0$ для всех $x \in S$, $BC < 1$, $BD \leqslant r(1 - BC)$. Тогда последовательность

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)[f_0(y)]^{-1} y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

сходится к решению $x^* \in S$ уравнения (1).

2. Последовательность (2) сходится к решению уравнения (1), которое принадлежит S, если $F'(x)$ удовлетворяет в S условию Липшица с постоянной K, где $B^2KD < 1/4$ и $r = (2BK)^{-1}(1 - \sqrt{1 - 4B^2KD})$.

3. Последовательность (2) сходится в S к решению уравнения (1), если в S имеет место неравенство $\|F''(x)\| \leqslant K$, где $B^2KD < \sqrt{2} - 1$ и $r = (2BK)^{-1} \times (1 + B^2KD - \sqrt{1 - B^2KD - B^4K^2D^2})$.

4. Пусть $|F(x_0)| \leqslant D$, в шаре S: $\|F'(x)\|^{-1} \leqslant A < B$ и $\|F''(x)\| \leqslant K$, $h_0 = B^2KD < 2$, $r = BD \sum \left(\frac{1}{2} h_0\right)^{2^n - 1}$. Тогда последовательность $x_{n+1} = x_n - F(x_n)[f_n(y_n)]^{-1} y_n$, где

$\|y_n\| = 1$, $|f_n(y_n)| \geqslant \|f_n\| - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \max(A^{-1}, A^{-1} - B^{-1})$, сходится в S к решению уравнения (1). М. М. Вайнберг

3085. К теории приближенных решений нелинейных функциональных уравнений. Альтман (Concerning approximate solutions of non-linear functional equations. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 5, 460—465 (англ.; рез. русск.)

Продолжение исследования метода автора (реф. 3084). Пусть в замкнутом шаре $S = S(x_0, r)$ банахова пространства $\mathfrak{X}$ задан нелинейный функционал $F(x)$, дважды дифференцируемый в смысле Фреше. Пусть $f(x) = F'(x)$, $f_n = F'(x_n)$. Допускается, что можно выбрать последовательность $\{y_n\} \in \mathfrak{X}$, для которой $f_n(y_n) = \|f_n\|$, $\|y_n\| = 1$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ Итерационный процесс для решения уравнения $F(x) = 0$ определяется так: $x_{n+1} = x_n - \|f_n\|^{-1} F(x_n) y_n$.

Теорема 1. Пусть $\|f_0\|^{-1} \leqslant B_0$, $\|x_1 - x_0\| \leqslant \leqslant \|f_0\|^{-1} |F(x_0)| \leqslant \eta_0$, $\|F''(x)\| \leqslant K$ для $x \in S$, $h_0 = = B_0 \eta_0 K \leqslant 1/2$, $r = \left(1 - \sqrt{1 - 2h_0}\right) h_0^{-1} \eta_0$. Тогда уравнение $F(x) = 0$ имеет решение $x^* \in S$, последовательные приближения $\{x_n\}$ сходятся к x^* и $\|x_n - x^*\| \leqslant \leqslant 2^{-n+1} (2h_0)^{2^{n-1}} \eta_0$.

Пусть $P(x)$ — дважды дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор из шара S гильбертова пространства H в H. Для приближенного решения уравнения $P(x) = 0$ рассматривается итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - [2 \|Q(x_n)\|^2]^{-1} \|P(x_n)\|^2 Q(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $Q(x) = \bar{P}'(x) P(x)$, $\bar{P}'(x)$ — линейный оператор, сопряженный к линейному оператору $P'(x)$.

Теорема 2. Пусть $Q(x_0) \neq 0$, $\|Q'(x)\| \leqslant K$ для всех $x \in S$, $\|Q(x_0)\|^{-2} \|P(x_0)\|^2 K \leqslant 2h_0 \leqslant 1$ и r определяется как в теореме 1, где $F(x) = \|P(x)\|^2$. Тогда уравнение $P(x) = 0$ имеет решение $x^* \in S$, к которому сходятся приближения $\{x_n\}$, и сохраняется оценка ошибки теоремы 1.

Рассматривается пример, к которому применим метод автора, но метод Канторовича неприменим, так как производная Фреше не имеет обратного оператора. М. М. Вайнберг

3086. О задачах с начальными значениями для однородных уравнений в свертках для одной переменной. Румьё (Sur le problème aux valeurs initiales pour une équation de convolution homogène à une variable. Roumieu Charles), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 4, 430—432 (франц.)

Теорема. Пусть x — обобщенная функция одной переменной. Если $x = 0$ на $]-l, \varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ и $\varphi * x = 0$ на $]0, +\infty[$, то $x = 0$ на $]-l, \infty[$. На базе этой теоремы доказывается для уравнений в свертках существование единственного решения, принимающего заданные значения на заданном интервале. О. С. Парасюк

3087. О свертках функций и обобщенных функций с носителем в R^n_+ $(n > 1)$. Василяк (Sur le produit de composition des fonctions et distributions à support dans R^n_+, $n > 1$. Vasilach Serge), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 22, 1708—1711 (франц.)

Теорема. Пусть $C_{+\Gamma}$ — пространство непрерывных функций, носитель которых лежит в выпуклом конусе $\Gamma = R^n_+$ $(n > 1)$. Если для f, $g \in C_{+\Gamma}$ имеем $f * g = 0$, то либо $f = 0$, либо $g = 0$ в Γ. Приводится распространение этой теоремы на случай обобщенных функций. О. С. Парасюк

3088. О постулатах Сигала для общей квантовой механики. Шерман (On Segal's postulates for general quantum mechanics. Sherman S.), Ann. Math., 1956, 64, № 3, 593—601 (англ.)

Доказывается, что алгебра Йордана M^8_3 всех 3×3 эрмитовых матриц, координатами которых являются числа Кели, удовлетворяет постулатам Сигала (Segal I. E., Ann. Math., 1947, 48, 930—948) при соответствующем определении нормы. Известные ранее системы, удовлетворяющие этим постулатам, состояли из операторов в пространстве Гильберта. Доказывается, что, кроме M^8_3, существует общий класс объектов, не состоящих из операторов и удовлетворяющих постулатам Сигала. При помощи их устанавливается, что один из постулатов Сигала является лишним. О. С. Парасюк

3089 К. Унитарные представления классических групп. Гельфанд, Наймарк (Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. Gelfand I. M., Neumark M. A. Berlin, Akad. Verl., 1957, 333 S.) (нем.)

Перевод монографии того же названия И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 36). В виде приложений добавлены переводы более поздних статей, примыкающих по своему содержанию к вопросам, рассматриваемым в книге (Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1952, 1, 423—475; РЖМат, 1954, 3246; 1956, 6705). Книга снабжена предисловием, составленным авторами специально для немецкого издания. М. И. Граев

3090 К. Квантование в функциональной теории частиц. Дету ш (La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules. Destouches Jean-Louis. Paris, Gauthier-Villars, 1956, VI+141 p.) (франц.)

Как хорошо известно, квантовая механика не дает категорических утверждений о том, произойдет ли данное физическое явление, и она может только предсказать вероятность для каждого из возможных исходов одного и того же эксперимента. Такое положение привело к двум интерпретациям. В первой (Бор, Гейзенберг, Борн и др.) утверждается, что статистическое описание является наиболее полным описанием. Во второй интерпретации (Эйнштейн, Планк, де Бройль, Бом) статистическое описание считается неадэкватным и принимается, что существует более полное описание. В реферируемой монографии автор придерживается второй интерпретации и стремится развить далее основные положения такой точки зрения. Монография содержит 7 глав: 1. Функциональная теория корпускул. 2. Монохроматические волны. Волны с линейной фазой. 3. Квантование. 4. Первые интегралы и квантование. 5. Индикатрисы спектра. 6. Преобразование спектральных условий. 7. Методы приближения. Автор исходит из анализа понятия частицы. В его концепции частицу следует физически представлять через функцию u, принадлежащую к некоторому сепарабельному пространству. Аргументом функции u должна быть переменная точка пространства-времени. Геометрически частица должна представляться точкой M, рассматриваемой как функционал от u, $M = F(u)$. Среди функций u монохроматические волны с линейной фазой должны описывать инерционные движения. Условия квантования, грубо говоря, означают уничтожение особенностей в функциях u. Принимается, что наряду с квантованными движениями существуют переходные движения и ими нельзя пренебречь, ибо их учет ведет к более точному описанию. Все построение проводится таким способом, чтобы получить соответствие с обычной квантовой механикой. В гл. 5 рассмотрены некоторые примеры на определение спектра. По поводу критики такого подхода можно рекомендовать статью М. Борна (Сборник «Вопросы причинности в квантовой механике», М., 1955). О. С. Парасюк

См. также: 2802, 2852, 2920, 2937, 2940, 2963

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

3091. Об аксиоматике теории вероятностей. Вьеторис (Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vietoris L.), Dialectica, 1954, 8, 37—47 (нем.)

3092. Теория достоверности. Часть 1. Определения и свойства. Кастаньс-Камарго (Una teoria de la certidumbre. Parte 1. Definiciones y propiedades. Castans Camargo Manuel), An. Real soc. española fis. y quím., 1955, **A51**, № 9—10, 215—232 (исп.; рез. англ.)

Выражением

$$\Gamma(n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n) = \log n + \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

определяется мера достоверности вероятностного поля $(p_1, \ldots, p_n)$. Указываются разные свойства этой функции, которые являются прямыми следствиями известных свойств шенноновской энтропии (см. Shannon C. E., Weaver W., The Mathematical theory of communications, The University of Illinois Press, Urbana, 1949; РЖМат, 1954, 3771). На основе свойств функции Γ делается попытка доказать ее единственность, хотя это следует из единственности энтропии. Автор считает, что в некоторых случаях (в теории сообщений) лучше употреблять энтропию, а в других (в метрологии) выражение Γ.

Если имеется поле с непрерывным множеством состояний $b \leqslant x \leqslant a$ и $P(x)$ — плотность вероятности, то мерой достоверности является

$$\Gamma(a,\ b,\ P(x)) = \log(a-b) + \int_b^a P(x) \log P(x)\, dx.$$

M. Rosenblat-Rot

3093. Об условных вероятностных пространствах, порожденных размерностно-упорядоченными множествами мер. Реньи (On conditional probability spaces generated by a dimensionally ordered set of measures. Rényi A.), Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, № 1, 61—71 (англ.; рез. русск.)

Условным вероятностным пространством автор называет совокупность четырех объектов $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, P]$, где S — абстрактное пространство, $\mathfrak{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств S, далее, $\mathfrak{B}$ — некоторое непустое множество элементов $\mathfrak{A}$ и, наконец, $P = P(A|B)$ — функция пары переменных $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющая двум аксиомам.

1. При фиксированном $B \in \mathfrak{B}$ функция $P(A|B)$ задает вероятностную меру на $\mathfrak{A}$.

2. Для любых $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ и $C \in \mathfrak{B}$ таких, что $B \subset C$ и $P(B|C) > 0$, имеет место равенство

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)}$$

Если $(S, \mathfrak{A}, P)$ — обычное вероятностное пространство в смысле Колмогорова, то, взяв в качестве $\mathfrak{B}$ совокупность всех элементов из $\mathfrak{A}$, имеющих ненулевую вероятность, и определив $P(A|B)$ как обычную условную вероятность, мы получим условное вероятностное пространство. Нетривиальным примером условного вероятностного пространства является равномерное распределение на бесконечной прямой L. Оно возникает, если взяв $S = L$, в качестве $\mathfrak{A}$ взять все измеримые по Лебегу подмножества, в качестве $\mathfrak{B}$ взять элементы $\mathfrak{A}$ с мерой Лебега $\lambda(A) > 0$ и положить

$$P(A|B) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(B)}$$

Основным результатом автора является описание всех условных вероятностных пространств, для которых $\mathfrak{B}$ является вполне аддитивным классом множеств. Пусть $(S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ определены так же, как и выше. Пусть Γ — произвольное вполне упорядоченное пространство индексов, причем каждому $\gamma \in \Gamma$ сопоставлена мера $P_\gamma(A)$ так, чтобы для любого $B \in \mathfrak{B}$ существовал индекс $\gamma \in \Gamma$ такой, что

$$0 < P_\gamma(B) < +\infty.$$

и при $\tilde{\gamma} < \gamma < \bar{\gamma}$

$$P_{\tilde{\gamma}}(B) = 0,\ P_{\bar{\gamma}}(B) = +\infty.$$

Положив $P(A|B) = P_\gamma(AB)|P_\gamma(B)$, мы получим условное вероятностное пространство. Доказывается, что таким способом может быть построено любое условное вероятностное пространство, если только класс множеств $\mathfrak{B}$ конечно аддитивен.

В § 2 работы обсуждаются обобщения на рассматриваемый случай понятий функции распределения и плотности распределения вероятностей. Р. Л. Добрушин

3094. О средних значениях и геометрических вероятностях в E_n. Осио (On mean values and geometrical probabilities in E_n. Oshio Shigeru), Канадзава дайгаку рика хококу, Sci. Repts Kanazawa Univ., 1955, **3**, № 2, 199—207 (англ.).

Обобщаются результаты предыдущей статьи автора (Sci. Repts Kanazawa Univ., 1955, **3**, 35—43) на случай n-мерного евклидова пространства E_n.

При надлежащем определении равномерной системы многообразий k измерений в пространстве E_n доказываются:

Теорема 1. Если замкнутая гиперповерхность K, ограничивающая n-мерный объем V, движется в E_n, в котором задана равномерная точечная система, то среднее число $\bar{m}$ точек равномерной точечной системы, содержащихся в K, дается формулой

$$\bar{m} = \rho \frac{V}{C},$$

где ρ — число точек равномерной системы, содержащихся в единичной ячейке, а C — объем последней.

Теорема 2. Если r-мерное многообразие K^r конечного r-мерного объема $V_r(K^r)$ движется в E_n, в котором задана равномерная система S^k многообразий k измерений, то среднее значение $\bar{V}_{k+r-n}(S^k \cap K^r)$ $k+r-n$-мерного объема пересечения множеств S^k и K^r дается формулой

$$\bar{V}_{k+r-n}(S^k \cap K^r) = \frac{\omega_n \omega_{r+k-n}}{\omega_k \omega_r} \frac{V_k(S^k)\, V_r(K^r)}{C},$$

где $V_k(S^k)$ — k-мерный объем многообразий из S^k, лежащих в единичной ячейке, $\omega_i = 2\pi^{(i+1)/2} \times \Gamma^{-1}((i+1)/2)$. И. И. Гихман

3095. О точных оценках в предельных теоремах. Петров В. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 57—58

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — некоторая последовательность независимых случайных величин с функциями распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots$, средними значениями равными нулю, и $\bar{F}_n(x)$ — функция распределения суммы $\zeta_n = X_1 + \ldots + X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Предположим также, что рассматриваемая последовательность случайных величин удовлетворяет следующим

условиям: существуют такие положительные абсолютные постоянные g, G, p, $\gamma \leqslant 1$, $\eta < 1$ и такие монотонно возрастающие до бесконечности с ростом n положительные функции $\psi_0(n)$, $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$, что

1) при всех n $S_n^2 = M\zeta_n^2 \geqslant gn$, $A_{3n} = M|X_1|^3 + \ldots + M|X_n|^3 \leqslant Gn$,

2) при всех n

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Lambda_n}|x|^3\,dF_j(x) \leqslant \frac{1}{\psi_2(n)},$$

где

$$\Lambda_n = \left\{x : |x| \leqslant \sqrt{n}/\psi_1(n)\right\},$$

3) за исключением не более чем для $n/\psi_0(n)$ индексов $j \leqslant n$

$$\int_{\Theta_n} dF_j(x) \leqslant 1-\gamma, \text{ где } \Theta_n = \left\{x : |x| \leqslant n^{-1/2}\right\},$$

4) за исключением не более чем для $n/\psi_0(n)$ индексов $j \leqslant n$

$$\int\limits_{x>0} dF_j(x) \geqslant p, \quad \int\limits_{x<0} dF_j(x) \geqslant p.$$

Приводимые (без доказательств) в заметке утверждения уточняют результаты Ю. В. Линника (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, 111—138) и могут быть сформулированы в виде теоремы:

Если выполнены условия 1) — 4), то для любого конечного M при $|x| \leqslant M$ справедливо неравенство

$$|\tilde{F}_n(x) - \Phi(x) - H_n(x)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{2\pi n}}\,e^{-x^2/2}\,(1+\varepsilon_n(M)),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами (0, 1),

$$H_n(x) = \frac{1-x^2}{6\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}\,\frac{1}{S_n^3}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 dF_j(x),$$

C — положительная постоянная, определяемая из условия

$$C = \begin{cases} \max\left(1, \dfrac{1}{2\sqrt{\gamma}}\right), & \text{если все распределения } F_j \text{ симметричны} \\ \max\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}}, \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\right), & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а $\varepsilon_n(M)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно всех допустимых условиями теоремы последовательностей случайных величин. Приведенная оценка достигается для симметричных распределений F_j. В. М. Золотарев

3096. Колебания сумм независимых случайных переменных величин. Икэда (Fluctuation of sums of independent random variables. Ikeda Nobuyuki), Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, A10, № 1, 15—28 (англ.)

Дана последовательность $X_1, X_2, X_3, \ldots$ независимых случайных переменных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения; исследуются предельные свойства случайных величин $M_n(a)$ и N_n, являющихся функциями случайных величин $S_1, S_2, \ldots, S_n$, где $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Случайная величина $M_n(a)$ определяет число тех S_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, для которых $-a \leqslant S_j \leqslant +a$; случайная же величина N_n определяет число изменений знаков случайных переменных величин $S_1, S_2, \ldots, S_n$, точнее говоря, число тех S_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, для которых $S_j > 0$ и $S_{j+1} < 0$. Автор доказывает три теоремы следующего типа: если функции распределения случайных переменных величин S_n после подходящей нормализации сходятся к некоторой функции распределения, то при добавочных условиях также и функции распределения случайных переменных величин $M_n(a)$ и N_n после подходящей нормализации сходятся при $n \to \infty$ к некоторым функциям распределения. Эти три теоремы являются обобщением результатов, полученных Каллианпуром, Роббинсом, Кацом и Чжуном. Доказательство проводится методом, разработанным Маруямой. A. Špaček

3097. О совместном предельном распределении сумм независимых случайных величин. Прекопа, Реньи (On the independence in the limit of sums depending on the same sequence of independent random variables. Prékopa A., Rényi A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 7, № 3—4, 319—326 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk_n}$ — последовательность серии независимых случайных величин, а $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ — вещественные и измеримые по Борелю функции такие, что $f_i(x) f_k(x) = 0$, если $i \neq k$.

Теорема 1а. Предположим, что выполняются следующие условия:

а) функции $f_l(x)$ $(l = 1, \ldots, r)$ принимают лишь целые значения;

б) для всех l $(l = 1, \ldots, r)$ случайные величины

$$f_l(\xi_{n1}), \ldots, f_l(\xi_{nk_n})$$

бесконечно малы (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., ГИТТЛ, 1949, § 20);

в) для всех l $(l = 1, \ldots, r)$ существует предельное распределение последовательности случайных величин

$$\zeta_l^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} f_l(\xi_{nk}).$$

Из этих условий следует предельная независимость случайных величин $\zeta_l^{(n)}$ $(l = 1, \ldots, r)$ при $n \to \infty$, т. е. выполнение соотношения

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\zeta_1^{(n)} < x_1, \ldots, \zeta_r^{(n)} < x_r\right) = F_1(x_1) \ldots F_r(x_r),$$

где функция $F_i(x)$ дается формулой

$$F_i(x_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\zeta_i^{(n)} < x_i\right) \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Если вместо условия а) требовать выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left|\varphi_{lk}^{(n)}(u_l) - 1\right|^2 = 0,$$

где $\varphi_{lk}^{(n)}$ — характеристическая функция случайной величины $f_l(\xi_{nk})$, то утверждение остается в силе.

Теорема 2, доказываемая с помощью упомянутых теорем, утверждает, что если реализации процесса с независимыми приращениями ξ_t, удовлетворяющими условию

$$\lim_{\Delta t\to 0} P\left(|\xi_{t+\Delta t} - \xi_t| \geqslant \varepsilon\right) = 0,$$

суть непрерывные слева ступенчатые функции, то числа скачков, попадающих в интервалы без общих точек, находящихся от точки 0 на положительном расстоянии, являются независимыми случайными величинами. Резюме авторов

3098. Асимптотическое исследование мультиномиального распределения вероятностей. Туманян С. Х., Докл. АН АрмССР, 1955, 20, № 3, 65—74 (рез. арм.)

Рассматривается схема из n независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью p_i происходит одно из единственно возможных и несовместимых событий A_i $(i=1, 2, \ldots, s)$. Автор исследует случай, когда p_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ зависят от n, а именно

$$p_i=\frac{a_i}{\varphi_i(n)}\ (i=1, \ldots, s-1),\quad p_s=1-\sum_{i=1}^{s-1}\frac{a_i}{\varphi_i(n)},$$

где $a_i>0$ — постоянные, а $\varphi_i(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, причем

$$\frac{\varphi_i(n)}{n}\to C_i\quad (0\leqslant C_i\leqslant\infty)\qquad (i=1, \ldots, s-1).$$

Обозначим через $P_n(m_1, \ldots, m_s)$ вероятность того, что события A_i произойдут соответственно m_i раз в n испытаниях. При этих условиях получаются следующие асимптотические выражения для $P_n(m_1, \ldots, m_s)$ $\left(\sum_{i=1}^{s} m_i=n\right)$:

1) если $C_i=0$ $(i=1, \ldots, s-1)$, то

$$P_n(m_1, \ldots, m_s)\sim\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}q_i x_i^2\right\}}{\left[(2\pi n)^{s-1}\prod_{i=1}^{s}p_i\right]^{1/2}},\qquad (1)$$

где $q_i=1-p_i$ а x_i — нормированное отклонение m_i;

2) если $0<C_i<\infty$ $(i=1, \ldots, s-1)$, то

$$P_n(m_1, \ldots, m_s)\to\prod_{i=1}^{s-1}\left[\left(\frac{a_i}{C_i}\right)^{m_i}e^{-\frac{a_i}{C_i}}/m_i!\right];\qquad (2)$$

3) если $C_i=\infty$ $(i=1, \ldots, s-1)$, то

$$P_n(m_1, \ldots, m_s)\to\begin{cases}0, & \text{если } m_s\neq n\\ 1, & \text{если } m_s=n.\end{cases}$$

В случаях, представляющих комбинацию приведенных трех случаев, можно C_i разбить на 3 группы и получить асимптотическое выражение для $P_n(m_1, \ldots, m_s)$ как произведение соответствующим образом подобранных асимптотических выражений вида (1), (2) и (3). Б. В. Финкельштейн

3099. Максимум сумм устойчивых случайных величин. Дарлинг (The maximum of sums of stable random variables. Darling D. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 1, 164—169 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных по одному и тому же симметричному устойчивому закону с показателем γ, $0<\gamma\leqslant 2$; $S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$. В работе устанавливается существование предельной функции распределения $F(x)=\lim_{n\to\infty}P\{n^{-1/\gamma}\times\times\max(S_1, S_2, \ldots, S_n)<x\}$ и ее абсолютная непрерывность; составляется интегральное уравнение

$$\int_0^\infty e^{-x\Phi}(\xi x^{1/\gamma})\,dx=\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\log(1+\xi^\gamma y^\gamma)}{1+y^2}\,dy\right),$$

которому удовлетворяет преобразование Лапласа $\Phi(\xi)$ для предельного распределения $F(x)$, и с помощью преобразований Меллина дается его решение, обращение которого приводит к выражению для плотности $f(x)$ искомого предельного распределения максимума сумм

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-\gamma^{-1}+s\gamma^{-1})}\times$$

$$\times\int_0^\infty z^{-s}\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\log(1+z^\gamma y^\gamma)}{1+y^2}\,dy\right)dz\,ds.\qquad (1)$$

Отмечается, что в случае $\gamma=2$ выражение (1) дает известный результат $f(x)=\pi^{-1/2}e^{-x^2/4}$, $x\geqslant 0$ (усеченное нормальное распределение); в случае $\gamma=1$ (закон Коши) (1) приводит к распределению

$$f(x)=\frac{1}{\pi x^{1/2}(1+x^2)^{3/4}}\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\log w}{1+w^2}\,dw\right),\quad x>0.$$

Автор утверждает, что тем же путем можно получить соответствующие результаты и для случая, когда X_i лишь принадлежит области притяжения устойчивого закона. А. А. Бобров

3100. О выводе гауссова закона распределения ошибок из гипотезы элементарных ошибок. Мюллер (Zur Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus der Hypothese der Elementarfehler. Müller Max), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1956, 58, № 3, 79—86 (нем.)

Приводится вывод нормального закона для случайных ошибок измерения, основанный на гипотезе Хагена об «элементарных» составляющих ошибках. К. Б. Окунева

3101. Об одном классе стохастических аппроксимационных процессов. Беркхолдер (On a class of stochastic approximation processes. Burkholder D. L.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 4, 1044—1059 (англ.)

Изучается асимптотическое поведение стохастических аппроксимационных процессов некоторых типов.

Для получения результатов, относящихся к процессам различных типов, строится следующим образом стохастический аппроксимационный процесс, включающий все изучаемые. Пусть N — множество натуральных чисел, R — вещественных. Для любых n, x из $N\times R$ пусть $Z_n(x)$ — случайная величина с функцией распределения $G_n(\cdot\,|\,x_n)$ такая, что $EZ_n(x)=R_n(x)$. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, x_1 — случайная величина; при $n\in N$ пусть $x_{n+1}=x_n-a_n z_n$, где z_n — случайная величина с функцией распределения $G_n(\cdot\,|\,x_n)$ при заданных $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Последовательность случайных величин $\{x_i\}$ называется стохастическим аппроксимационным процессом типа A_0.

Приведена без доказательства

Теорема. Если $\{x_n\}$ — процесс типа A_0 и θ — вещественное число такое, что

1) существует функция Q от вещественных положительных чисел на N такая, что если $\varepsilon>0$, $|x-\theta|>\varepsilon$ и $n>Q(\varepsilon)$, то $(x-\theta)R_n(x)>0$;

2) $\sup_{n, x}[|R_n(x)|/(1+|x|)]<\infty$;

3) $\sup_{n, x}V_n(x)<\infty$, где $V_n(x)=DZ_n(x)$;

4) если $0<\delta_1<\delta_2<\infty$, то

$\sum a_n[\inf_{\delta_1\leqslant|x-\theta|\leqslant\delta_2}|R_n(x)|]=\infty$ ($\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел);

5) $\sum a_n^2<\infty$;

6) при $n \in N$ R_n и V_n измеримы в смысле Бореля, то $P\{\lim x_n = \theta\} = 1$.

Как следствия этой теоремы доказываются аналогичные теоремы для процессов других типов.

Доказана также

Теорема. Пусть $\{x_n\}$ — стохастический аппроксимационный процесс типа A_0, $\{\mu_n\}$ — последовательность вещественных чисел, $\{c_n\}$ — положительных, θ — вещественное число, β, $\underline{T}$, $\bar{T}$, $\underline{V}$, $\bar{V}$, γ, σ^2, ξ, c, d — положительные числа такие, что

1) $R_n(\mu_n) = 0$ для всех n;

2) последовательность функций $\{T_n\}$, где для каждого $n \in N$ $T_n(x) = R_n(x)/c_n(x - \mu_n)$, если $x \neq \mu_n$, и $T_n(x) = \beta$, если $x = \mu_n$, непрерывно сходится к β и удовлетворяет $\underline{T} \leqslant T_n(x) \leqslant \bar{T}$ для всех n, x;

3) последовательность $\{V_n\}$ непрерывно сходится к σ^2 и удовлетворяет $\underline{V} \leqslant V_n(x) \leqslant \bar{V}$ для всех n, x;

4) если $r \in N$, то $\sup_{n,\,x} E\,|Z_n(x) - R_n(x)|^r < \infty$;

5) $G_n(y \mid \cdot)$ измеримо по Борелю для всех n, y;

6) $\mu_n - \theta = O(n^{-\gamma})$, $0 < \xi \leqslant 1/2$, $\xi < \gamma$, $n^{\xi + 1/2} a_n \to c$, $n a_n c_n \to d > \xi/\underline{T}$;

7) существуют все моменты x_1;

тогда при $r \in N$

$$\lim n^{r\xi} E\,(x_n - \theta)^r = \begin{cases} \left[\dfrac{\sigma^2 c^2}{2\beta d - 2\xi}\right]^{r/2} (r-1)(r-3)\ldots 3\cdot 1 \\ \qquad \text{при } r \text{ четном}, \\ 0 \text{ при } r \text{ нечетном}, \end{cases}$$

откуда следует, что и величина $n^{\xi}(x_n - \theta)$ асимптотически нормальна $(0, \sigma^2 c^2/(2\beta d - \varepsilon))$.

Условия этой теоремы в дальнейшем ослаблены и доказана асимптотическая нормальность $n^{1/2} R_n(x_n)$.

Отмеченные результаты используются для обоснования методов построения доверительного интервала для θ, аппроксимации корня регрессивного уравнения, аппроксимации значения аргумента, при котором регрессивная функция достигает максимума, и аппроксимации моды. В. А. Михайлов

3102. О рядах одного переменного $F(t) \equiv F(a; b_1, b_2, \ldots, b_k; c, t, t^2, \ldots, t^k)$ и их приложениях в теории вероятностей. Стейн (On the univariable series $F(t) \equiv F(a; b_1, b_2, \ldots, b_k; c; t, t^2; \ldots, t^k)$ and its applications in probability theory. Steyn H. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A 59, № 2, 190—197; Indagationes math., 1956, 18, № 2, 190—197 (англ.)

Рассматривается частный случай функции

$$F(a; b_1, \ldots, b_k; c; t_1, \ldots, t_k) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a+r-1)^{!r}}{(c+r-1)^{!r}} \sum_{\sum r_i = r} \prod_{i=1}^{k} (b_i + r_i - 1)^{!r_i} \frac{t_i^{r_i}}{r_i!},$$

где $z^{!s} = z(z-1)\ldots(z-s+1)$, при условии $t_i = t^i$, $\sum_1^k i r_i = s$, а именно

$$F(a; b_1, \ldots, b_k; c; t, t^2, \ldots, t^k) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{s=x} \frac{\left(a + \sum_1^k r_i - 1\right)^{!\sum_1^k r_i}}{\left(c + \sum_1^k r_i - 1\right)^{!\sum_1^k r_i}} \times \qquad (1)$$

$$\times \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i!} (b_i + r_i - 1)^{!r_i}\right] t^x.$$

Доказывается, что если c — нецелое отрицательное, то ряд (1) сходится для $|t| \leqslant 1$ абсолютно, когда $F(a; b_1, \ldots, b_k; c; t, \ldots, t)$ абсолютно сходится. Из того, что $F\left(a; \sum_1^k b_i, c, t\right) = F(a; b_1, \ldots, b_k; c; t, t, \ldots, t)$ следует, что ряд (1) сходится абсолютно для $|t| < 1$, а для $|t| = 1$ сходится абсолютно, если $R\left(a + \sum_1^k b_i - c\right) > 0$.

Нормированную функцию

$$\Phi(t) = F(a; b_1, \ldots, b_k; c, t, t^2, \ldots, t^k) / F\left(a, \sum_1^k b_i, c, 1\right)$$

автор берет в качестве генератрисы вероятностной функции $f(x)$ (т. е. принимает, что вероятность значения x есть коэффициент при t^x в разложении $\Phi(t)$. Раскладывая $\Phi(1+\alpha)$ по степеням α, можно найти факториальные моменты, а по ним — математическое ожидание и дисперсию x.

При $a \to \infty$ распределение величины $(x - \mu)/\sigma$ стремится к нормальному.

В качестве примеров автор приводит полиномиальную функцию одного переменного, отрицательно-факториальную полиномиальную функцию одного переменного, обобщение распределения Эгген-Бержера и Полиа и др. Г. П. Боев

3103 К. Теория вероятностей как средство для исследований в естественных науках и производстве. Штейнхаус (Die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfsmittel zu Untersuchungen in Naturwissenschaften und Produktion. Steinhaus H. Hauptref. 8. Poln. Mathematikerkongr. Warschau, Sept. 1953. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1954, 69—94) (нем.)

3104 К. Введение в теорию вероятностей. Аккермани (Einführung in die Warscheinlichkeitsrechnung. Ackermann Wolf-Günter. Leipzig, Hirzel, 1955, 182 s.) (нем.)

Книга предназначена для первого знакомства практиков и учащихся с понятиями теории вероятностей и основным аппаратом этой науки. Первая часть книги посвящена изложению аксиоматики Мизеса и доказательству основных теорем теории вероятностей. Во второй части рассматриваются случайные величины, функции распределения, плотности и числовые характеристики случайных величин; особое внимание уделено связи между функцией распределения и моментами случайной величины. Третья часть посвящена предельным теоремам теории вероятностей; обсуждается метод характеристических функций и доказываются теоремы Лапласа, Пуассона и Ляпунова, а также теоремы о законе больших чисел и усиленном законе больших чисел; рассматриваются некоторые приложения из области статистической физики. В конце каждой части имеются задачи и подробные решения этих задач. Статистические и технические приложения теории вероятностей в книге не рассматриваются.

Л. Н. Большев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3105. Достаточные статистики в элементарной теории распределений. Хогг, Крейг (Sufficient statistics in elementary distribution theory. Hogg Robert V., Craig Allen T.), Sankhyā Indian J. Statistics, 1956, 17, № 3, 209—216 (англ.)

Рассматривается вероятностная функция плотности $f(x; \theta_1, \ldots, \theta_q)$ действительной случайной величины x зависящая от q неизвестных параметров $\theta_1, \ldots, \theta_q$.

значения которых лежат в невырожденной интервале размерности q. Эта функция берется в форме:

$$f = Q(\theta_1, \ldots, \theta_q)\, M(x) \exp\Big[\sum_{j=1}^{\eta} p_j(\theta_1, \ldots, \theta_q) K_j(x), \Big] \quad a < x < b,$$

где

(I) $M(x)$ неотрицательна и непрерывна,

(II) $K_j(x)$ непрерывны и линейно независимы,

(III) p_j непрерывны, а множество значений $(p_1, \ldots, p_q)$ содержит невырожденный интервал размерности q,

(IV) a и b не зависят от θ_j.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ $(q < n)$ есть случайная выборка n значений величины x, при этом $z_j = \sum_{i=1}^{n} K_j(x_i)$ $(j = 1, \ldots, q)$ будет множество q совместных достаточных статистик для параметров θ_j $(j = 1, \ldots, q)$. Доказывается теорема: Чтобы любая другая статистика $T = T(x_1, \ldots, x_n)$ случайной выборки была стохастически независима от совместных достаточных статистик z_j, необходимо и достаточно, чтобы распределение вероятностей для T было свободно от θ_j, $j = 1, \ldots, q$.

В регулярном случае рассматривается не только одномерная случайная величина x, но и изучаются задачи с вероятностными плотностями от случайной выборочной точки e размерности больше чем q. Указанная теорема распространяется также и на некоторые нерегулярные случаи, где вероятностная функция плотности берется в виде

$$f(x; \theta) = Q(\theta)\, M(x), \quad a(\theta) < x < b(\theta),$$

а на $M(x)$, $a(\theta)$ и $b(\theta)$ накладываются определенные ограничения, которые в общем приводят к тому факту, что в этом случае существует единственная достаточная статистика для параметра.

Изложение материала дополняется многочисленными примерами. Б. М. Клосс

3106. Достаточные статистики и ортогональные параметры. Хузурбазар (Sufficient statistics and orthogonal parameters. Huzurbazar V. S.), Sankhyā Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 3, 217—220 (англ.)

Пусть $f(x, \alpha_i)$ есть функция плотности вероятностного распределения, зависящего от n параметров α_i $(i = 1, \ldots, n)$. Говорят, что параметры ортогональны, если

$$E_{ij} = E\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} \log f \right\} \equiv 0$$

для всех i, j $(i \neq j)$. Вообще, мы имеем некоторый произвол в выборе формы этих параметров. Если β_j, например, есть любые n независимых функций от α_i, можно взять β_j в качестве параметров вместо α_i. Важность ортогональных параметров заключается в том, что оценки максимума правдоподобия некоррелированы, а отсюда практическое решение получается с большой легкостью методом итераций.

В заметке показывается, что когда вероятностное распределение, зависящее от двух параметров, допускает достаточные статистики, проблема нахождения ортогональных параметров разрешима. При доказательстве автор апеллирует к такому преобразованию старых параметров, чтобы новые параметры стали ортогональными. В качестве примера рассматривается распределение III типа Пирсона, зависящее от двух параметров.

Как указывает автор, решение становится чрезвычайно трудным для случая трех параметров и вообще невозможным (кроме специальных случаев), когда число параметров превышает три. Б. М. Клосс

3107. Зависимые испытания и достаточные статистики. Кудо (Kudo Hirokichi), Отяномидзу дзёси дайгаку, Сидзэн хококу; Natur. Sci. Rept. Ochanomizu Univ., 1954, **4**, № 2, 151—163 (япон.)

3108. О распределении двух выборочных критериев Кендалла и Вилкоксона в случае, когда существуют группы безразличных элементов. Смид (On the distribution of the test statistics of Kendall and Wilcoxon's two sample test when ties are present. Smid L. J.), Statist. neerl., 1956, **10**, № 3—4, 205—214 (англ.; рез. гол.)

Выборка объема N упорядочивается по двум различным признакам. Гипотеза H_0 состоит в том, что способы упорядочения независимы.

Для проверки этой гипотезы Кендалл предложил критерий S. Он определяется как сумма чисел, поставленных в соответствие парам элементов выборки, каждое из которых равно $+1$, если соответствующая пара имеет одинаковый порядок при обоих способах упорядочения, равно -1, если порядок пары меняется, и равно 0, если хотя бы при одном способе упорядочения порядок элементов соответствующей пары безразличен.

Распределение статистики S исследовано Кендаллом (Kendall M. G., Rank correlation methods, London, 1948) для случая, когда оба упорядочения не содержат элементов, порядок которых безразличен, и Вилкоксоном для случая, когда одно из упорядочений состоит из двух групп элементов, порядок которых внутри группы безразличен.

В работе исследуется общий случай, когда одно из упорядочений содержит k, а другое r различных групп безразличных между собой элементов, причем число элементов в каждой группе предполагается известным ($t_1, \ldots, t_k$ для первого упорядочения и $u_1, \ldots, u_r$ — для второго).

В предположении правильности гипотезы H_0 находится условное распределение статистики S:

$$P\{s \mid t_1, \ldots, t_k; u_1; \ldots, u_r : H_0\}.$$

Рассматриваются примеры. Б. Н. Гарттштейн

3109. Об испытании статистических гипотез. Мацусита, Судзуки, Фудимото (On testing statistical hypotheses. Matusita Kameo, Suzuki Yukio, Hudimoto Hirosi), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1954, **6**, 133—141 (англ.)

Авторы рассматривают пять задач, связанных с нормальным распределением, в которых испытываются сложные гипотезы против простых или сложных альтернатив. Они дают границы для ошибок тестов как функций от расстояния между двумя распределениями, введенными Мацусита (Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1951, **3**, 17—35). J. Wolfowitz

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 728.

3110. О семействе асимптотических критериев сложных статистических гипотез. Нейман (Sur une famille de tests asymptotiques des hypothèses statistiques composées. Neyman Jerzy), Trabajos Estadist., 1954, **5**, 161—168 (франц.; рез. исп.)

Пусть $(X_1, X_2, \ldots)$ — последовательность случайных величин и H обозначает гипотезу о независимости и одинаковой распределенности этих величин, согласно плотности $f(x, \theta)$ — известной функциональной формы, но содержащей неизвестный параметр. Чтобы проверить H с асимптотическим уровнем α, желательно построить последовательность областей

$(A_1, A_2, \ldots)$, где A_n есть область в пространстве $(X_1, \ldots, X_n)$, такую, что:

$$\lim_{n\to\infty} \int \ldots \int_{A_n} \prod_1^n f(x_i, \theta)\, dx_i \equiv \alpha$$

тождественно относительно θ. Предполагая некоторые условия регулярности для $f(x, \theta)$, автор строит такую последовательность областей. Главным средством при этом является центральная предельная теорема.

L. Weiss

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 729.

3111. Распределение t_1 и его приложения. Маракатхавалли (The distribution of t_1 and its applications. Marakathavalli N.), J. Madras Univ., 1954, **B24**, 251—272 (англ.)

3112. Распределение произведения максимальных значений в выборках из равномерно распределенной совокупности. Райдер (The distribution of the product od maximum values in samples from a rectangular distribution. Rider Paul R.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 272, 1142—1143 (англ.)

Предполагая, что случайная величина равномерно распределена в отрезке [0, 1], автор выводит закон распределения для произведения максимумов, наблюдавшихся в k независимых выборках объема n. Вычисляются моменты этого распределения.

Н. В. Смирнов

3113. Вычисление X-распределения. Ван-дер-Варден (The computation of the X-distribution. Van der Waerden B. L.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley-Los Angeles, 1956, 207—208 (англ.)

Кратко сообщается о способах вычисления таблиц для так называемого X-распределения, предложенного автором (РЖМат, 1954, 3030). Этот критерий состоит в следующем. Пусть $x_1, \ldots, x_g$ и $y_1, \ldots, y_h$ — две серии независимых наблюдений над случайными величинами. Требуется проверить гипотезу, что распределения обеих случайных величин равны. Из обеих последовательностей наблюдений составляется общий вариационный ряд. Пусть $n = g + h$ и величина r означают номера x-ов в этом ряду. Образуем величину $X = \sum_r a_r$, где $a_r = \Psi(r/(n+1))$, Ψ — обратная функция для стандартного нормального распределения. Гипотеза принимается или отбрасывается в зависимости от того превышает или нет величина X (или $|X|$) заданный уровень.

Б. В. Гнеденко

3114. О приближении функции плотности. Акаикэ (An approximation to the density function. Akaike Hirotugu), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1954, 6, 127—132 (англ.)

Если в выборке объема N из генеральной совокупности с плотностью $f(x)$ данные выборки группируются в классовые интервалы ширины 2ε и даются наблюденные относительные частоты $\hat{f}_{N,\varepsilon}(x)$ интервалов, то, как указывает автор, наилучший выбор ε для данного N будет тот, при котором минимизируется

$$\int_R E\,[\hat{f}_{N,\varepsilon}(x) - f(x)]^2\, w(x)\, dx,$$

где R — пространство выборки и $w(x)$ — «надлежащая» весовая функция.

Для шести комбинаций $f(x) = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$,

$$e^{-|x|}/2 \ (-\infty < x < \infty),\ 1/a \ (0 \leqslant x \leqslant a)$$

и $w(x) = 1$ или $f(x)$ наилучшее значение N дается в зависимости от ε. Таблицы дают значения N для выбранных значений ε в каждом из указанных случаев; кривые, построенные на основании этого материала, показывают, что по крайней мере для выбранных $f(x)$ обычная процедура взятия примерно 10—20 классовых интервалов для гистограмм, основываясь на выборках объема около 500 или больше, может рассматриваться как теоретически состоятельная.

C. C. Craig

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 726.

3115. Нормализация плотностей распределения. Бос (Normalisation of frequency functions. Bose P. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, 48, № 3, 109—119 (англ.)

Пользуясь известным разложением плотности распределения в ряд Эджворта, автор находит формулы, дающие возможность оценить абсолютную максимальную ошибку, происходящую от замены функции распределения некоторых статистик, построенных для выборки объема n, нормальной функцией.

Рассматриваемые статистики предполагаются нормированными и разложение их плотностей используется только до членов порядка n^{-1}, поэтому ошибка в таком приближении зависит лишь от моментов начального распределения третьего и четвертого порядка (т. е. от параметров β_1 и β_2 Пирсона).

Построены таблицы, по которым для некоторых частных распределений (распределения t, χ^2, $(2\chi^2)^{1/2}$, D^2) можно при различных n оценивать максимум ошибки, получающейся при замене выборочных распределений нормальным.

Оказывается, что ошибка, не превышающая 1%, получается для t-распределения при $n \geqslant 20$, для χ^2-распределения при $n \geqslant 200$, для $(2\chi^2)^{1/2}$-распределения при $n \geqslant 25$.

Для малых n результаты работы не дают большой точности.

Б. Н. Гартштейн

3116. О достаточной оценке для среднего случайной величины, подчиненной закону Лапласа в пространстве Банаха. Досс (Sur une estimation exhaustive pour la moyenne d'une variable aléatoire obéissant à la loi de Laplace dans un espace de Banach. Doss Shafik), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1954, **3**, 135—142 (франц.)

Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — независимые в совокупности нормально и одинаково распределенные случайные переменные со значениями из пространства Банаха. В том случае, когда пространство значений представляет прямую, известен классический результат о том, что среднее арифметическое представляет достаточную статистику для оценки среднего. Соответствующий результат устанавливается в общем случае.

J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 728.

3117. Использование обобщенной вероятностной бумаги для непрерывных распределений. Чернов, Либерман (The use of generalized probabillity paper for continuous distributions. Chernoff Herman, Lieberman Gerald J.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 806—818 (англ.)

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — вариационный ряд, соответствующий некоторой совокупности с непрерывной функцией распределения $F[(x-\mu)/\sigma]$, где μ — математическое ожидание, а σ^2 — дисперсия. Пусть v_p — p-квантиль функции распределения $F(v)$. В плоскости (v, x) зависимость v и x графически изображается прямой линией с уравнением $x = \mu + \sigma v$. Если эта прямая известна, то можно указать стандартные графические приемы отыскания μ, σ и любой квантили x_p распределения $[F(x-\mu)/\sigma]$. Для случая, когда эта прямая неизвестна, авторы предлагают задать n чисел $v_1, v_2, \ldots, v_n$, в плоскости (v, x) нанести точки с координатами (v_i, x_i) и построить для этой системы

точек наилучшее линейное приближение способом наименьших квадратов (практически это линейное приближение ищется визуально). Полученная таким образом прямая позволяет с помощью стандартных графических приемов найти оценки для μ, σ и x_p. В работе показано, как нужно задавать числа v_i, для того чтобы найденные этим способом оценки обладали заданными свойствами (например, имели наименьшую дисперсию.) В качестве примеров рассмотрены случаи показательного и нормального распределений (РЖМат, 1956, 4699). Л. Н. Большев

3118. Оценки в виде отношений в простой случайной выборке с некоторыми практическими приложениями. Риддерстрём (On ratio estimates in simple random sampling with some practical applications. Ridderström S.), Skand. aktuarietidskr., 1955, № 3—4, 135—162 (англ.)

Рассматривается простая случайная выборка объема n из конечной совокупности, состоящей из N элементов с количественным признаком Y. Для оценки среднего совокупности $\bar{Y}$ обычно используют выборочное среднее $\bar{y}$. Свойства этой оценки хорошо известны. Автор рассматривает случай, когда имеется информация о некоторой вспомогательной совокупности объема N с количественным признаком X, причем $\bar{X}$ предполагается известной, а X и Y — коррелированными. В этом случае для $\bar{Y}$ предлагается оценка $k\bar{X}$, где $k=\bar{y}/\bar{x}$. Отмечается, что при некоторых ограничениях, налагаемых на коэффициент корреляции X и Y, оценка $k\bar{X}$ обладает меньшей средней квадратичной погрешностью, чем $\bar{y}$. Исследуются асимптотические свойства оценки $k\bar{X}$ при $n\to\infty$ и $N\to\infty$. Полученные результаты используются для решения некоторых задач, связанных со страхованием. Л. Н. Большев

3119. Последовательный метод для проверки взаимодействия двух факторов, вызывающих одинаковый эффект. Безем (A sequential method for testing interaction of two factors producting the same all-or-none effect. Bezem J. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 4, 424—431; Indagationes math., 1954, 16, № 4, 424—431 (англ.)

В рассматриваемой ситуации данная совокупность индивидуумов, находясь в состоянии C_0, с некоторой вероятностью может перейти в состояние C_1 (считается, что переход от C_0 к C_1 необратим). Вероятность этого перехода увеличивается от действия двух факторов A и B. Необходимо статистически определить, действуют ли эти факторы независимо или между ними существует некоторый вид взаимодействия. Предлагается процедура, которая допускает точный критерий и может быть исследована с точки зрения последовательного анализа.

Вся совокупность индивидуумов разбивается случайным образом на четыре группы. Группа 0 остается при нормальных условиях, пока группы 1, 2, 3 подвергаются действию соответственно фактора A, фактора B и обоих объединенных факторов. Если $q_i\,(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ есть результирующие вероятности остаться неизменными в состоянии C_0 в соответствующих группах, то факторы считаются независимыми один от другого при выполнении следующего соотношения $q_0q_3=q_1q_2$. В противном случае факторы находятся во взаимодействии. Это взаимодействие называется положительным, когда $q_0q_3<q_1q_2$, и отрицательным, когда $q_0q_3>q_1q_2$.

В схеме с непоследовательным методом при наличии двусторонних альтернатив берется N выборок по четыре индивидуума, с которыми проводится эксперимент. Индивидуальному переходу от C_0 к C_1 приписывается значение 0, в противном случае — значение 1. Мы получаем N множеств четырех значений $x_i\,(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$, где каждое x_i есть либо 0, либо 1. Для каждого множества вычисляем значение величины $x=x_1x_2-x_0x_3$. Эксперименты, имеющие результатом $x=0$, отбрасываются. Пусть n есть число экспериментов, имеющих результатом $x\neq 0$. Тогда и рассматривается критерий, основанный на условном вероятностном распределении числа значений $x=+1$ при условии, что число значений $x\neq 0$ равно n, и при гипотезе $q_0q_3=q_1q_2$. В итоге появляется необходимость исследования симметрического биномиального распределения для n независимых испытаний.

Для последовательного критерия с односторонней альтернативой усовершенствуется метод Вальда. Степень взаимодействия измеряется при помощи величины

$$r=\frac{q_1q_2\,(1-q_0q_3)}{q_0q_3\,(1-q_1q_2)}.$$

Если $r=1$, факторы независимы. Если $r>1$, имеем положительное взаимодействие, если $r<1$ — отрицательное. Мы хотим проверить независимость факторов, когда положительное взаимодействие допущено как альтернатива. На критерий для гипотезы $(H_0)\ r\leqslant 1$ против альтернативы $(H_1)\ r>1$ налагаются следующие ограничения. Выбираются два значения $r_0<1<r_1$, удовлетворяющие условиям:

1) если $r\leqslant r_0$, отказ от H_0 рассматривается как ошибка 1-го рода, вероятность которой не должна превышать заданного значения α;

2) если $r\geqslant r_1$, принятие H_0 рассматривается как ошибка 2-го рода, вероятность которой не должна превышать заданного значения β;

3) в области $r_0<r<r_1$ никаких условий не налагается, так как несущественно, принимать H_0 или не принимать.

Критерий, удовлетворяющий этим условиям, есть последовательный критерий отношения вероятностей, основанный на условном распределении $P\,[k|n]$ (k есть число экспериментов, имеющих в результате значение $x=+1$).

В случае двусторонних альтернатив мы желаем проверить гипотезу $(H_0)\ r=1$ против альтернативы $(H_1)\ r\neq 1$. Налагаются опять подобные же разумные ограничения и находится последовательный критерий.

Оба последовательных критерия могут быть выполнены графическим путем. Б. М. Клосс

3120. Критические значения для проблемы сравнения двух средних. Триккетт, Уэлш, Джеймс (Further critical values for the two-means problem. Trickett W. H., Welch B. L., James G. S.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 203—205 (англ.)

Рассматривается задача сравнения средних в двух нормальных совокупностях с параметрами $(a_1,\ \sigma_1)$ и $(a_2,\ \sigma_2)$. Пусть $n_1=\nu_1+1$ и $n_2=\nu_2+1$ — объемы выборок, $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ — выборочные средние, s_1^2 и s_2^2 — независимые несмещенные оценки для σ_1^2 и σ_2^2 с ν_1 и ν_2 степенями свободы соответственно и пусть $\lambda_1=1/n_1$, $\lambda_2=1/n_2$, $y=\bar{x}_1-\bar{x}_2$ и $a=a_1-a_2$. Как известно, распределение статистики

$$v=(y-a)\,/\,\sqrt{\lambda_1s_1^2+\lambda_2s_2^2}$$

зависит от неизвестного отношения σ_1^2/σ_2^2, что затрудняет использование v для сравнения средних. Однако, как показал Уэлш (Biometrika, 1947, 34, 28—35), если положить $c=\lambda_1s_1^2\,/\,(\lambda_1s_1^2+\lambda_2s_2^2)$, то можно

найти такую функцию $V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha)$, которая будет удовлетворять уравнению

$$P\{v \geqslant V(c, \nu_1, \nu_2, \alpha)\} = \alpha.$$

Значения функции V предлагается использовать в качестве критических значений для проблемы сравнения двух средних. К заметке прилагаются таблицы функции V с двумя десятичными знаками для $\alpha = 0{,}005$ и $0{,}025$, $c = 0(0{,}1)\ 1$, ν_1, $\nu_2 = 8, 10, 12, 15, 20, 30$ и ∞. Ошибка линейной интерполяции по любому направлению не превышает 0,01.

Л. Н. Большев

3121. Последовательный метод приемочного контроля партий с большим и малым числом экземпляров. Вагнер (Folgetest für die Abnahmeprüfung von Mengen mit grossen und kleinen Stückzahlen. Wagner Gustav), Mitteilungsblatt Math. Statist., 1953, 5, 89—102 (3 plates) (нем.)

3122. Разбраковка при помощи прибора, показания которого имеют случайные отклонения. Мандел (Graging with a gauge subject to random output fluctuations. Mandel L.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, 16, № 1, 118—130 (англ.)

Пусть некоторая совокупность разбраковывается по признаку θ_1 (распределенному нормально со средним значением θ_0 и дисперсией σ_1) при помощи прибора, показание которого θ распределено нормально со средним значением θ_1 и дисперсией σ (такая ситуация имеет место, если измерять толщину пластинок при помощи β-лучей). Пусть

$$(\theta - \theta_0)/\sqrt{2\sigma} = s, \quad (\theta_1 - \theta_0)/\sqrt{2\sigma} = x, \quad \Delta\theta_0/\sqrt{2\sigma_1} = \mu,$$

$$\Delta\theta_0/\sqrt{2\sigma} = \lambda.$$

Годными являются изделия, для которых $|x| < \lambda$, но практически в класс годных попадут изделия, для которых $|s| < \lambda$. В статье изучается совместное распределение x и s и дается удобное для вычислений разложение величины $P(|x| > \lambda,\ |s| < \lambda)$ по отрицательным степеням λ. Рассматриваются также

$$F_1(\mu, \lambda) = P(|x| < \lambda,\ |s| > \lambda)/P(|x| < \lambda),$$

$$F_2(\mu, \lambda) = P(|x| > \lambda,\ |s| < \lambda)/P(|x| > \lambda)$$

и подобные им величины, которые, по мнению автора, лучше всего характеризуют эффективность разбраковки. Значительное улучшение некоторых из этих показателей (при небольшом ухудшении других) можно достичь, если условие $|s| < \lambda$ заменить на $|s| < \lambda + \varepsilon$ с подходящим ε. В связи с этим подробно исследуется асимптотическое поведение

$$P(|x| > \lambda,\ |s| < \lambda + \varepsilon)/P(|x| > \lambda,\ |s| < \lambda)$$

при $\mu \to 0$, $\lambda \to +\infty$ и при $\mu \to +\infty$, λ конечно. Для F_1, F_2 и подобных величин приводятся несколько графиков.

Г. К. Энгелис

3123. Теоремы о полных классах в экспериментальных проектированиях. Эренфелд (Complete class theorems in experimental design. Ehrenfeld Sylvain), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley-Los Angeles, 1956, 57—67 (англ.)

Решаемая задача может быть сформулирована следующим образом. Имеются N некоррелированных случайных величин Y_{x_α} ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$) с общей дисперсией σ^2. Предполагается, что математическое ожидание Y_{x_α} представляется как

$$E(Y_{x_\alpha}) = \theta_1 x_{\alpha 1} + \ldots + \theta_k x_{\alpha k} = \theta x_\alpha,$$

где $\theta \in \Omega \subseteq E^{(k)}$, $x_\alpha = (x_{\alpha 1}, \ldots, x_{\alpha k}) \in E^{(k)}$ и $E^{(k)}$ — евклидово пространство k измерений. Коэффициенты $\theta_1, \ldots, \theta_k$ являются совокупными коэффициентами регрессии $Y' = (Y_{x_1}, \ldots, Y_{x_N})$ на k векторов $(x_{1j}, \ldots, x_{Nj})$, $j = 1, \ldots, k$, соответственно, x_α — фиксированные векторы и θ — неизвестный параметр. Класс экспериментов, которые заключаются в наблюдениях $Y_{x_1}, \ldots, Y_{x_m}$ ($m \leqslant N$), (векторы $x_1, \ldots, x_m$ принадлежат $A \subseteq E^{(k)}$), обозначаются через $\mathcal{E}_N[A]$.

Предположим теперь, что относительно θ может быть поставлено множество $T \subseteq E^{(k)}$ проблем. Тогда точка $(t_1, \ldots, t_k) \in T$ интерпретируется как проблема оценки $t_1\theta_1 + \ldots + t_k\theta_k$. Пусть $V_d[t'\theta]$ обозначает вариацию оценки максимального правдоподобия $t_1\theta_1 + \ldots + t_k\theta_k$, когда эксперимент $d \in \mathcal{E}_N[A]$ используется. $\mathcal{E}_L[A_0]$, где $A_0 \subseteq A$, называется существенно полным (T) относительно $\mathcal{E}_N[A]$, тогда и только тогда, когда для любого $d \in \mathcal{E}_N[A]$ и любого неизвестного θ существует $d^* \in \mathcal{E}_L[A_0]$ такой, что

$$V_{d^*}[t'\hat{\theta}] \leqslant V_d[t'\hat{\theta}]$$

для всех $t \in T$.

Доказывается ряд теорем о существенно полных классах.

Р. Х. Дивеев

3124. О вырожденной гипергеометрической функции $M(\alpha, \gamma, x)$. Раштон (On the confluent hypergeometric function $M(\alpha, \gamma, x)$. Rushton S.), Sankhyā, 1954, 13, № 4, 369—376 (англ.)

Вырожденная гипергеометрическая функция $M(\alpha, \gamma, x)$ определяется равенством

$$M(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

После обзора свойств этой функции излагаются ее применения в некоторых последовательных критериях для сложных гипотез, уже обсуждавшиеся автором (Biometrika, 1950, 37, 326; 1952, 39, 302). В заключение поясняется способ составления прилагаемых к статье таблиц функции $M(\alpha, \gamma, x)$.

В. В. Петров

3125. Значимость наименьшей из последовательности оценок нормальной дисперсии. Дорнбос (Significance of the smallest of a set of estimated normal variances. Doornbos R.), Statist. neerl., 1956, 10, № 2, 117—126 (англ.; рез. гол.)

Рассматриваются k групп независимых случайных величин с одинаковым числом членов в каждой группе:

$$(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Предполагается, что все случайные величины распределены нормально, имеют одинаковую дисперсию σ^2 и математические ожидания, одинаковые для всех членов одной группы.

Статистика a определяется как наименьшее из отношений

$$a_i = s_i^2 / \sum_{j=1}^k s_j^2, \text{ где } s_i^2 = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)/(n-1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k), \quad \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}/n.$$

Найденное в работе приближенное распределение этой статистики предлагается для проверки гипотезы о равенстве дисперсий в последовательности нормальных распределений при конкурирующей гипотезе, состоящей в том, что одна из дисперсий меньше остальных. Критическая область состоит из малых значений a.

Указываются некоторые оптимальные свойства предлагаемого критерия, аналогичного известному критерию Кохрана (Cohran). Приводятся таблицы.

Б. Н. Гартштейн

3126. Об использовании вероятности ошибок. Вальтер (Über die Ausnutzung der Irrtumswahrscheinlichkeit. Walter Edward), Mitteilungsbl. Math. Statist., 1954, 6, 170—179 (нем.)

При испытании статистических гипотез, в частности, в непараметрических тестах или тестах, относящихся к дискретным величинам, обычно невозможно построить критические области объема, в точности равного заданному числу α, но, как правило, строят области объемов, меньших или равных α. Пусть y_0 будет таким, что, если $y < y_0$, H_0 — испытываемая гипотеза — принимается, а если $y > y_0$, H_0 отбрасывается. Если же $y = y_0$, то вводится второй критерий y', который может быть определен так, что если $y' < y_0'$, H_0 принимается, а если $y' > y_0'$, H_0 отбрасывается. Этот второй критерий выбирается так, чтобы максимизировать мощность теста. Если $y' = y_0'$, определяется третья случайная величина, и т. д. Этим путем можно расширить критическую область, в начале имевшую объем, меньший чем α, до такой, какая уже имеет объем, близкий к α. Эта идея была применена Флинтом к тесту по знакам в предположении, что интегральное распределение непрерывно и симметрично, когда желательно бывает испытать гипотезу о том, что среднее генеральной совокупности равно нулю.

Вторая случайная величина (критерий) y' является рангом абсолютного значения наибольшего отрицательного наблюдения, а y'' есть ранг абсолютного значения второго по величине отрицательного отклонения и т. д. В первой таблице автор дает критические значения для модифицированного теста как для одностороннего, так и для двустороннего критерия, когда n — объем выборки — равен 5(1)25 для $\alpha = 0{,}05$; $n = 7(1)25$, $\alpha = 0{,}01$; и $n = 10(1)25$ для $\alpha = 0{,}001$. Функция мощности оценивается с помощью экспериментальной выборки с использованием нормального распределения с $\mu = 0{,}6$; 1,0 и 1,4 для $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$ и сравнением с обычным критерием знаков (по отношению к которому новый критерий значительно лучше) и наиболее эффективным t-критерием Стьюдента для $n = 10$. В третьей таблице автор дает объем критической области для $\alpha = 0{,}05$, $n = 5(1)30$ и показывает, что для модифицированного теста он монотонно возрастает и для $n \geqslant 10$ действительно равен 0,05. Примеры иллюстрируют приложения метода.

L. A. Aroian

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 5, 498—499

3127. Соображения относительно использования моделей ошибок в переменных. Маленво (Réflexions sur l'emploi des modèles à erreurs sur les variables. Malinvaud E.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 1955, 62. Paris, 1956, 159—167. Discuss., 168 (франц.)

Автор напоминает метод вспомогательных переменных, введенный в 1937 г. Купменом. Сущность этого метода видна из приведенного в статье примера. Пусть имеются случайные величины

$$x_{1i} = y_i + \varepsilon_{1i},$$
$$x_{2i} = y_i \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{2i},$$

где y_i, θ — неизвестные параметры, а ε_{1i}, ε_{2i} — случайные величины, причем $E\varepsilon_{ki}\varepsilon_{hj} = 0$ (k, $h = 1$, 2; $i \neq j$; i, $j = 1$, 2, ..., n). Задача состоит в оценке θ. Оказывается, даже когда неизвестны вторые моменты ε_{ki}, все же можно получить асимптотически эффективную оценку для θ, если мы знаем третью, вспомогательную, переменную $x_{3i} = \beta y_i + \varepsilon_{3i}$, такую что $E(\varepsilon_{1i}\varepsilon_{3i}) = E(\varepsilon_{2i}\varepsilon_{3i}) = 0$.

С. С. Кислицын

3128. Об асимптотической оценке параметров авторегрессивного процесса. Гхурье (Note on asymptotic estimation of parameters of an autoregressive process. Ghurye S. G.), Ganita, 1955, 6, № 1—2, 1—7 (англ.)

Пусть $\{X_t,\ t = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность случайных величин. Получены предельные распределения оценок параметров α_i стохастического разностного уравнения

$$X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_k X_{t-k} + \alpha_0 = \varepsilon_t,$$
$$t = k+1,\quad k+2,\ \ldots \qquad (1)$$

при следующих допущениях: 1) Последовательность $\{X_t\}$ такова, что существует множество постоянных α_0, α_1, ..., α_k, для которого последовательность $\{\varepsilon_t\}$ правых частей (1) представляет собой стационарную m-связанную ($m \geqslant 0$) последовательность случайных величин со средним нуль и конечной дисперсией. Не существует другого множества α_0^*, ..., α_k^* такого, что соответствующая ε-последовательность является m'-коррелированной для некоторого конечного m'. 2) Все корни γ_j характеристического уравнения $x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k = 0$ лежат внутри единичного круга. 3) ε_t непрерывно распределены. 4) Неособенность матрицы, составленной из α_i.

В качестве асимптотических оценок для α_i используются $a'(N) = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, задаваемые соотношением

$$a'(N)\, D'(N) = -(S,\ T_{m+1},\ T_{m+2},\ \ldots,\ T_{m+k}), \qquad (2)$$

где $S = S(N) = \sum_{k+m+1}^{N} X_t$, $T_j = T_j(N) = \sum_{k+m+1}^{N} X_t X_{t-j}$, $D(N)$ — матрица, составленная из $S(N)$, $T_j(N)$, а X_i — наблюденные значения последовательности $\{X_t\}$. Пусть $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Тогда, как показано, предельное распределение $\{a(N) - \alpha\}\sqrt{N}$ при $N \to \infty$ (векторы без штрихов означают векторы-столбцы) совпадает с распределением $D^{-1}(N)\, Y(N)\sqrt{N}$, где

$$Y'(N) = -\sum_{k+m+1}^{N} \varepsilon_t (1,\ X_{t-m-1},\ X_{t-m-2},\ \ldots,$$
$$\ldots,\ X_{t-m-k}).$$

$D(N)/N$ сходится по вероятности к неособенной матрице, а последовательность распределений случайных векторов $N^{-1/2}Y(N)$ сходится к $(k+1)$-мерному нормальному распределению с нулевыми средними и матрицей ковариаций, равной пределу матриц ковариаций для $N^{-1/2}Y(N)$. Сходимость $\{a(N) - \alpha\}\sqrt{N}$ следует из (2).

А. П. Хусу

3129. Элементарный вывод моментов для числа превышений. Гумбель (Elementare Ableitung der Momente für die Zahl der Überschreitungen. Gumbel E. J.), Mitteilungsbl. Math. Statist., 1954, 6, 164—169 (нем.)

Автор дает элементарный вывод моментов числа членов выборки, превосходящих m-й по порядку величины член другой (не зависимой от первой) выборки. Эти результаты были получены в более ранней работе (Ann. Math. Statistics, 1950, 21, 247—262) с помощью гипергеометрических рядов.

B. Epstein

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 270.

3130 К. Введение в статистические методы. Рюс (Introducción a los metodos de la estadistica. 2 parte.

Rios Sixto. Madrid, 1954, iv, p. 193—434) (исп.)

3131 Д. О различении статистических совокупностей. Иванович (Sur la discrimination des ensembles statistiques. Ivanovitch Branislaw. Thèse, doct. univ., Fac. sci. Univ. Paris. Paris, Impr. J. & R. Sennac, 1954, 270 p.) (франц.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

3132. Развитие линейного программирования. Данциг (Developments in linear programming. Dantzig George B.), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., Washington, 1955, 2, s. a., 667—685 (англ.)

Намечаются некоторые пути дальнейшего развития линейного программирования: усложнение задач введением выпуклых функций, приближенно представимых линейными; применение линейного программирования к комбинаторным задачам; усовершенствование методов решения задач с большим числом переменных. С. С. Кислицын

3133. Оптимизация функции аддитивно разделенных переменных, подчиненных простому ограничению. Важоньи (Optimizing a function of additively separated variables subject to a simple restriction. Vazsonyi Andrew), Proc. 2 Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, 2, s. a., 453—469 (англ.)

Пусть $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, ..., $f_N(x_N)$ — функции неотрицательных переменных x_1, x_2, ..., x_N. Изучается задача о максимизации функции

$$z = \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)$$

при условии $\sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant A$.

Эту задачу можно решать, например, следующим образом: пусть $z_n = \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, и $F_n(a) = \max\limits_{x_1, \ldots, x_n} z_n$ при условии $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a$. Тогда

$$F_1(a) = \max_{0 \leqslant x \leqslant a} f_1(x),$$

$$F_n(a) = \max_{0 \leqslant x \leqslant a} [F_{n-1}(a - x) - f_n(x)].$$

Рассматриваются два приложения описанного метода: к задачам, возникающим в нефтяной промышленности, и к одной задаче о распределении продукции. И. А. Ибрагимов

3134. Программирование при неопределенных условиях. Вото (Programming under conditions of uncertainty. Votaw D. F., Jr), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., Washington, 1955. 1, s. a., 187—195 (англ.)

Пусть c_{ij} — производительность i-го рабочего ($i = 1, \ldots, n$) на j-й работе ($j = 1, \ldots, n$). Требуется так распределить рабочих, чтобы средняя производительность была максимальной. Практически, информация о c_{ij} никогда не бывает полной (это и создает неопределенность условий). Автор указывает, что различные предположения о c_{ij} приводят к тем или иным задачам линейного программирования.

В заключение приводится задача об эвакуации городского населения. Л. И. Горьков

3135. Метод вычисления оптимальных размеров запаса и времени доставки. Уайтин, Янгс (A method for calculating optimal inventory levels and delivery time. Whitin T. M., Youngs J. W. T.), Naval Res. Logist. Quart., 1955, 2, № 3, 157—173 (англ.)

Изучается вопрос об определении оптимального уровня запасов продукции с крайне низким спросом, отдаваемой в прокат. В момент времени $t = 0$ запас изделий данного рода равен S единицам ($S \geqslant 0$). Предполагается, что спрос на это изделие наблюдается в моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$; $x(t)$ — случайная величина, означающая спрос в момент t. Распределение $x(t)$ при каждом t предполагается пуассоновским с параметром λ. Пусть время доставки на склад новых изделий равно a, причем в момент времени $t + a$ на склад доставляются $x(t)$ изделий. Если C — стоимость хранения на складе одного изделия в течение дня, π — стоимость проката изделия в течение дня, $\Phi(S, \mu)$ — ожидаемый убыток, то

$$\Phi(S, \mu) = S[C - (\pi + C) P(S + 1, \mu)] - \mu[C - (\pi + C) P(S, \mu)],$$

где $\mu = a\lambda$, $P(S, \mu) = \sum_{k=S}^{\infty} e^{-\mu} \mu^k / k!$. Оптимальное значение $S = S_\mu$, минимизирующее $\Phi(S, \mu)$, определяется из условия $P(S_\mu, \mu) > C/(\pi + C) > P(S_\mu + 1, \mu)$. Приводятся таблицы значений S_μ и $\theta(\mu) = \min_S \Phi(S, \mu)$ для различных значений π, C и μ. В. В. Петров

3136. Использование симплекс-метода для решения задач линейного программирования. Нобл (The simplex method for solving linear programming problems. Noble Carl E.), Industr. Quality Control, 1957, **13**, № 9, 5—9 (англ.)

С помощью симплекс-метода решаются две задачи линейного программирования, возникающие в промышленности. И. Л. Канторович

3137. Коммерческое использование линейного программирования. Батчелор (A commercial use of linear programming. Batchelor James H.), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., Washington, 1955. 1, s. a., 103—116 (англ.)

Рассматриваются линейные ограничения, возникающие в задаче минимизации себестоимости m заказов (с погрузкой и перевозкой), которые могут быть выполнены на n предприятиях. С. С. Кислицын

3138. Простой алгорифм для отыскания максимальных потоков через сеть и его применение к задаче Хичкока. Форд, Фулкерсон (A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. Ford L. R., Fulkerson D. R.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 210—218 (англ.)

Приводится алгорифм для решения задачи о потоках в транспортных сетях (см., например, РЖМат, 1957, 8102) для случая целочисленных (или рациональных) пропускных способностей. Задача о перевозках (задача Хичкока) сводится к предыдущей задаче и к ней применяется построенный авторами алгорифм.

Отмечается эффективность применения алгорифма к обеим задачам. И. В. Романовский

3139. Динамическая транспортная модель. Келли (A dynamic transportation model. Kelley J. E., Jr), Naval. Res. Logist. Quart., 1955, 2, № 3, 175—180 (англ.)

Протяженную во времени задачу о перевозках автор сводит к так называемой задаче Хичкока—Купмена (задача о перевозках). И. В. Романовский

3140. Выбор решения при неполной определенности. I, II. Белман (Decision making in the face of uncertainty. I. Bellman Richard), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 3, 230—232; № 4, 327—332 (англ.)

Основная идея статей — при замене некоторых задач динамического программирования приближенными получается простое, интуитивно понятное решение — подкрепляется несколькими примерами

И. В. Романовский

3141. Динамическое программирование и численное решение вариационных задач. Белман (Dynamic programming and the numerical solution of variational problems. Bellman Richard), Operat. Res., 1957, 5, № 2, 277—288 (англ.)

Обзорная статья. Имеются опечатки.

3142. Динамическое программирование и многошаговые процессы решения стохастического типа. Белман (Dynamic programming and multistage decision processes of stochastic type. Bellman Richard), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., Washington, 1955. 1, s. a., 229—249 (англ.)

Доклад. Содержание: 1. Введение. 2. Несколько характерных многошаговых процессов решения стохастического типа: 2. 1. Распределение, 2.2. Оптимальная опись, 2. 3. Золотодобыча, 2. 4. Обучение, 2. 5. Детерминистская задача максимизирования. 3. Немного терминологии. 4. Принцип оптимальности. 5. Функциональные уравнения: 5. 1. Распределение, 5. 2. Оптимальная опись, 5. 3. Золотодобыча, 5. 4. Обучение, 5.5. Детерминистская задача максимизирования. 6. Последовательные приближения. 7. Приближение в пространстве действий — Монотонная сходимость. Библ. 13 назв. Р. Белмана. И. В. Романовский

3143. О численном решении задач динамического программирования. Дрейфус (Computational aspects of dynamic programming. Dreyfus Stuart E.), Operat. Res., 1957, 5, № 3, 409—415 (англ.)

Автор указывает на некоторые трудности, встречающиеся при численном решении задач динамического программирования, и намечает пути их разрешения.

Л. И. Горьков

3144. Понятие «задачи». Верхюлст (The concept of a «mission». Verhulst Michel), Naval Res. Logist. Quart., 1956, 3, № 1—2, 45—57 (англ.)

В первой части статьи автор приводит оффициальное военное определение понятия «задача» (mission), взятое из «Словаря военных терминов США», и анализирует его с целью дальнейших уточнений.

На основе этого анализа во второй части статьи в рамках теории игр строятся математические модели «задачи». И. А. Ибрагимов

3145. Что такое система? Хог (What is a system? Hoag Malcolm). Operat. Res., 1957, 5, № 3, 445—447 (англ.)

На примерах из военной практики автор объясняет, не давая точного определения, что следует понимать под понятием «операция» («система») в исследовании операций. В. Н. Соколова

3146. Система входа-выхода — ее природа и употребление. Экстейн (The input-output system — its nature and use. Eckstein O). Econ. activity analysis. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1954, 43—78) (англ.)

Объяснительная статья. R. Solow

Перевод из Math. Revs, 1956, 16, № 6, 606.

3147 К. Механизм экономических систем. К проблеме экономической устойчивости с точки зрения системы инженерного контроля. Тастин (The mechanism of economic systems. An approach to the problem of economic stabilisation from the point of view of control-system engineering. Tustin Arnold., Harvard University Press, Cambridge, 1953, xi+161 pp. 5.00 doll.) (англ.)

Явное применение динамических систем сделалось за последние два десятилетия обычным в эконометрике. Однако до сих пор еще трудно найти хорошее и доступное введение в анализ таких систем, даже в сравнительно простом линейном случае. В электротехнике, однако, линейные системы применяются и изучаются в значительно больших масштабах. Поэтому следует считать превосходной идею автора, профессора электротехники, давно интересующегося экономическими проблемами, дать очерк о некоторых из методов, общепринятых в его сфере деятельности, в применении к экономическим явлениям. Он сосредоточил свое внимание в особенности на макроэкономической устойчивости и ее аналогах в электродинамической теории контролируемых систем.

В краткой гл. I автор указывает, что поддержание устойчивости при полной занятости может быть лишь частично основано на эмпирических моделях, отражающих довоенные условия, даже если принять во внимание и существенную нелинейность. Автор подчеркивает (пожалуй, даже слишком) важность вопросов нелинейности в современной экономической динамике, но не обещает существенной помощи, за исключением линейных случаев. В гл. II рассматриваются некоторые макроэкономические модели, их интерпретация в технических терминах (таких, как, например, «обратная связь»), а также эквивалентные им физические системы. Гл. III посвящена техническому подходу к вопросам анализа поведения системы. После перечисления типичных различий между экономическими и техническими проблемами автор переходит к тщательному, главным образом — графическому, изложению гармонического анализа, приводящему к критерию устойчивости Найквиста и к распространению его на основные типы колебательных систем. При этом подчеркивается важность точной спецификации распределенных лагов. Меньше внимания уделяется методам «временных рядов» не только потому, что они уже хорошо известны экономистам, но и потому, что ими недостаточно освещаются особенности решения задач (хотя они и более подходят для экстраполяции). Автор пользуется графическими методами, считая их наиболее эффективными при произвольном входе в систему.

Гл. IV содержит ряд соображений по теоретической экономике. Автор развивает квантовую теорию вложений, согласно которой общий объем вложений определяется нормой процента и рассеянием ожидаемой вероятности благоприятной ситуации индивидуального вложения. Тщательно разработана схема экономической взаимосвязи, включающая и черты нелинейности. Следуя недавним работам Гикса и Гудвина, автор мало говорит о влиянии цен на устойчивость, хотя было бы интереено увидеть, как увязываются цены с проанализированной ранее динамической системой.

В гл. V, VI и VII рассматривается преимущественно использование физических аналогов, в частности, для того, чтобы избежать применения итеративных методов, часто неизбежных при решении нелинейных задач. Неясно, однако, превосходят ли моделирующие устройства быстродействующие цифровые машины, революционизирующие в настоящее время вычислительные методы.

Основные ограничения в рассматриваемой книге — поверхностное изложение нелинейности и почти полное пренебрежение случайными отклонениями — сознательно наложены автором и являются, по-видимому, результатом его замечательной решимости до конца выдерживать свою точку зрения. Автор не обнаруживает какого-либо незнания сложности экономических явлений, что так часто портит высказывания инженеров и физиков на экономические темы. В целом — это

очень полезная и будящая мысли работа, заслуживающая серьезного внимания как экономистов, так и более широких кругов читателей, интересующихся данной темой. H. S. Houthakker

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 56

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

3148. Несмещенные страховые премии для постоянно возобновляемого страхования. Конолли (Unbiased premiums for Stop-Loss reinsurance. Connolly B. W.), Skand. aktuarietidskr., 1955, № 3—4, 127—134 (англ.)

Пусть x — общая сумма, которую страховая организация обязана выплатить в данном году по страховым обязательствам, и пусть c — ассигнованная для этой выплаты сумма. Дополнительные расходы на выплату по страховым обязательствам равны

$$z = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant c \\ x - c, & \text{если } x > c. \end{cases}$$

Если x — случайная величина с плотностью $f(x, \tau)$ (τ — неизвестный параметр), то средние дополнительные расходы будут равны

$$P = P(c, \tau) = Mz = \int_0^\infty (x - c) f(x, \tau)\, dx.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины, равные суммам выплат за предшествующие годы. Требуется найти такую функцию $\bar{P}(x_1, \ldots, x_n)$, для которой $M\bar{P} = P$ называют несмещенной страховой премией на текущий год. Вайда (Vajda S., Skand. aktuarietidskr., 1951, **34**, 158—175) предложил в качестве $\bar{P}$ выбирать $\bar{P}_1 = P(c, t)$, где $t(x_1, \ldots, x_n)$ — несмещенная оценка для τ. Автор на конкретных примерах исследует свойства этой оценки и показывает, что $\bar{P}_1$, как правило, смещена в пользу страховой организации. Предполагается оценка $\bar{P}_2 = P(c', t)$, где c' подбирается так, чтобы $\bar{P}_2$ была несмещенной. Оценка P_2 сравнивается с $\bar{P}_1$. Л. Н. Большев

3149. Закон выживания, для которого среднее значение пожизненной ренты может быть выражено через временную ренту. Руфенер (Überlebensordnungen, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen lässt. Rufener Ernst), Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, **55**, № 3, 423—473 (нем.)

3150. Новые основы для непогашаемого страхования на случай болезни в Швеции. Маттссон (New bases for non-cancellable sickness insurance in Sweden. Mattsson Petrus), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 3—4, 198—215 (англ.)

3151. Об оптимальном характере правила (s, S) в теории оборотных фондов. Дворецкий, Кифер, Вольфовиц (On the optimal character of the (s, S) policy in inventory theory Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.), Econometrica, 1953, **21**, 586—596 (англ.)

Правило (s, S) определения оборотных фондов заключается в том, что заказ на пополнение оборотных фондов дается тогда и только тогда, когда текущий запас их x падает ниже s, и увеличение их прекращается, когда запас доходит до $S \geqslant s$. Эти правила (s, S) получили на практике широкое распространение и привлекли внимание теоретиков (Arrow, Harris, Marschak, Econometrica, 1951, **19**, 250—272). Авторы в своей более ранней статье (там же, 1952, **20**, 187—222) показали, что как раз в элементарном случае оптимальным правилом не должно быть обязательно (s, S). Теперь они получили необходимые и достаточные условия для того, чтобы правило (s, S) было оптимальным в одном простом варианте проблемы оборотных фондов: ожидаемые потери имеют следующее выражение:

$$V(x, y) = cy + A[1 - F(y)] + K_{yx},$$

где $c > 0$ — расходы на единицу имеющегося запаса; $F(z)$ — известная функция распределения спроса, так что $1 - F(y)$ является вероятностью того, что не весь спрос будет удовлетворен, $A > 0$ — неустойка за невыполнение обязательств, независимо от размера обязательств; $K_{xy} = 0$, если $y = x$, $K_{yx} = K > 0$, если $y > x$ — постоянная стоимости заказа, независимо от величины заказа. Авторы характеризуют классы функций распределения F, для которых правило (s, S) является оптимальным — a) при заданных c, A, K; b) при заданных c, A и при всех K; c) при заданных A, K и при всех c; d) при заданных c, K и при всех A; e) при любом выборе c, A, K. Не все результаты могут быть здесь приведены. Например, класс b) состоит из всех F таких, что $V(x, x)$ является U-образной или монотонно неубывающей функцией. Класс e) состоит из всех F, вогнутых для $y \geqslant 0$. В статье приводятся детальные расчеты и чертежи. R. Solow

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 333.

3152. Замечание к проблеме запаса. Морен (Note on an inventory problem. Morin François), Econometrica, 1955, **23**, № 4, 447—450 (англ.)

Рассматривается нахождение наивыгоднейшего плана товарного производства на данный период времени $(0, T)$, удовлетворяющего определенным требованиям. Математически задача состоит в нахождении функции $X(t)$, дающей минимум

$$C = \int_0^T [\alpha(X - S) + f(X')]\, dt$$

и удовлетворяющей следующим требованиям: 1) $X(0) = h_0$, 2) $X(T) = S(T)$, 3) $X(T) \geqslant S(T)$ для любого $0 \leqslant t \leqslant T$, 4) $X(t)$ — непрерывная, неубывающая функция, имеющая кусочно-непрерывную производную, где h_0 — некоторое заданное число, $S(t)$ — заданная функция.

Рассматривается решение задачи для случаев: 1) $\alpha = 0$, $f(X')$ — произвольная функция, 2) $\alpha \neq 0$, $f(X') = aX'^2 + bX' + c$.

Она решается применением вариационного исчисления. В. Н. Соколова

3153. Некоторые модели запаса и их применение. Наддор (Some models of inventory and an application. Naddor Eliezer). Manag. Sci., 1956, **2**, № 4, 299—312 (англ.)

В зависимости от способа потребления некоторого товара строятся 4 математические модели для определения оптимального уровня запаса этого товара. Потребность в товаре предполагается случайной величиной.

В моделях, где плотность распределения $f(r)$ — непрерывная функция, математическое ожидание затрат, связанных с избытком и недостатком товара, определяется по формуле

$$C(S) = \int_0^S c_1 (S - r) f(r)\, dr + \int_S^\infty c_2 (r - S) f(r)\, dr,$$

где c_1 (c_2) — затраты в единицу времени на каждую единицу избытка (недостатка), S — уровень запаса, S_0 — оптимальное значение S, находится обычными методами анализа; t — длина отчетного периода.

Приводятся примеры промышленного применения этих моделей. В. Н. Соколова

3154. Анализ систем и/или. Практический смысл. Ролоф (System analysis and/or common sense. Rolof Yngve), Naval Res. Logist. Quart., 1956, 3, № 1—2, 11—18 (англ.)

Автор дискутирует роль научных методов при составлении и оценке военных систем. Резюме автора

3155. Определение избыточности в серии изображений. Глованцкий (Determination of redundancies in a set of patterns. Glovazky Arthur), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 4, 151—153, 155 (англ.)

Рассматриваются серии черно-белых изображений, отличающихся друг от друга расположением отдельных черных и белых элементов (ячеек). Каждое из таких изображений может быть передано путем поэлементной развертки. Если направление развертки задано, то можно построить диаграмму кода, используемого для передачи этих изображений. По этой диаграмме легко найти номера ячеек, являющихся избыточными. Такими являются те ячейки, в которых нет узлов, т. е. переходов на диаграмме от одного изображения к другому. Такие ячейки можно исключить из передачи. Другим методом нахождения избыточных ячеек является построение цифровой таблицы кода. В такой таблице черные ячейки обозначаются цифрой 1, а белые — цифрой 0, причем полученные для всех изображений двоичные числа располагаются в порядке убывания. Путем несложных операций можно определить по такой таблице номера избыточных ячеек. Число избыточных ячеек зависит от принятого закона развертки. Однако при любой развертке число избыточных ячеек не меньше $C+P+1$, где C — число ячеек, а P — число различных изображений в серии. Л. М. Ф.

3156. Статистические проблемы электронного умножителя. Яноши Л., Ж. эксперим. и теор. физики, 1955, 28, № 6, 679—694

Пусть $P_N^{(k)}(\nu)$ — вероятность образования ν электронов вторичной эмиссии на N-м диноде электронного умножителя, обусловленную падением на первый динод k электронов. Функция $P(\nu)=P_1^{(1)}(\nu)$ описывает вероятность вылета данного числа электронов в элементарном акте вторичноэлектронной эмиссии. Функция $P_N(\nu)=P_N'(\nu)$ дает распределение амплитуд импульсов на выходе умножителя, имеющего N динодов.

Излагаются методы определения одной из двух последних функций, если известна или задана другая.

Начиная со случая, когда задано $P(\nu)$ и пользуясь теорией разветвляющихся (или каскадных) случайных процессов, введем производящую функцию $G_N(u)$ распределения $P_N(\nu)$:

$$G_N(u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u^{\nu}P_N(\nu).$$

Очевидно, производящей функцией распределения $P(\nu)$ является $G_1(u)$, которую мы будем обозначать в виде $G(u)$.

Нетрудно убедиться в том, что производящие функции распределений вероятности, соответствующих различным каскадам умножения, связаны между собой следующей рекуррентной формулой:

$$G_N(u)=G_k[G_{N-k}(u)],\ \text{причем,}\ G_0(u)=u.$$

Зная $P(\nu)$, а следовательно, и функцию $G(u)$, можно посредством этой формулы найти $G_N(u)$, а затем, пользуясь комплексным интегрированием, и искомую функцию

$$P_N(\nu)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{u=0}u^{-\nu-1}G_N(u)\,du.$$

Для упрощения расчетов применим замену переменных $u=e^v$, $G_N(u)=\exp\{H_N(v)\}$ и получим для логарифмической производящей функции H_N рекуррентную формулу

$$H_N(v)=H_k[H_{N-k}(v)],$$
$$H_0(v)=v$$

и новое выражение:

$$P_N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(v)}\exp\{-v\nu+H_N(v)\}\,dv.$$

Обозначая через $P^*(\nu)$ первый член асимптотического разложения функции $P_N(\nu)$, имеем:

$$\nu=H_N(v),$$
$$P_N(\nu)\sim P_N^*(\nu)=\exp\{-v\nu+H_N(v)\}\Big/\sqrt{2\pi H_N''(v)}\,.$$

Таким образом, задаваясь $P(\nu)$ и, следовательно, $H_1(v)$ и определив методом итераций $H_N(v)$, а затем ее первую и вторую производные, можно получить и искомую функцию $P_N(\nu)$ в параметрическом виде.

Решение обратной задачи умножителя, т. е. определение $P(\nu)$, ведется аналогичным образом с применением разработанного автором обобщенного процесса итерации. Г. Э. Левин

3157. Методы вычисления вероятности в исследовании вторичной электронной эмиссии. Такач (Valószínűségszámitási módszer a szekunder elektronemisszio vizsgálatára. Takács Lajos), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. oszt. közl., 1956, 6, № 2, 199—211 (венг.)

Приводятся методы расчета вероятности p_j вылета j электронов с первого динода электронного умножителя (ЭУ), если известна вероятность P_j вылета j электронов с последнего динода, или, что то же самое, распределение амплитуд импульсов напряжения на выходе умножителя. При этом предполагается, что коэффициенты вторичноэлектронного умножения всех динодов и каскадные напряжения одинаковы. Предполагается, что динодная электронная оптика обеспечивает полный сбор электронов с динода на следующий динод. Предполагается также, что числа вторичных электронов, выбиваемых с данного динода разными первичными электронами, не связаны между собой.

Указанные методы расчета, пригодные и для решения обратной задачи, отличаются от методов, обычно применяемых в теории ветвящихся (или каскадных) случайных процессов. При применении последних к ЭУ для определения вероятности $P(\nu_n=j)$ вылета с n-го динода вторичных электронов в количестве $j=\nu_n$ (при одном электроне, падающем на вход ЭУ) пользуются производящими функциями

$$u_n(t)=E\{t^{\nu_n}\}=\sum_{j=0}^{\infty}P\{\nu_n=j\}\,t^j,$$

где E — математическое ожидание.

Эти функции связаны между собой рекуррентной формулой

$$u_{n+1}(t)=u[u_n(t)],\ \text{где}\ u=u_1,\ \text{а}\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

определяющей связи между вероятностями вылета данного количества вторичных электронов с различных динодов.

Пользуясь этими функциями, Яноши дал (реф. 3156) практически применимый метод приближенного вычисления указанных вероятностей.

С целью упрощения расчетов в данной работе используются вместо функций $u_n(t)$ такие параметры распределений вероятностей, относящихся к различным каскадам умножения, которые связаны между собой значительно проще, чем производящие функции.

В качестве таких параметров можно использовать полуинварианты

$$\Lambda_s = \left[\frac{d^s f_n(\omega)}{d\omega^s}\right]_{\omega=0},$$

где $f_n(\omega) = \log u_n(e^{\omega})$.

Автор, однако, пользуется преимущественно s-биномиальными моментами чисел ν_1 и ν_2 вторичных электронов, покидающих первый и n-й диноды

$$b_s = E\left\{\binom{\nu_1}{s}\right\} = \sum_{j=s}^{\infty}\binom{j}{s}p_j,$$

$$B_s = E\left\{\binom{\nu_n}{s}\right\} = \sum_{j=s}^{\infty}\binom{j}{s}P_j.$$

Из этих выражении можно показать, что

$$p_j = \sum_{s=j}^{\infty}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}b_s.$$

$$P_j = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{s-j}\binom{s}{j}B_s.$$

Таким образом, зная распределение вероятностей, можно легко найти его биномиальные моменты, и наоборот.

В связи с этим, задача установления связи между p_j и P_j может быть сведена к определению зависимостей между b_s и B_s. Последнее может быть сделано с помощью производящих функций, если учесть, что

$$b_s = \frac{1}{s!}\left(\frac{d^s u(t)}{dt^s}\right)_{t=1}; \quad B_s = \frac{1}{s!}\left(\frac{d^s u_n(t)}{dt^s}\right)_{t=1},$$

а также учесть следующее свойство производящих функций:

$$u[u_n(t)] = u_n[u(t)].$$

В самом деле, из последнего уравнения следует:

$$\left(\frac{d^s u[u_n(t)]}{dt^s}\right)_{t=1} = \left(\frac{d^s u_n[u(t)]}{dt^s}\right)_{t=1}.$$

Дифференцируя и заменяя производные через b_s и B_s, получим уравнения, связывающие эти моменты.

Таким образом, определив P_j путем измерения распределения амплитуд импульсов напряжения на выходе умножителя и вычислив затем s-биномиальные моменты B_s, мы должны по последним вычислить моменты b_s, чтобы рассчитать далее интересующие нас вероятности для элементарного акта вторично-электронной эмиссии. За отсутствием данных эксперимента такой расчет не производился. Г. Э. Левин

3158. Численные примеры эволюционных процессов. Барричелли (Esempi numerici de processi di evoluzione. Barricelli Nils Aall), Methodos, 1954, 6, 45—68) (итал.)

3159. Теория экспериментального определения оптимальных нелинейных систем. Бос (A theory for the experimental determination of optimum nonlinear systems. Bose Amar G.), IRE Convent. Rec., 1956, 4, № 4, 21—30 (англ.)

Работа посвящена описанию способов задания нелинейной системы. Укажем основные идеи работы, несколько уточнив с математической точки зрения терминологию автора. Пусть $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ — стационарный процесс. Под нелинейной системой подразумевается оператор, переводящий процесс $\xi(t)$ в стационарный процесс $\{\eta(t), -\infty < t < \infty\}$ такой, что 1) при любом t_0 значение $\eta(t_0)$ функционально зависит от значения $\xi(t)$, $-\infty < t \leqslant t_0$ и 2) процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ стационарно связаны. Очевидно, что для описания нелинейной системы достаточно задать функционал, сопоставляющий каждой выборочной функции процесса $\xi(t)$, $-\infty < t \leqslant 0$ значение y выборочной функции $\eta(0)$.

Как указывает автор, в неопубликованном докладе Винера предлагалось характеризовать траектории $\xi(t)$, $-\infty < t \leqslant 0$ набором случайных величин

$$\lambda_n = \int_{-\infty}^{0} l_n(-\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau,$$

где $l_n(x)$ — полная ортонормированная система функций Лаггера,

$$l_n(x) = \frac{1}{n!}e^{x/2}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Если процесс $\xi(t)$ — белый шум (т. е. гауссовский процесс с независимыми значениями), то нетрудно показать, что величины λ_n являются гауссовскими и независимыми. Нелинейная система задается теперь как функция

$$\eta_n(0) = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots).$$

Для простоты автор ограничивается случаем, когда F зависит лишь от конечного числа переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Пусть $h_n(x)$ — ортонормированная система полиномов Эрмита

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2^n n!\,\pi^{1/2})^{1/2}}e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

Система функций

$$\psi_{i_1, \ldots, i_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{-x_k^2/2}h_{ik}(x_k)$$

является полной системой функций в n-мерном пространстве и ввиду этого

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum A_{i_1, \ldots, i_n}\psi_{i_1, \ldots, i_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

В качестве основных характеристик нелинейной системы Винер предложил брать эти коэффициенты $A_{i_1, \ldots, i_n}$. Нетрудно показать, что если $\xi(t)$ — белый шум, то

$$A_{i_1, \ldots, i_n} = M\left\{F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\prod_{i=1}^{n}h_{ik}(\lambda_k)\right\}, \qquad (1)$$

и ввиду этого для заданной нелинейной системы коэффициенты $A_{i_1, \ldots, i_n}$ можно определить без труда экспериментальным образом. При более общих предположениях о входном сигнале $\xi(t)$ формулы для $A_{i_1, \ldots, i_n}$ будут значительно сложнее. Ввиду этого автор предлагает взять в качестве $\psi_k(x_1, \ldots, x_k)$ функции, равные 1 внутри некоторого n-мерного кубика k и 0 — вне его,

так чтобы кубики не перекрывались и в сумме давали всю область изменений величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В этом случае величины $\psi_{k_1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $\psi_{k_2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ будут всегда ортогональны и поэтому можно получить простые формулы типа (1) для коэффициентов наилучшего приближения $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ линейными комбинациями вида

$$\sum A_i \varphi_{k_i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

В работе также обсуждаются способы реального физического осуществления системы, заданной коэффициентами A_i. Р. Л. Добрушин

3160. Теория электрических цепей в применении к дискретным процессам Маркова. Ситлер (Systems analysis of discrete Markov processes. Sittler R. W), IRE Trans. Circuit Theory, 1956, 3, № 4, 257—266 (англ.)

Цепи Маркова (ц. М.) с k состояниями сопоставляется электрическая схема с k узлами. p_{ij} (элемент матрицы перехода) истолковывается как интенсивность электрического сигнала при $t = n+1$ в j-ом узле, если при $t = n$ на i-ом узле был подан единичный сигнал. Таким образом каждую задачу на ц. М. можно решить способами, применяемыми в теории электрических цепей (производящие функции $\sum_{n=0}^{\infty} p_i(n) z^n$, постепенное освобождение от обратной связи). По мнению автора, такой подход проще и нагляднее обычных методов теории ц. М. Это иллюстрируется несколькими частными примерами; указывается также путь к более общим свойствам ц. М. (предельная теорема, эргодическое свойство).

Г. К. Энгелис

3161. Проблема обратного заключения в биологической статистике. Вебер (Das Rückschlussproblem in der biologischen Statistik. Weber Erna), Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin, 1954. Berlin, 1956, 81—87 (нем.)

Излагается обычная методика получения доверительного интервала для оценки вероятности по частоте. Попутно излагаются некоторые вопросы, связанные с приложением этой методики к биологическим задачам. Н. В. Смирнов

3162. Статистические исследования о многоугольниках и многогранниках. Мачинский (Considérations statistiques sur les polygones et les polyèdres. Matschinski Matthias), Publ. Inst. Statist. Univ., Paris, 1954, 3, 179—201 (франц.)

3163. Теория информации и приемочный контроль. Ротстейн (Information theory and quality control. Rothstein Jerome), IRE Convent. Rec., 1956, 4, № 4, 3—11 (англ.)

Из резюме автора: «Описывается фундаментальная аналогия между системой передачи информации и системой производства со следующим соответствием между терминами: источник сообщений — спецификации в производственном задании, передатчик — способы переработки сырья, канал связи — объекты, допускающие измерения величин, специфицированные в производственном задании, источник шумов — причины для браковки, приемник — система измерений при приемном контроле, множество полученных сообщений — совокупность произведенных изделий с измеренными статистическими характеристиками». Подобная аналогия указывается также для системы измерения физической величины. Библ. 84 назв.

Р. Д. Добрушин

3164. Функция корреляции синусоидального сигнала и шума после предельного ограничителя. Мак-Фадден (The correlation function of a sine wave plus noise after extreme clippings. McFadden J. A.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 82—83, 97 (англ.)

Выводится простая формула для функции корреляции смеси сигнала и шума $x(t) = y(t) + A \sin \omega t$ после предельного ограничителя, если на вход поданы гауссовский коррелированный шум $y(t)$ и синусоидальный сигнал $A \sin \omega t$ с малой амплитудой A. Предельный ограничитель осуществляет преобразование $x(t)$ типа:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } x(t) \geqslant 0, \\ -1 \text{ при } x(t) < 0. \end{cases}$$

Используя простые преобразования двумерной нормальной плотности вероятности $(y(t), y(t+\tau))$ с нулевыми средними, постоянными дисперсиями σ^2 и функцией корреляции $\rho(\tau)$, автор выводит выражение функции корреляции для $\xi(t)$ вида:

$$r(\tau) = (2/\pi)\left\{\arcsin\left[\frac{\rho(\tau) + a^2 \cos \omega\tau}{1+a^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} a^4 (1-\rho^2(\tau))^{-3/2} (\cos \omega\tau - \rho(\tau)) (2 - \rho(\tau) \cos \omega\tau - \right.$$
$$\left. - \rho^2(\tau)) + O(a^6)\right\}, \qquad \text{где } a = A/\sigma\sqrt{2}.$$

Б. С. Флейшман

3165. Оптимальная, линейная дискретная фильтрация сигналов, содержащих неслучайные компоненты. Джонсон (Optimum, linear, discrete filtering of signals containing a nonrandom component. Johnson Kent R.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 49—55, 97 (англ.)

Общая теория оптимальной фильтрации неприменима в рассматриваемом случае. Распространение теории на случай неслучайных сигналов Заде и Рагазини использует лишь фильтры непрерывного тона, что часто не имеет места на практике. В работе дается построение дискретного варианта фильтра Заде и Рагазини. На вход поступает сигнал в виде суммы неслучайной полиномиальной и случайной стационарной компоненты на фоне стационарных шумов. Выводятся приближенные формулы для мощности шума на выходе оптимального фильтра. Рассматривается важный частный случай белого шума. Обсуждается вопрос о возможности рассмотрения случая неслучайной неполиномиальной компоненты сигнала.

Б. С. Флейшман

3166. Заметка о двух сигнальных алфавитах. Слепян (A note on two binary signaling alphabets. Slepian David), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 84—86, 98 (англ.)

Обобщается код Хемминга, корректирующий одиночные ошибки. Код Рида—Мюллера рассматривается как код с дополнительными проверочными событиями. Рассмотрение этих кодов сопровождается построением связанных с ними детекторов максимального правдоподобия. Пропускная способность первого кода приближается к единице с уменьшением длины кодовой комбинации и поэтому приближение к шенноновской пропускной способности возможно лишь в тривиальных случаях. Возможность приближения к шенноновской пропускной способности для второго кода не выяснена. n позиций рассмотренных кодов разбиваются на две группы, из которых k заполняются информационными бинарными символами a_i, а p — проверочными b_j. При этом вторые получаются из первых линейными преобразованиями по модулю 2:

$$b_j \equiv \sum_{i=1}^{k} c_{ij} a_i \quad (j = 1, 2, \ldots, p) \bmod 2,$$

причем для первого кода $k \geqslant 2^p - \sum_{i=0}^{3} C_p^i$, а для второго $k = \sum_{i=0}^{r} C_m^r$. Специальный выбор матрицы

$C = \|c_{ij}\|$ обеспечивает, в частности, для первого кода при $n > 2^p - 1$ коррекцию $2^p - 1$ единичных ошибок, а при $2^p - \sum_{i=0}^{3} C_p^i \leqslant n \leqslant 2^p - 1$ коррекцию всевозможных единичных ошибок и обнаружение двойных ошибок. Б. С. Флейшман

3167. Применение выборочного метода при оценке телефонной нагрузки (траффика). Штермер (Anwendung des Stichprobenverfahrens beim Beurteilen von Fernsprechverkehrsmessungen. Störmer Horand), Arch. Elektr. Übertragung, 1954, 8, 439—446 (нем.)

3168. Норберт Винер (Norbert Wiener), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 2, 47—48 (англ.)

Биография Норберта Винера сопровождается его высказыванием на тему: «Что такое теория информации». Он указывает на опасность слишком универсальных применений этой теории в ее современном состоянии и призывает для ее развития вернуться к исходной точке — общей статистической концепции связи.

Он видит опасность слишком большой специализации науки не в том, что изучаются специальные проблемы, а в том, что не замечаются важные новые идеи в смежных областях. Б. С. Флейшман

См. также: 2874

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев*

3169. Икосаэдр и его группа. Лёйман (Das Ikosaeder und seine Ikosaedergruppe. Leumann H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 5, 213—218 (нем.)

3170. Тензорные интегралы. Фейбиан (Tensor integrals. Fabian William), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1957, 10, № 4, 145—151 (англ.)

Ставится задача: по данному тензору $T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ в пространстве аффинной связности найти такой тензор $X^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$, ковариантная производная от которого вдоль данной линии L равнялась бы тензору T:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(X^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}\right) = T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}. \qquad (1)$$

Решение такого уравнения называется тензорным интегралом и обозначается $\int T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}\,\delta t$. Если кривая L гладкая и компоненты тензора T непрерывны, то интеграл от него существует и непрерывен вдоль L. Если $X^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} = A^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ — какое-то частное решение (1), то общее решение получается по формуле $X = A - P$, где $P = P^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ — любой тензор такого же типа, параллельно переносимый вдоль L. Отсюда выводится, что $\int_{t_0}^{t_1} T\,\delta t = (A)_{t_1} - (P)_{t_1}$, где $(P)_{t_1}$ — тензор, полученный из $(A)_{t_0}$ параллельным переносом из точки t_0 в точку t_1. Устанавливается формула тензорного интегрирования по частям и доказывается, что m-й интеграл от тензора W имеет вид:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{t_0}^{z}(z-t)^{m-1}W\,\delta t.$$

Результаты используются для доказательства разложения тензора в ряд Тейлора:

$$(T)_z = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-t_0)^m}{m!}\,U_z^{(m)},$$

где $U_z^{(m)}$ — тензор, полученный параллельным переносом $\left(\frac{\delta^m T}{\delta t^m}\right)_{t_0}$ из t_0 в точку t. Г. И. Кручкович

3171. Об интегрировании уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Вотлинг (Sur l'intégration de $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Wottling A.), Rev. math. spéc., 1957, 67, № 11, 573—574 (франц.)

Задача решается векторно. P, Q, R — данные функции x, y, z, определяющие в каждой точке $M(x, y, z)$ вектор V с началом в точке M и с составляющими P, Q, R по прямоугольным осям. Векторным методом отыскивается интегрирующий множитель. С. И. Зетель

3172. Некоторые свойства кратчайшей линии, соединяющей любое число данных точек плоскости. Прокофьев В. М., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, 101, 63—84

Подробно рассмотрены свойства кратчайшей линии (минимальной сети). Задача представляет далеко идущее обобщение задачи Торичелли для трех точек. Вводится ряд определений (тупики, колена, узлы линейной сети). Приведены примеры построения минимальной сети для четырехугольника с узлами при вершинах, меньшими чем 120, для правильного пятиугольника и для шестиугольника определенного вида. С. И. Зетель

3173. Синтетический подход к теории огибающих. Амир-Моэз (Synthetic approach to the theory of the envelope. Amir-Moéz A. R.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 265—268 (англ.)

Разбирается три примера синтетического нахождения огибающей и приводится десять примеров для самостоятельных упражнений в отыскании огибающей. Н. В. Наумович

3174. Актуальность концепции римановых пространств. Либуа (Actualité de la conception riemanienne de l'espace. Libois P.), Bull. Soc. math. Belg., 1956, 8, № 1, 31—42 (франц.)

Статья имеет целью показать актуальность развития идеи Римана для современной физики. Анализируя развитие понятия физического пространства и начиная от ньютоновского постулата, утверждающего, что это пространство — евклидово, автор рассматривает основные идеи Пуанкаре, Минковского и Эйнштейна, приводящие к 4-мерному пространству-времени. Показывается, каким образом развитие учения об электромагнитном поле делает необходимым рассмотрения таких многообразий, плоских, с сигнатурой метрики типа (+++−). Исследуется вопрос о том, как при рассмотрении гравитации делается необходимым обобщение пространства Минковского, которое приводит к римановым многообразиям V_n, геодезические линии которых определяют физическую картину распространения частиц и света. Взаимозависимость и неотделимость длин и длительностей в теории относительности приводят к 4-мерному физическому пространству.

Далее анализируется физическое понятие твердого тела, рассмотренное Ланжевеном (Langevin, La physique depuis 20 ans, Paris, G. Doin, 1923) с детерминистской точки зрения, и поведение элементарной частицы в общей теории относительности. Рассмотрение теории волн и корпускулярной теории приводят к необходимости модифицировать понятие физического пространства. Автор анализирует относящиеся сюда идеи Картана и Вейля.

Рассматривая физическое пространство как совокупность физических феноменов, автор приходит к обобщениям римановых пространств — конформным, аффинным и проективным многообразиям и пространствам более чем четырех измерений. А. З. Петров

3175 К. Понятие пространства в геометрии. Отчет о сессии Математического исследовательского института им. Римана. Изд. Нас, Шрёдер (Der Begriff des Raumes in der Geometrie. Bericht v. d. Riemann—Tagg d. Forschungsinst. f. Mathematik. Hrsg. Naas Josef, Schröder Kurt (Schriftenreihe Forschungsinst. Math. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, № 1). Berlin, Akad.-Verl., 1957, 317 S., ill., 38 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 18, 1264 (нем.)

3176 К. Основания геометрии. Гильберт (Grundlagen der Geometrie. 8. Aufl. Hilbert David. Stuttgart, Teubner, 1956, VII, 251 S., 13.40 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 37, 2564 (нем.)

3177 К. Избранные геометрические задачи, предложенные на разных конкурсах (результаты и пояснения к решениям). Книга для учителя и ученика. Со сборником таблиц, имеющих большой интерес для геометрии. Вальe-Кольянтес (Selección de problemas geométricos propuestos en diversas oposiciones (resueltos y razonados, al alcance de todos). Libro del profesor y del alumno. Con una colleción de tablas de gran interés geométrico. Valle Collantes Francisco. La Coruña, Moret, 1957, 283 p., 80 ptas), Bibliogr. hisp., 1957, 16, № 6, 148 (исп.)

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3178. О точках Брокара. Тебо (Sur les points de Brocard. Thébault V.), Mathesis, 1957, 66, № 1—3, 75—77 (франц.)

Приводятся некоторые метрические соотношения, связанные с точками Брокара, например,

$$\overline{G\Omega}^2 + \overline{G\Omega'}^2 + \overline{GO}^2 = \overline{O\Omega}^2 = \overline{O\Omega'}^2,$$

где G — центр тяжести треугольника, Ω, Ω' — точки Брокара, O — центр описанного круга, т. е. сумма квадратов расстояний от центра тяжести до центра описанного круга и до каждой из точек Брокара равна квадрату расстояния от точки Брокара до центра описанного круга. С. И. Зетель

3179. О замечательных точках треугольника. Бланшар, Экке (Sur des points remarquables du triangle. Blanchar R., Hecquet J.), Mathesis, 1957, 66, № 1—3, 71—72 (франц.)

Доказывается:

1) Точка с барицентрическими координатами $\sin 4A$, $\sin 4B$, $\sin 4C$ является дополнительной к точке Жергона конического сечения, вписанного в $\triangle ABC$ и центром которого является трилинейный полюс медианы четырехсторонника, образованного треугольником, вершины которого лежат в точках касания конического сечения к сторонам $\triangle ABC$, и трилинейной полярой центра круга, описанного около $\triangle ABC$.

2) Если ω — центр первой окружности Лемуана, то точка с барицентрическими координатами $\sin 4A$, $\sin 4B$, $\sin 4C$ есть гармонически сопряженная точка с нормальными координатами $a^2 \cos A$, $b^2 \cos B$, $c^2 \cos C$ относительно центра описанной окружности и точки ω. Н. В. Наумович

3180. Новые планиметрические предложения о многоугольниках Реннер (Neue planimetrische Vielecksätze. Renner Chr.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 2, 69—73 (нем.)

На каждой стороне четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, строятся равнобедренные прямоугольные треугольники. Отрезки, соединяющие вершины треугольников, построенных на противоположных сторонах: 1) проходят через точку пересечения диагоналей; 2) перпендикулярны. между собою и делят углы между диагоналями пополам; 3) равны между собой; 4) каждый из этих отрезков относится к сумме диагоналей, как $1:\sqrt{2}$; 5) сами являются диагоналями четырехугольника, середины сторон которого суть вершины квадрата.

Эти предложения легко доказываются применением теоремы Птолемея.

Если прямоугольный треугольник с катетами a и b и равнобедренный прямоугольный треугольник имеют общую гипотенузу, то расстояние между вершинами прямых углов определяется формулой $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ или $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, смотря по тому, лежат ли треугольники по разные стороны от гипотенузы или по одну.

Аналогичные предложения доказаны для многоугольников. А. И. Фетисов

3181. О двух взаимно обратных точках и их дополнительных. Баррюкан (Sur deux points réciproques et leurs complémentaires. Barrucand P.), Mathesis, 1957, 66, № 1—3, 69—70 (франц.)

В треугольнике взаимно обратные точки P, Q и их дополнительные P', Q' лежат на коническом сечении, описанном около треугольника. С. И. Зетель

3182. Применение нормальных координат к геометрии треугольника. Хованский А. Н., Уч. зап. Марийск. гос. пед. ин-та, 1957, 12, 73—88

Применяя нормальные координаты (расстояние точки от трех сторон треугольника), автор получает ряд теорем и формул геометрии треугольника, определяет расстояния между замечательными точками треугольника, находит уравнения описанной и вписанной окружностей. Особое внимание уделено треугольнику проекций. С. И. Зетель

3183. Другой подход к окружности девяти точек. Саттерли (Another approach to the nine-point circle. Satterly John), Math. Teacher, 1957, 50, № 1, 53—54 (англ.)

Приводится элементарное доказательство существования окружности девяти точек (окружности Эйлера) и показывается построение точки касания этой окружности и вписанной окружности. Н. В. Наумович

3184. Расходимость двух окружностей. Вотлинг (Divergence de deux cercles. Wottling A.), Rev. math. spéc., 1957, 67, № 10, 549 (франц.)

Для двух пересекающихся окружностей C и C_1, лежащих в одной плоскости с центрами ω и ω' ($\delta = \omega\omega'$) и радиусами r и r', выражение $I = \frac{\left| r^2 + r_1^2 - \delta^2 \right|}{2rr'}$ — инвариант относительно всякой инверсии окружностей. Показано, что если окружности не пересекаются, то это выражение также является инвариантом относительно инверсии. С. И. Зетель

3185. Определение конических сечений как геометрических мест точек. **Р и к с е к к е р** (Die Ortsdefinitionen der Kegelschnitte. R i x e c k e r H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 2, 81—82 (нем.)

Исходя из общего определения всех конических сечений с помощью фокуса, соответственной директрисы и эксцентриситета, полученного на основании пространственных соображений, показывается, как получить в плоскости определение центральных конических сечений как геометрического места точек, сумма или разность которых до двух данных точек есть величина постоянная. Н. В. Наумович

3186. Площадь эллипса, заданного пятью касательными. **Р о д е х а** (Area of the ellipse determined by five tangents. R o d e j a F. E. G.), Collect. Math., 1954, 7, № 2—3, 113—119 (англ.)

Выводится формула, выражающая площадь эллипса через площади треугольников, образованных касательными к эллипсу.

Пусть $(u_i,\ v_i)$ — неоднородные плюккеровы координаты прямой p_i. Введем обозначение

$$(\overline{ijk}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_i & v_i & 1 \\ u_j & v_j & 1 \\ u_k & v_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда площадь треугольника, образованного прямыми p_i, p_j, p_k, может быть выражена по формуле

$$\{\overline{ijk}\} = \frac{(\overline{ijk})}{4\,(\overline{0ij})\,(\overline{0jk})\,(\overline{0ki})}.$$

Пусть p_i, $i=1,\ \ldots,\ 5$ — касательные к эллипсу. Введем обозначения

$$P = \{\overline{123}\}\,\{\overline{124}\}\,\{\overline{125}\}\,\{\overline{134}\}\,\{\overline{135}\}\,\{\overline{145}\}\,\{\overline{234}\}\,\{\overline{235}\}\times$$
$$\times\{\overline{245}\}\,\{\overline{345}\},$$

$$L = \{\overline{124}\}\,\{\overline{125}\}\,\{\overline{345}\},\quad M = \{\overline{234}\}\,\{\overline{235}\}\,\{\overline{145}\},$$

$$N = \{\overline{314}\}\,\{\overline{315}\}\,\{\overline{245}\}.$$

Тогда площадь эллипса, заданного пятью касательными p_i, выражается по формуле:

$$A = \frac{\pi\,\{\overline{123}\}^{3/4}\,P^{1/4}}{\left[L^{1/2} + M^{1/2} + N^{1/2}\right]^{3/2}}.$$

Эта формула, очевидно, инвариантна относительно эквиаффинных преобразований. А. И. Сирота

3187. Об эллипсах, касающихся в трех точках гипоциклоиды Штейнера некоторого треугольника. **Д о** (Sur les ellipses tritangentes à l'hypocycloide de Steiner d'un triangle. D e a u x R.), Mathesis, 1956, 65, № 10, 526—534 (франц.)

Методом комплексных координат автор устанавливает большое число свойств эллипсов ε, касающихся в трех точках T_1, T_2, T_3 гипоциклоиды Штейнера H_3 треугольника ABC. В частности:

1) центр ε является серединой отрезка HQ, где H — ортоцентр $\triangle ABC$, а Q — точка пересечения осей парабол, вписанных в $\triangle ABC$ и имеющих фокусами точки P_1, P_2, P_3, в которых прямые Симсона $\triangle ABC$ касаются H_3 в T_1, T_2, T_3;

2) ε описан вокруг подерного треугольника точки Q в $\triangle ABC$;

3) ε есть аффинное преобразование θ окружности (O), описанной вокруг $\triangle ABC$; при этом θ преобразует $\triangle P_1P_2P_3$ в $\triangle T_1T_2T_3$;

4) нормали к ε в точках T_1, T_2, T_3 пересекаются в точке N; если F — точка на ε, через которую проходит его четвертая нормаль, инцидентная точке N, то F перемещается по уникурсальной циркулярной кубике, когда центр Ω эллипса ε перемещается по прямой. Если Ω описывает окружность, концентрическую окружности Эйлера $\triangle ABC$, то F перемещается по удлиненной, или укороченной гипоциклоиде (H_3).

5) Изучаются свойства эллипса ε_0, описываемого центром тяжести ортогональных проекций на стороны $\triangle ABC$ точки, перемещающейся по (O), и некоторых других. К. К. Мокрищев

3188. О некоторых теоремах геометрии поверхностей второго порядка. **Р о л д а н - Д и а ш - А г у д у** (Sobre alguns teoremas da geometria das quadricas. R o l d ã o D i a s A g u d o F e r n a n d o), Ciência (Lisboa), 1954, 4, № 9—10, 59—67 (порт.; рез. англ.)

С использованием мнимых и несобственных элементов доказывается несколько известных теорем аналитической геометрии и следующая теорема: Пусть d_1, d_2 — прямолинейные образующие гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству, плоскости α_i проходят через прямую d_1 и пересекают d_2 в точках A_1, A_2, ...; пусть g_1, g_2, ... — образующие второго семейства, проходящие через A_1, A_2, ... Тогда перпендикуляры к g_1, g_2, ..., проходящие через A_1, A_2, ... в плоскостях α_1, α_2, ... соответственно, лежат на поверхности третьего порядка, которая иногда вырождается в плоскость или однополостный гиперболоид. А. И. Сирота

3189 К. Максимумы и минимумы в элементарной геометрии плоскости. **Т о р т о р и ч и** (Minimi e massimi in geometria plana elementare. T o r t o r i c i P i e t r o. Palermo, Tip. A. Renna, 1957, xi, 133 p., 800 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 671, 207 (итал.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

3190. Матрицы симметрических составляющих. **Х о л е в и ц к и й** (Macierze składowych symetrycznych. C h o l e w i c k i T.), Archiwum Elektrotechn., 1954, 3, № 2, 231—308 (польск.; рез. русск., англ.)

Работа состоит из двух частей. Первая часть имеет математический характер; вторая часть касается приложений результатов первой части к некоторым вопросам электротехники. В первой части автор рассматривает векторы на плоскости Гаусса, приложенные к одной точке (комплексные числа), а затем определяет понятие симметрической системы трех векторов (нулевой, положительной и отрицательной). Система векторов w_1, w_2, w_3 называется симметрической, если векторы имеют равные длины и образуют между собой равные углы. Если углы между ними равны нулю — система нулевая, если равны $\frac{2}{3}\pi$ — система положительная и если равны $-\frac{2}{3}\pi$ — система отрицательная.

Имея три произвольных вектора A, B, C, автор раскладывает эти векторы по схеме

$$A = A_0 + A_1 + A_2,$$
$$B = A_0 + h^2A_1 + hA_2,$$
$$C = A_0 + hA_1 + h^2A_2,$$

где $h = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ и где A_0, A_1, A_2 — первые векторы симметрических систем, соответственно нулевой, положи-

тельной и отрицательной. Это разложение единственно ввиду неравенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h^2 & h \\ 1 & h & h^2 \end{vmatrix}.$$

Затем, вводя некоторые дальнейшие матрицы третьего порядка, автор строит некоторую алгебру в зависимости от рассматриваемого выше разложения, которая сама по себе не представляет особого интереса, но некоторые формулы употребляются во второй части. Первая часть работы, с одной стороны, является слишком подробной и длинной, а с другой стороны — в ней имеются математические неточности.

Во второй части автор применяет формулу разложения на симметрические составляющие к закону Ома и второму закону Кирхгофа для трехфазных приемников с четырьмя проводами. St. Gołąb

3191. Заметка о кинематически предпочтительных системах координат. Маргулис (Remark on kinematically preferred co-ordinate systems. Margulies G.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 3, 152—153 (англ.)

Определение понятия кинематически предпочтительной системы координат дано в работе Томаса (РЖМех, 1958, 1548).

Доказывается, что кинематически предпочтительная система координат с началом в движущейся точке вполне определяется с точностью до ортогонального преобразования с постоянными коэффициентами. Обратно, если дана кинематически предпочтительная система координат (y) и любая другая прямоугольная система (y'), связанная с (y) уравнениями $y_\alpha = e_{\alpha\beta} y'_\beta$, где $e_{\alpha\beta}$ ортогональны и не зависят от времени, то (y') также является кинематически предпочтительной системой координат. В. Ф. Рогаченко

3192. Винтовые биноры и их приложения. Кислицин С. Г., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1956, 125, 165—188

Понимая под винтом совокупность главного вектора и главного момента (Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1948, 1, §§ 32, 37), автор определяет результат действия аффинора на винт. Винтовым бинором называется совокупность двух аффиноров, переводящих первый и второй векторы первоначального винта в два новых винта. Математические результаты статьи сводятся к выводу формулы, дающей закон преобразования бинора, представленного в виде квадратной матрицы 6-го порядка, при переходе от одной системы координат к другой. При этом используется известный из механики закон преобразования компонент винта. Полученная формула применяется для решения нескольких задач механики твердого тела, в которых можно использовать представление о винте.

Г. А. Зайцев

3193. Кинематический анализ движения точки по некоторым плоским траекториям. Стипанич (Un'analisi cinematica di alcuni movimenti del punto per certe traiettorie nel piano. Stipanić Ernest), Boll. Soc. Mat. Calabrese, 1954, 5, № 1, 11 pp. (итал.)

Уравнение годографа скоростей представляется в полярных координатах в форме

$$\rho = \rho_0 \exp \int_{\theta_0}^{\theta} \lambda(\theta)\, d\theta,$$

где $\rho = v$, $\lambda(\theta) = \dfrac{W_T}{W_N}$, а θ есть угол, образованный вектором скорости с осью x. С помощью этого уравнения и некоторых его следствий изучаются такие случаи движения точки по эллипсу и по кривой $y = x^\alpha$, когда угол между скоростью и ускорением постоянный.

С. Г. Кислицын

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3194. Метод М. Шаля, видоизмененный профессором В. Я. Цингером, построения плоской кривой третьего порядка по девяти данным точкам. Черняев М. П., Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, 35—41

Рассматриваются некоторые известные теоремы, как, например:

Если через четыре данные точки проведен пучок конических сечений, а через данную пятую точку — проективный ему пучок прямых, то геометрическим местом точек пересечения конических сечений с соответствующими прямыми будет кривая третьего порядка, проходящая через пять данных точек. В. А. Маневич

3195. О локальных специализациях теоремы о полном четырехугольнике и малой теоремы Дезарга. Гавел (Über die lokalen Spezialisierungen des Satzes vom vollständigen Viereck und des kleinen Desarguesschen Satzes. Havel Václav). Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 2, 295—307 (нем.; рез. русск.)

В статье изучается проективная плоскость, не содержащая никакого полного четырехугольника с коллинеарными диагональными вершинами. Вводится понятие локальной специализации теоремы о полном четырехугольнике (Q), соответственно малой теоремы Дезарга (d); при этих специализациях фиксируется основная гармоничная четверка точек, соответственно центр точки пересечения соответственных сторон.

Главным результатом является аналог теоремы об эквивалентности Q и d в случае локальной специализации: из локально специализированной теоремы Q следует локально специализированная теорема d (теорема 3); если справедлива локальная специализация теоремы d для фиксированных точек, образующих гармоничную четверку, то справедлива и локальная специализация теоремы Q, когда выполняется дальнейшее существенное условие, а именно, когда имеет место тождество $(-1)\ x = -x$ в некоторых координатных тернарных телах данной плоскости (теорема 4).

Далее в статье содержится теорема об эквивалентности локальных специализаций прямой и обратной малых теорем Дезарга (теорема 1) и теорема о замене обеих пар точек одной и той же гармоничной четверки точек (теорема 2). Резюме автора

3196. Некоторые свойства конфигураций из прямых линий. Сербина А. И., Уч. зап. Грозненск. гос. пед. ин-та, 1956, № 7, 66—68

Обобщается на комплексный треугольник теорема А. Цвойдзинского: Из вершин треугольника опущены перпендикуляры AA', BB', CC' на произвольную прямую; A', B', C' — основания перпендикуляров. Перпендикуляры, опущенные из точек A', B', C' на соответствующие стороны треугольника, пересекаются в одной точке. Аналог теоремы для комплексных треугольников допускает дальнейшее обобщение. На комплексные четырехугольники теоремы полного четырехсторонника не обобщаются. С. И. Зетель

3197. Аксиома Дедекинда и ее применение в теории параллельных. Нёймейстер (L'axiome de Dedekind et son application à l'étude des parallèles. Neumeister R.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 36, № 184, 252—261 (франц.)

На прямой α рассматривается полупрямая с началом в точке O и некоторая точка A на этой полупрямой. Пусть дана точка M, не лежащая на α; возьмем произвольную точку B на OM так, что M лежит между O и B. Проводятся всевозможные полупрямые, исходящие из точки M и расположенные в той полуплоскости плоскости (α, M), ограниченной прямой OM, которой принадлежит точка A. Точки пересечения этих полупрямых с отрезком AB (тех из них, которые его пересекают) образуют сечение, в один из классов которого относятся точки пересечения тех полупрямых MK, которые пересекают полупрямую OA. Этим сечением на отрезке AB определяется точка I, используемая для определения полупрямой MI, параллельной полупрямой OA. На этом определении строится теория параллельных на плоскости и в пространстве и, в частности, исследуется свойство симметричности соотношения параллельности. В. И. Левин

3198. Общее уравнение конических сечений в плоской гиперболической геометрии. Фладт (Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie. Fladt Kuno), J. reine und angew. Math., 1957, 197, № 3—4, 121—139 (нем.)

Применяя преобразование координат, автор после длительных выкладок приходит к известной классификации кривых 2-го порядка в плоскости Лобачевского (ср. РЖМат, 1957, 6599 К). В нумерации фигур — ошибка: вместо 11, 12, 13, 14 должно быть соответственно: 12, 14, 11, 13. А. С. Смогоржевский

3199. Некоторые вопросы проективной, аффинной и начертательной геометрии в безразмерном пространстве. Лопшиц А. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 140

Безразмерное проективное пространство сопоставляется безразмерному пространству псевдовекторов (Лопшиц А. М., Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, вып. 6, 1948). Его фундаментальная группа определяется невырожденным аффинором. Определив аффинную и метрическую подгруппы, автор формулирует теоремы, аналогичные основной теореме центральной аксонометрии Бескина и теореме Польке—Шварца. А. П. Норден

3200. Преобразование сопряженных проекций и их применение для механизации построения аксонометрических и перспективных изображений объектов. Юран В. Ю. Zinatn. raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-та, 1957, 10, 191—214

Работа делится на две части. В первой части рассматриваются два способа преобразования сопряженных проекций. Сопряженными проекциями называется сочетание перспективной и ортогональной проекций объекта на картинную плоскость. 1-й способ дополнительных проекций аналогичен способу перемены плоскостей проекций в ортогональных проекциях. Такое преобразование упрощает решение как позиционных, так и метрических задач, 2-й способ вспомогательного проектирования. Он применяется при решении задач на пересечения. Сущность его состоит в том, что данные объекты проектируются параллельно на картинную плоскость по такому направлению, чтобы получить параллельную проекцию искомых элементов, а затем и их сопряженные проекции.

Во второй части дается геометрическое обоснование и кинематическая схема прибора (аксо-перспектографа), при помощи которого строятся перспективные и аксонометрические изображения объектов по их ортогональным проекциям и проекциям с численными отметками. Конструкция прибора основана на простой схеме построения наглядных изображений, полученной на базе сопряженных проекций. Рассмотрены построения перспективы на вертикальной и наклонной плоскостях, а также частных видов косоугольной и ортогональной аксонометрии. В. Н. Журавлева

3201. О применении треугольника следов к решению задач начертательной геометрии. Задорожний А. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1956, вып. 14, 47—58

Рассматривается применение треугольника следов к решению элементарных задач прямоугольной аксонометрии. Методы решения общеизвестны. В. Н. Журавлева

3202. Анализ взаимного расположения прямой и плоскости. Казарян Р. А., Сб. научн. тр. Ереванск. политехн. ин-та, 1957, № 14, 125—136

Для определения точки пересечения прямой и плоскости автор предлагает прием, отличный от общепринятого в начертательной геометрии и основанный на установлении теоремы Дезарга на заданной плоскости посредством гиперболической гомологии. Доказательство автор не приводит.

На эпюре находят не проекции точки пересечения, а положение линии связи, соединяющей проекции искомой точки. Ряд примеров, рассмотренных в статье, иллюстрирует предложенный прием при различном расположении следов заданной плоскости. Рассмотрены также случаи, когда прямая принадлежит плоскости или параллельна ей. В. Н. Журавлева

3203. О теореме Польке. Шермазанов Р. Г., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 123—128

В статье аналитически определяются величина стороны тетраэдра, положение аксонометрической плоскости, угол проектирования и направление проектирования в случае, когда три произвольных отрезка, сходящихся в одной точке и расположенных под произвольными углами, принимаются за аксонометрическую проекцию некоторого прямоугольного тетраэдра с равными сторонами. Все расчеты основываются на известных формулах, связывающих элементы косоугольного и ортогонального проектирования, часть которых выведена автором в других его работах. В. Н. Журавлева

3204. Проективная теория приборов для вычерчивания перспективных и аксонометрических изображений. Бирючевский Н. Д., Сб. тр. научн. конференции. Вып. I, Кемерово, 1957, 297—305

Автором разработаны конструкции приборов для вычерчивания перспективных и аксонометрических изображений. В основу приборов положен новый способ построения наглядных изображений, основанный на гомологичных преобразованиях тождественного изображения данного предмета в перспективное или аксонометрическое.

Под тождественным изображением понимаются наложившиеся ортогональные проекции перспективного изображения предмета на биссекторную плоскость второй и четвертой четвертей (эта плоскость называется тождественной). Гомология, преобразующая тождественное изображение в перспективное, задается с помощью треугольника следов картинной плоскости и его проекции на тождественной плоскости. При этом перспектива любой точки находится как точка пересечения прямых, гомологичных ортогональным проекциям луча, проходящего через заданную точку и точку зрения.

Родственное соответствие, преобразующее тождественное изображение в аксонометрическое, устанавливается аналогичным образом.

Приборы, основанные на таких преобразованиях, просты по конструкции, в них отсутствуют обводные штифты и наглядное изображение строится по точкам. В. Н. Журавлева

3205. Определение системы координатных осей в пространстве по ее центральной проекции. Палувер Н. В., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1957, А, № 100, 15 стр.

О. Я. Рюнк (РЖМат, 1957, 807Д) определяет центр проекций и положение координатных осей относительно картинной плоскости в случае, когда заданы центральная проекция масштабного тетраэдра ортогональной равномасштабной системы координат и точка схода одной из координатных осей. При этом он пользуется системой уравнений, возможностей алгебраического решения которой он не рассматривает.

Автор реферируемой статьи приводит эту систему уравнений к форме, пригодной для практических вычислений. Упрощения достигнуты: 1) за счет выбора системы отнесения (она отлична от системы отнесения Рюнка), 2) за счет использования уравнения поверхности, на которой лежит центр проекций, и 3) за счет сведения системы трех уравнений к одному уравнению не выше 8-й степени.

Вопрос о максимально возможном числе вещественных решений остается открытым. В. Н. Журавлева

3206. Применение неевклидовых геометрий к обобщению принципа двух следов в начертательной геометрии евклидова пространства. Скопец З. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 168—169

3207. Непосредственное графическое восстановление в косой аксонометрии. Йовичич (Непосредна графичка реституција косе аксонометрије. Јовичић Милорад М.), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 153—156 (серб.; рез. нем.)

Дается графический прием решения задачи об определении истинной длины единичного вектора, положения единичного ортогонального триэдра $OXYZ$ и направления проектирования s по заданному косому аксонометрическому изображению $OX_kY_kZ_k$ этого триэдра.

Пусть начало O триэдра лежит в плоскости проекции π. Вращаем триэдр вокруг OX, пока OY не займет положения OY_1 в плоскости π. Проекция нового положения триэдра по направлению s будет $OX_kY_1Z_1k$. Затем вращаем триэдр вокруг OY_1, пока OX не займет положения OX_1 в плоскости π. При первом вращении Y и Z движутся вдоль окружности, проекция которой на π параллельно s является эллипсом. При втором вращении проектируем Z и X параллельно так, чтобы проекцией Z все время оставалась точка Z_1k; тогда проекция точки X будет двигаться вдоль некоторой гиперболы в плоскости π.

Рассмотрение указанных эллипса и гиперболы приводит к следующему способу определения истинной длины единичного вектора: Принимаем OY_k и OZ_k за сопряженные полудиаметры эллипса и, определив графически его оси $2a$ и $2b$, поворачиваем их на 90° вокруг O. Приняв OX_k за полудиаметр гиперболы, софокусной полученному эллипсу, находим ее вещественную ось и определяем точку X_1 пересечения эллипса и гиперболы. Отрезок OX_1 дает искомую истинную длину единичного вектора.

Далее указывается способ определения направления s и положения триэдра. В. Ф. Рогаченко

3208 К. Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского. Делоне Б. Н., М., Гостехиздат, 1956, 139 стр., илл., 3 р. 5 к.

Настоящая книга представляет собой, по существу, второе издание книги того же автора со сходным названием, вышедшей в 1953 г. (РЖМат, 1954, 5230К). Оглавление и общий характер книги остались неизменными, однако в деталях автор во многом переработал и улучшил книгу (см., например, удачное приложение 1 книги, посвященное псевдосфере Бельтрами, отдельные моменты которого ранее были недостаточно ясны). И. М. Яглом

3209 К. Начертательная геометрия. Зигань (Ábrázoló geométria. Egyetemi tankönyv. 4. kiad. Zigány Ferenc. Budapest, Tankönyvkiado, 1955, 392 l., ill., 22 ft.) (венг.)

Эта книга является учебным пособием втузов в Венгрии и содержит учебный материал разных инженерных факультетов. Её 585 иллюстраций заботливо проектированы и корректно осуществлены. Рисунки дидактически остроумны и, где является возможным, связаны с техническими объектами.

Гл. I (135 стр.) дает подробное изложение начертательной геометрии (метод Монжа). Гл. II (154 стр.) занимается кривыми и поверхностями. Подробная разработка материала гл. I и II дает возможность коротко рассмотреть аксонометрию (гл. III, 43 стр.), проекцию с пометками (гл. IV, 18 стр.) и центральную проекцию (гл. V, 36 стр.). В последней главе дано изложение основных вопросов и главных методов фотограмметрии. Эта часть содержит 2 выдвижные вкладки. F. Kárteszi

3210 К. Начертательная геометрия. Лекции, прочитанные в Неапольском университете в 1954—1955 учебном году. Франкетта (Geometria descrittiva. Lezioni tenute nell'Università di Napoli. Anno accad. 1954—1955. Franchetta Alfredo. Napoli, Ed. tip. Liguori, 1954, 464, vii p., 3000 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 668, 834 (итал.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3211. К вопросу об образовании кривых 3-го порядка. Столова Е. С., Тр. Киевск. гидромелиор. ин-та, 1956, вып. 6, 285—287

Доказано, что геометрическое место ортоцентров треугольников, каждый из которых имеет одну вершину в центре данной окружности, а две другие — концы хорды, проходящей через фиксированную точку P, есть кривая 3-го порядка. Центры тяжести этих треугольников лежат на окружности; центры описанных окружностей лежат на прямой. В. А. Маневич

3212. О принципе Лефшеца. Ланг (On the Lefschetz principle, Lang Serge), Ann. Math., 1956, 64, № 2, 326—327 (англ.)

Принцип Лефшеца утверждает, что некоторые типы теорем алгебраической геометрии, формулируемые для универсальной области характеристики нуль, можно доказывать вложением рассматриваемых многообразий (м.) в комплексное пространство (используя топологические или аналитические методы), т. е. что если они доказаны для случая, когда универсальной областью является поле комплексных чисел, то они верны и для любой универсальной области характеристики нуль. Автор указывает на возможность в некотором смысле обратного процесса: доказательства теорем (арифметическими методами) для конечного поля и последующим обобщением их на случай поля любой характеристики. Приводимая в качестве примера теорема гласит: Каждое неразветвленное абелево покрытие несингулярной полной кривой C индуцируется на C покрытием $\lambda : B \to J$ якобиева м. J этой кривой, где B — абелево м., а λ — сепарабельная изогения. Обобщение на случай поля любой характеристики проводится с помощью теории редукции Симуры (РЖМат, 1956, 2408). В. В. Морозов

3213. Одна теорема о вещественных пучках алгебраических кривых с максимальной производящей вещественной кривой. Брузотти (Un teorema sui fasci reali di curve algebriche a curva reale generica

massimale. Brusotti Luigi), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1955, 88, № 1, 240—242 (итал.)

Эта заметка дополняет предыдущую работу автора с тем же заглавием (РЖМат, 1958, 2357). Построен пример пучка кривых четного жанра $p=2q$; поверхность, несущая пучок, состоит из $(q+1)$-го куска; каждый кусок гомеоморфен тору, а ветви кривых пучка гомеоморфны меридианам тора; на q кусках ветви кривых пучка образуют топологическую инволюцию порядка два и на одном куске — топологическую инволюцию порядка один. Кривые пучка имеют максимальное число действительных ветвей $2q+1$ (максимальные кривые). Д. А. Гудков

3214. Относительно разрешения особенностей алгебраического многообразия. Грёбнер (Sopra lo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche. Gröbner Wolfgang), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 319—327 (итал.)

Пусть $d_x=(p_1, \ldots, p_s)$, $p_j(x)\in K[x_0, \ldots, x_m]$, $j=1, \ldots, s$; $s\geqslant 2$, где $x_0, \ldots, x_m$ — неопределенные,— однородный идеал над полем комплексных чисел K. Автор продолжает исследование моноидального соответствия

$$\rho y_{ij}=x_i p_j(x), \qquad (1)$$

начатое им ранее (РЖМат, 1957, 3835). Автор утверждает, что 1) можно считать все формы $p_i(x)$ формами одной и той же степени; 2) обратное соответствие имеет вид

$$\rho x_i=y_{ij}; \qquad (2)$$

3) для соответствия (1) прообразом будет m-мерное проективное пространство S_m, а образом $V(v_y)$, где $x_y=K[y]\,[y_{ij}y_{kl}-y_{il}y_{kj},\ y_{ij}p_r(y_{kl})-y_{ir}p_j(y_{kl}), \ldots]$; 4) точки $V(d_x)$ не имеют гомологичных точек в (1); 5) каждой точке $V(v_y)$ соответствует определенная точка S_m; 6) соответствие $V(v_y)\to S_m$ однозначно на всем $V(v_y)$, кроме точек $V(d_y)$, где $d_y=(v_y,\ p_1(y_{i_1}), \ldots, p_s(y_{is}))$; 7) существует однозначное соответствие между точками $V(d_y)$ и касательными пространствами к $V(d_x)$; 8) если $V(d_x)$ не имеет особенностей, то $V(v_y)$ также их не имеет; 9) если $V(d_x)$ — особенное подмногообразие на неприводимом $V(p_x)$, то (1) переводит $V(p_x)$ в не имеющее особенностей $V(p_y)$.

По поводу сказанного выше референт должен заметить следующее. Соответствие (1) не неприводимо, как неявно предполагает автор, ибо биоднородный идеал $I=K[x,\ y]\,(y_{ij}x_kp_l(x)-y_{kl}x_ip_j(x))$, $ik=0, \ldots, m$; $j,\ l=1, \ldots, s$, соответствующий (1) и получаемый исключением параметра ρ и (1)—не простой. Чтобы получить нетривиальное неприводимое соответствие, нужно добавить к I некоторые полиномы; получится идеал $P=K[x,\ y]\,(y_{ij}x_kp_l(x)-y_{kl}x_ip_j(x);$ $y_{ij}x_k-y_{kj}x_i;\ y_{ij}p_l-y_{il}p_j; \ldots)$. В этом идеале $p_j(x)$ входят не везде, и, следовательно, d_x не преобразуется в нуль-идеал, вопреки 4). Уравнения (2) справедливы для соответствия P, но не для (1), что противоречит 2). Если d_x — простой, то 1) вообще неверно, а если d_x — не простой, то некоторые из p_i могут оказаться приводимыми, что существенно повлияет на базис P и на данное автором доказательство 7). Предложение 5) неверно, так как фундаментальные подмногообразия существуют и для S_m и для $V(v_y)$. Предложение 9) автор не доказывает, но рассуждения, которыми он пытается оправдать его справедливость, используют ложное предложение 4). P. Abellanas

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, 513.

3215. Дополнение к заметке: Относительно разрешения особенностей алгебраического многообразия. Грёбнер (Aggiunta alla nota: Sopra lo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche. Gröbner Wolfgang), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 589—590 (итал.)

Добавление к цитированной статье (реф. 3214). Библ. 7 назв.

3216. Некоторые замечания о многообразии Виртингера. Герарделли (Alcune osservazioni sulle varietà di Wirtinger. Gherardelli Francesco), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954—1955, 89, № 2, 387—400 (итал.)

Исследуется многообразие (м.) Виртингера W_p (образ инволюции $u\to -u$ м. Пикара V_p), строится его несингулярная модель и определяется число q_i линейно независимых дифференциальных форм первого рода и порядка i на нем. Оказывается, что $q_{2r+1}=0$, $q_{2r}=\binom{p}{2r}\left(r=1, \ldots, \left[\frac{p}{2}\right]\right)$. Изучаются некоторые сечения W_p, в частности поверхность Ф, представляющая сечение W_p производящим S_{2^p-p+1} $(p>2)$; она регулярна и биирегулярность ее $>p$, откуда следует существование регулярных поверхностей со сколь угодно большой биирегулярностью (биирегулярность — число линейно независимых тензорных форм первого рода на W_p, имеющих вид $a_{ij}\left(\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)$. В. В. Морозов

3217. Замечания об образовании канонических и плюриканонических систем некоторых алгебраических поверхностей. Годо (Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 10, 1002—1011; № 11, 1102—1106; 1957, 43, № 1, 8—16; № 2, 56—62; № 3, 90—97; № 4, 226—234 (франц.)

В этих заметках рассматривается поверхность Ф — образ циклической инволюции порядка n, принадлежащей алгебраической поверхности F порядка m и имеющая три точки дирамации (см., например, РЖМат, 1955, 5257), изучается структура этих точек и влияние ее на построение канонической и плюриканонических систем для Ф.

Первая заметка. $n=7$, $m=6$. Уравнение F: $a_1x_1^3x_2+a_2x_2^5x_3+a_3x_3^5x_1+a_4x_4^6+a_5x_1x_2x_3x_4^3+a_6(x_1x_2x_3)^2=0$ (в последующих заметках оно имеет более сложный вид), инволюция

$$I=\begin{pmatrix}x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^3x_3 & \varepsilon^6x_4\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix},\quad \varepsilon^7=1$$

(аналогичный вид в последующих заметках). Строятся i-канонические системы $(i=1,2,3,4)$ для Ф. Точки дирамации эквивалентны набору рациональных кривых отрицательных виртуальных степеней; в построение указанных систем входят те из них, виртуальная степень которых $\leqslant -2$.

Вторая заметка. $n=7$, $m=8$. Составляющие точек дирамации не участвуют в построении канонической и плюриканонических систем для Ф.

Третья заметка. $n=3k^2+3k+1=$ простому числу, $m=3k+3$. Каждая точка дирамации эквивалентна совокупности одной рациональной кривой виртуальной степени $-(3k+1)$ и k рациональных кривых виртуальной степени -2. Первые входят в каноническую систему Ф в качестве фиксированных компонент, наряду с ними фиксированной компонентой является еще некоторая двойная эллиптическая кривая; переменная часть канонической системы состоит из $k-1$ эллиптических кривых некоторого пучка. Биканоническая система неприводима.

Четвертая заметка. $n = 9k^2 - 3k + 1 =$ простому числу, $m = 3k + 1$; рассматривается случай $k = 2$. Точка дирамации эквивалентна совокупности 9 рациональных кривых; одна из них виртуальной степени -3 входит в каноническую, биканоническую и триканоническую системы в качестве фиксированной компоненты; переменные части двух первых задаются эллиптическими кривыми некоторого пучка.

Пятая заметка. Обобщение предыдущей заметки для любого простого n. Каноническая система образована тремя рациональными кривыми виртуальной степени $-(k+1)$ и $k-1$ переменными эллиптическими кривыми некоторого пучка, но последний не участвует в образовании биканонической системы, n-каноническая система неприводима.

Шестая заметка. $n = 9k^2 + 3k + 1 =$ простому числу, $k \geqslant 3$, $m = 3k + 2$. Ф содержит пучок эллиптических кривых, одна из кривых которого — рациональная кривая виртуальной степени -1, считаемая трижды. Каноническая система содержит эту кривую, $k-1$ кривых пучка и 6 некоторых рациональных кривых. Биканоническая система неприводима.

В. В. Морозов

3218. **Об одной поверхности пятого порядка, несущей двойную такнодальную прямую. I, II. Годо** (Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale I, II. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 9, 884—896; 897—905 (франц.)

Первая заметка. Рассматривается поверхность Ф: $X_1X_2X_3X_4^2 + \left(\frac{\sum_1^4 a_iX_i}{a_5}\right)^5 = 0$ — проективная модель образа инволюции 13-го порядка $\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^{10}x_3 & \varepsilon^8 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ ($\varepsilon^{13} = 1$) на поверхности $a_1x_1^4x_2 + a_2x_2^4x_3 + a_3x_3^4x_1 + a_4x_4^5 + a_5x_1x_2x_3x_4^2 = 0$. Поверхность Ф несет такнодальную прямую (двойная прямая, имеющая бесконечно близкие двойную и простую прямую) $X_4 = 0$, $\sum_1^4 a_iX_i = 0$. Двумя способами определяются каноническая и плюриканонические системы Ф и вычисляются ее плюрижанры $P_a = P_g = P_2 = 1$, $P_3 = P_4 = 2$, $P_5 = 4$, $P_6 = 5$, $P_7 = 8$.

Вторая заметка. Строится проективная нормальная модель Ф в S_{31} и изучается структура трех ее точек дирамации, каждая из которых оказывается эквивалентной 6 рациональным кривым. Устанавливаются функциональные соотношения между гиперплоскостными сечениями Ф, 18 составляющими ее точек дирамации, каноническими, трикаоническими и 5-каноническими кривыми. Строится 13-каноническая система и вычисляется $P_{13} = 17$.

В. В. Морозов

3219. **Верхняя граница для числа точек, принадлежащих κ-калотте $C(k, 0)$ в конечном линейном пространстве. Барлотти** (Una limitazione superiore per il numero di punti appartenenti a una k-calotta $C(k,0)$ di uno spazio lineare finito. Barlotti Adriano), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 1, 67—70 (итал.)

Пусть $S_{n,q}$ — проективное пространство над полем Галуа порядка q, $M_{n,q}$ — максимальное число точек в $S_{n,q}$, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Максимальное значение k, для которого в $S_{n,q}$ существует k-калотта $C(k, 0)$ (РЖМат, 1958, 1512), совпадает с $M_{n,q}$. Доказывается, что

$$M_{n,q} \leqslant \begin{cases} q^{n-1} - (q-5)\sum_0^{n-4} q^i + 1, \text{ если } n > 3,\ q - \text{не-} \\ \text{четное},\ q \geqslant 7;\ 124, \text{ если } n = 1,\ q = 5; \\ 5^{n-1} - 10\sum_0^{n-5} q^i - 1, \text{ если } n > 4,\ q = 5; \\ q^3, \text{ если } n = 4,\ q - \text{четное} > 2; \\ q^{n-1} - q\sum_0^{n-5} q^i, \text{ если } n > 4,\ q - \text{четное} > 2. \end{cases}$$

Л. А. Скорняков

3220. **Обобщение теории сфер подер. Монсо** (Sur une généralisation de la théorie des sphères podaires. Monseau M.), Mathesis, 1956, **65**, № 4—6, 223—230 (франц.)

Излагается применение основной теоремы, согласно которой сферы подеры точек одной и той же прямой ортогональны к одной и той же сфере. 1. Сферой, ассоциированной по модулю n с парой изогональных точек тетраэдра, называется сфера Σ_n, концентрическая со сферой подерой Σ_1 и притом так, что отношение степеней точки P относительно Σ_1 и Σ_n равно n. 2. Сферы, ассоциированные по модулю n с определенной точкой, по отношению к тетраэдру, сопряженному с поверхностью второго порядка, ортогональны к одной и той же сфере. 3. Сферы, ассоциированные по модулю n с точками одной и той же прямой, ортогональны к одной и той же сфере. Эта сфера называется сферой ортоподерой данной прямой по модулю n. 4. Сферы ортоподеры по модулю n прямых плоскости, параллельных данному направлению, являются огибающими поверхности вращения второго порядка. 5. Прямые, сферы ортоподеры которых по модулю n ортогональны к данной сфере, образуют комплекс 3-го порядка. 6. Пара изогональных точек, для которых сфера, ассоциированная по модулю n, ортогональна к данной сфере S, сопряжена относительно поверхности второго порядка, описанной около S по линии ее пересечения с гранью тетраэдра. 7. Геометрическое место точек, для которых сфера, ассоциированная по модулю n, ортогональна к данной сфере, есть поверхность четвертого порядка. 8. Геометрическое место точек поверхности Сартьо, для которых плоскость подера по модулю n проходит через данную точку, есть кривая 6-го порядка. 9. λ — тангенциальный пучок кривых второго порядка на несобственной плоскости, сопряженный с линейной точечной системой, имеющей базисными кривыми бесконечно удаленные кривые второго порядка на поверхности второго порядка. Индикаторными плоскостями подерами по модулю n прямой d называются двойные элементы инволюции касательных плоскостей, проведенных через прямую d к кривым пучка λ. 10. Общая степень $(\Sigma_n; S_n)$ сферы Σ_n, ассоциированной по модулю n с парой $(M; M')$ и сферой ортоподерой S_n по модулю n прямой d, дается формулой:

$$(\Sigma_n; S_n) = \frac{3-n}{2}\,\frac{\delta\delta_1' + \delta'\delta_1'}{\cos\omega},$$

где δ, δ_1' — расстояния M от индикаторных плоскостей прямой d, δ_1', δ' — аналогичные расстояния M'; ω — угол между плоскостями. 11. Радикальная плоскость сфер ортоподер по модулю n двух параллельных прямых пересекает их плоскость по эквидистантной параллельной. 12. Присоединенными по модулю n плос-

костями тетраэдра называются плоскости, ассоциированные с тетраэдром, у которого бесконечно удаленные прямые граней суть четыре прямые базисного тангенциального пучка прямых. 13. Произведение расстояний двух изогональных точек до присоединенной по модулю n плоскости равно отношению к $3-n$ общей степени ассоциированных по модулю n сфер и сферы ортоподеры присоединенной плоскости. 14. Если к плоскостям подерам по модулю n точек поверхности Сартьо применить трансляцию, вектор которой равен расстоянию данной точки от присоединенной по модулю n плоскости, то получим связку плоскостей. 15. θ_n суть тетраэдры, у которых грани — присоединенные по модулю n плоскости. Если описать около θ_n параболические цилиндры, образующие которых параллельны прямой d, то диаметральные плоскости этих цилиндров параллельны присоединенным плоскостям подерам по модулю n прямой d. 16. Прямые, индикаторные плоскости подеры которых по модулю n совпадают, принадлежат присоединенным плоскостям по модулю n. 17. Несобственные точки ребер θ_n совпадают с точками кривых 6-го порядка, ортогональных по модулю n с некоторой точкой пространства. 18. Фундаментальный тетраэдр T и тетраэдр T_n ортогонально аффинны, плоскость аффинитета есть плоскость, присоединенная по модулю n. Центр ортологии, соответствующий T, есть ортополюс рассматриваемой присоединенной плоскости. 19. Присоединенные по модулю n плоскости семейства параллельных суть плоскости круговых сечений поверхности вращения второго порядка, сопряженной с тетраэдром.

Сферы ортоподеры присоединенных по модулю n плоскостей относительно одного и того же семейства параллельных огибают поверхность вращения второго порядка, сопряженную с тетраэдром. 20. Косая ортология становится чистой ортологией, если плоскость аффинитета перпендикулярна одной из директрис системы высот. 21. Сферы горловой линии поверхностей вращения второго порядка, сопряженных с тетраэдром, суть сферы, которые полярно преобразуют тетраэдр в тетраэдр, ортогонально аффинный. 22. Для рассмотренных предложений можно установить аналогичные предложения в планиметрии. А. И. Фетисов

3221. Сопряженные координаты в плоской геометрии Евклида. Карвер (The conjugate coordinate system for plane Euclidean geometry. Carver Walter B.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 9, Part. 2, 86 pp. (англ.)

Положение точки определяется координатами

$$x = X + iY; \quad y = X - iY,$$

где X, Y — прямоугольные декартовы координаты на плоскости. С помощью этих координат записываются уравнения прямой, окружности, кривых второго порядка и циклоидальных кривых и решаются элементарные задачи теории этих линий. Одна из глав посвящена геометрии треугольника, вершины которого определяются комплексными шагами. Автор рассматривает многочлен третьей степени с корнями s_1, s_2, s_3 и выражает замечательные точки, связанные с треугольником через симметрические функции этих корней. А. П. Норден

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3222. К вопросу о метрической двойственности. Джавадов М. А. Уч. зап. Азерб. ун-та, 1956, № 6, 3—17 (рез. азерб.)

В. Ф. Каган (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, V вып., 1937) назвал гонометрическим семейством кривых на плоскости такое двупараметрическое семейство кривых, в котором квадрат бесконечно малого угла $d\varphi$ между близкими кривыми выражается дифференциальной квадратичной формой.

Из дифференциальных уравнений, определяющих гонометрические семейства, видно, что их можно строить с большим произволом; однако до работы автора был известен лишь тривиальный класс примеров: двупараметрические семейства окружностей.

Автор строит следующий нетривиальный пример гонометрического семейства:

$$x = \int \frac{16(\xi - L^2)\,dL}{(8-L^2)\sqrt{(8-L^2)^2 - (\xi - L^2)^2}} + \eta;$$

$$y = \frac{L}{8-L^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{8}-L}{\sqrt{8}+L},$$

где ξ, η — параметры кривой семейства; L — параметр на кривой. При этом

$$d\varphi^2 = \frac{d\xi^2}{64-\xi^2} + \frac{(64-\xi^2)(8-\xi)}{128}\,d\eta^2.$$

Указанный пример входит в целый класс полученных автором гонометрических семейств, причем выбор семейства зависит от нескольких произвольных постоянных; однако уравнения этих семейств записываются уже не посредством элементарных функций, а посредством решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

П. К. Рашевский

3223. Об одном свойстве, характеризующем минимальные поверхности. Стенбеккелирс (Sur une propriété caractéristique des surfaces minima. Steenbeckeliers Guy), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 3, 155—158 (франц.)

В сферическом отображении минимальной поверхности S изотропные образующие u_0 и v_0 сферы, являющиеся отображениями минимальных линий u и v поверхности, имеют соответственно направления касательных к линиям v и u. Отсюда вытекают известные свойства минимальных поверхностей.

А. А. Гаршнек

3224. Вполне геодезические конгруэнции кругов. Лищинский Е. Ф. Научн. зап. Днепропетр. ун-та, 1956, 45, 249—257

Автор рассматривает семейство кругов на плоскости как риманово пространство R_3 с линейным элементом $d\vartheta^2$, где ϑ — угол между двумя окружностями.

В работе непосредственными вычислениями находятся двухпараметрические семейства кругов, соответствующие вполне геодезическим поверхностям в R_3, оказывающиеся связкой окружностей. На этом частном примере проверяются все известные свойства вполне геодезических поверхностей.

Примечание референта. Результат автора может быть установлен проще, используя известное перенесение Дарбу. В этом перенесении связке окружностей соответствует плоскость трехмерного проективного пространства. В. И. Ведерников

3225. О конгруэнциях W. Бланк Я. П., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80; Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 45—48

Автор называет асимптотической линейчатую поверхность, принадлежащую конгруэнции W и касающуюся ее фокальных поверхностей вдоль асимптотических линий, и доказывает следующее: конгруэнция W определяет однопараметрическое семейство поверхностей, с сетями, высекаемыми асимптотическими линейчатыми поверхностями, оси Грина которых совпадают с лучами конгруэнции.

Если средняя поверхность конгруэнции W принадлежит этому семейству, то она является поверхностью переноса. А. П. Норден

3226. **Тензорное изложение метода подвижного трехгранника поверхности в E_3. Шуликовский В. И.**, Уч. зап. Казанского гос. ун-та, 1955, 115, № 14, 61—68

Дается тензорное истолкование основных понятий и операций метода внешних форм для случая двумерной области.

Разлагая производные радиуса-вектора точки поверхности и ортов подвижного трехгранника, связанного с поверхностью, по ортам этого трехгранника и записывая условия интегрируемости полученных уравнений, автор получает выражение для трансверсального вектора (РЖМат, 1957, 821), уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци.

В приложении рассматриваются некоторые известные свойства циклических систем, поверхностей центров кривизны и дано решение задачи Бианки: найти поверхность, в касательных плоскостях которой можно расположить ∞^2 лучей конгруэнции, образующей с конгруэнцией нормалей поверхности вполне расслояемую пару. А. И. Сирота

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3227. **Обобщенные римановы пространства. Моффат** (Generalized Riemann spaces. Moffat John), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 623—625 (англ.)

Рассматривается следующее обобщение римановых многообразий. В многообразии точек с вещественными координатами $\{x^\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, задается поле комплексного симметрического тензора $g_{\mu\nu} = s_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}$, где $s_{\mu\nu}$ и $a_{\mu\nu}$ — вещественный и мнимый симметрические тензоры соответственно; предполагается, что $g_{\mu\nu}$ и $s_{\mu\nu}$ — невырожденные тензоры $\mathrm{Det}\,(g_{\mu\nu}) \neq 0$; $\mathrm{Det}\,(s_{\mu\nu}) \neq 0$. Это позволяет ввести контравариантные компоненты $g^{\mu\nu}$ и $s^{\mu\nu}$, определяемые условиями $g^{\mu\nu}g_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\sigma$, ${}^*s^{\mu\nu}s_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\sigma$. В таком многообразии вводится также комплексная связность $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, где ${}^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ и $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ отвечает реальной и мнимой частям $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Так как вследствие вещественности x^α, при преобразовании координат

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}A^\rho_{\lambda'} = \Gamma^\rho_{\alpha\beta}A^\alpha_{\mu'}A^\beta_{\nu'} + \partial_{\nu'}A^\rho_{\mu'}, \quad A^\alpha_{\sigma'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma},$$

то ${}^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ преобразуется как объект, а $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ является тензором. Вводится по обычным правилам операция ковариантного дифференцирования, отвечающая этой связности с символом «;». Тогда $g_{\mu\nu;\,\sigma} = 0$.

Так как $g_{\mu\nu;\,\sigma} = 0 = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - g_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\mu\sigma} - g_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\sigma}$, то $g_{\sigma\tau}\Gamma^\tau_{\mu\nu} = {}^1/_2\,(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$ и $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + \left[{\lambda \atop \mu\nu} \right] - {}^*s^{\lambda\sigma}a_{\sigma\tau}\Gamma^\tau_{\mu\nu}$, где $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ и $\left[{\lambda \atop \mu\nu} \right]$ — символы Кристоффеля, отвечающие $s_{\mu\nu}$ и $a_{\mu\nu}$.

Далее вводится тензор кривизны и тензор Риччи, которые также расслаиваются на реальную и мнимую компоненты. Доказывается, что $R^\lambda_{\mu\nu\sigma;\,\tau} + R^\rho_{\mu\nu\sigma}\Delta^\lambda_{\rho\tau} - R^\lambda_{\rho\nu\sigma}\Delta^\rho_{\mu\tau} + R^\rho_{\mu\nu\sigma}\hat{\Gamma}^\lambda_{\rho\tau} - R^\lambda_{\rho\nu\sigma}\hat{\Gamma}^\rho_{\mu\tau} = 0$, где $\Delta^\lambda_{\rho\tau} = {}^*\Gamma^\lambda_{\rho\tau} - \left\{ {\lambda \atop \rho\tau} \right\}$ и дифференцирование, обозначенное символом «;», отвечает связности $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$. Автор выражает мнение о возможности приложения таких многообразий при $h = 4$ к разработке единой теории, предложенной Инфельдом (РЖФиз, 1956, 27819). А. З. Петров

3228. **Инфинитезимальные деформации риманова пространства. Деви-Сингх, Мишра** (Infinitesimal deformations of a riemannian space. Devi Singh K., Mishra R. S.), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 1—2, 79—88 (англ.)

Рассматривается пространство $\bar{V}_n$, полученное из V_n посредством инфинитезимального преобразования $\bar{x}^i = x^i + \varepsilon\lambda^i(x)$ (РЖМат, 1955, 3953). Показывается, что вектор постоянной длины в V_n деформируется в вектор той же длины в $\bar{V}_n$, ортогональный n-эдр в V_n деформируется в ортогональный n-эдр в $\bar{V}_n$, коэффициенты вращения Риччи в $\bar{V}_n$ получаются как деформированные скаляры из коэффициентов вращения Риччи в V_n. Находятся условия, при которых векторы касательных к деформированной кривой в $\bar{V}_n$ параллельны соответственным векторам исходной кривой в V_n. А. П. Широков

3229. **О полной кривизне погруженного многообразия. Чжэнь Шэн-шень, Лашоф** (On the total curvature of immersed manifolds. Chern Shiing-Shen, Lashof Richard K.), Amer. J. Math., 1957, 79, № 2, 306—318 (англ.)

Аналогично сферическому изображению Гаусса в E_3 авторы рассматривают n-мерное многообразие M^n класса C^∞ совместно с C^∞-отображением x: $M^n \to E^{n+N}$, где E^{n+N} — евклидово пространство размерности $n+N$ ($N \geqslant 1$). Многообразие M^n с отображением x называется погруженным, если индуцированное отображением касательное подпространство везде однозначно: матрица x везде ранга n. Многообразие M^n вложено, если x — взаимно однозначно, т. е. если из $x(p) = x(q)$; $p, q \in M^n$ следует $p = q$. Если B_ν — связка единичных нормальных векторов $\nu(p)$ многообразия $x(M^n)$ и точка B_ν есть пара $(p, \nu(p))$, то B_ν — связка $(N-1)$-мерных сфер над M^n и C^∞-многообразие размерности $n+N-1$. Отображение ν: $B_\nu \to S_0^{n+N-1}$, где S_0^{n+N-1} — единичная сфера в E^{n+N}, определенная посредством $\bar{\nu}(p, \nu(p)) = \nu(p)$, обобщает сферическое изображение Гаусса. Если dV — элемент объема M^n и форма $d\sigma_{N-1}$ степени $N-1$ на B_ν определяет на каждом слое элемент объема единичной сферы в точке $p \in M^n$, то $d\sigma_{N-1} \wedge dV$ — элемент объема B_ν.

Основные результаты: 1. Если M^n — компактное, ориентируемое C^∞-многообразие в E^{n+N}, то полная кривизна $K^*(p) = \int |G(p, \nu)|\, d\sigma_{N-1}$, где функция $G(p, \nu(p)) = G(p, \nu)$ определяется условием $\bar{\nu}\, d\,\Sigma_{n+N-1} = G(p, \nu)\, d\sigma_{N-1} \wedge dV$, отображение $\bar{\nu}^*$ дуально $\bar{\nu}$ и $d\,\Sigma_{n+N-1}$ — элемент объема S_0^{n+N-1}, — удовлетворяет неравенству

$$\int_{M^n} K^*(p)\, dV \geqslant 2c_{n+N-1},$$

где c_{n+N-1} — площадь единичной гиперсферы в E^{n+N}

2. Если в тех же условиях

$$\int_{M^n} K^*(p)\, dV < 3c_{n+N-1},$$

то M^n — гомеоморфно n-мерной сфере.

3. Если $\int_{M^n} K^*(p)\,dV = 2c_{n+N-1}$, то M^n вложено в E^{n+1} как выпуклая гиперповерхность.

С. П. Фиников

3230. Об обобщенной форме Дарбу. I. Канитани (Sur la forme de Darboux généralisée. I. Kanitani Jôyô), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 3, 225—239 (франц.)

Гиперповерхность $y^z(x^1, \ldots, x^n)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n+1)$ проективного пространства S_{n+1} $(n > 2)$ можно определить (с точностью до проективного преобразования) заданием двух форм: асимптотической $H_{ij}\omega^i\omega^j$ $(\omega^i = a^i_k dx^k;\ i, j, k = 1, \ldots, n)$ и формы Дарбу $H_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$, удовлетворяющих фундаментальным уравнениям (выражающим условия интегрируемости). Если задать две произвольные формы $H_{ij}\omega^i\omega^j$ и $H_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$, то можно определить пространство R_n проективной связности без кручения, допускающее некоторую гиперповерхность V_n, которая имеет с R_n касание 4-го порядка.

Настоящая работа посвящена определению таких H_{ijk} (при заданных H_{ij}), чтобы V_n имела касание 6-го порядка с R_n.

Возьмем пространство R_n проективной связности $\omega^\beta_\alpha = a^\beta_{\alpha i}dx^i$. Заменяя, если нужно, эту связность ей эквивалентной (не меняющей развертки кривой $C \in R_n$), можно получить $\omega^0_0 = \omega^{n+1}_0 = 0$, $\omega^1_1 + \ldots + \omega^{n+1}_{n+1} = 0$. Тогда n выражений $\omega^i \equiv \omega^i_0$ независимы.

Рассмотрим в R_n множество кривых $\{C_\sigma\}$, выходящих из точки A и пусть $\{C'_\sigma\}$ — множество разверток этих кривых на S_{n+1}. Если каждая из кривых C_σ имеет в точке A касание порядка ν с гиперповерхностью $V_n \in S_{n+1}$, то говорят просто, что V_n имеет касание ν-го порядка с R_n.

Если ввести обозначения: $\omega^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha j}\omega^j$, $dx^j = b^j_m\omega^m$,

$$\frac{\partial f(x^1, \ldots, x^n)}{\omega^i} = b^l_i \frac{\partial f}{\partial x^l}, \quad a^i_{hk} = a^i_m\left(\frac{\partial b^m_k}{\omega^h} - \frac{\partial b^m_h}{\omega^k}\right),$$

$$R^\beta_{\alpha ij} = \frac{\partial \Gamma^\beta_{\alpha j}}{\omega^i} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\alpha i}}{\omega^j} + \Gamma^\beta_{\alpha m}a^m_{ij} + \Gamma^\gamma_{\alpha i}\Gamma^\beta_{\gamma j} - \Gamma^\gamma_{\alpha j}\Gamma^\beta_{\gamma i},$$

$$H_{ijk} = \Delta_k H_{ij} = \frac{\partial H_{ij}}{\omega^k} - \Gamma^a_{ik}H_{aj} - \Gamma^a_{jk}H_{ia},$$

$$D_k R^\beta_{\alpha ij} = \frac{\partial R^\beta_{\alpha ij}}{\omega^k} + \Gamma^\beta_{\gamma k}R^\gamma_{\alpha ij} - \Gamma^\gamma_{\alpha k}R^\beta_{\gamma ij} -$$

$$- \Gamma^m_{ik}R^\beta_{\alpha mj} - \Gamma^m_{ik}R^\beta_{\alpha im}\ (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, n+1;$$

$$i, j, k, l, m = 1, \ldots, n),$$

то условия касания 6-го порядка V_n с R_n запишутся в виде:

$$R^{n+1}_{0lm} = 0,\ D_i R^{n+1}_{0lm} = 0,\ D_j D_i R^{n+1}_{0lm} = 0,\ D_k D_j D_i R^{n+1}_{0lm} = 0.$$

В случае симметрической связности эти уравнения упрощаются. Если при этом существует гиперповерхность V_n, которая имеет касание 6-го порядка с R_n в точке A, и если $H_{ijk} = 0$, то развертки кривых пространства R_n, проходящих через A, находятся на фиксированной гиперквадрике в R_n.

Пусть

$$\mathfrak{M}_i = \begin{pmatrix} R_{i112} & \ldots & R_{i1,\,n-1,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{in12} & \ldots & R_{in,\,n-1,\,n} \end{pmatrix},$$

где $R_{ijlm} = H_{ja}R^a_{ilm}$.

Возможны случаи: 1. Все матрицы $\mathfrak{M}_i$ имеют ранг $n-1$, тогда $H_{ijk} = 0$. 2. Некоторые из матриц $\mathfrak{M}_i$ имеют ранг $n-1$. Пусть такими матрицами будут $\mathfrak{M}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{M}_n$ $(l > 1)$. Тогда

$$H^\sigma_{ik} = 0,\ H^\sigma_{ai} = \mu_a\delta^\sigma_i;\ H^\sigma_{ab} - \mu_l\delta^\sigma_a - \mu_a\delta^\sigma_b = \mu^\sigma_{ab}\delta^\sigma_i$$

$(a, b = 1, \ldots, l,\ i = l+1, \ldots, n;\ \sigma = 1, \ldots, n)$, где $H^m_{ij} = H^{mk}H_{ijk}$, $H^{im}H_{mk} = \delta^i_k$. а) Все $\mu_{ab} = 0$. Тогда $H_{\sigma\tau\rho} = 0$ $(\sigma, \tau, \rho = 1, \ldots, n)$. б) Не все $\mu_{ab} = 0$. Тогда $l = n-1$. Считая $H_{n1} \neq 0$ (H_{na} не все равны нулю), можно привести одновременно асимптотическую форму к виду: $\sum_2^{n-1} H_{ij}\omega^i\omega^j + 2du^1\omega^n$ и форму Дарбу к виду: $\nu(du^1)^3$. Развертки кривых на многообразии Дарбу $u^1 = \text{const}$ находятся на поверхности $z^1 = 0$, $z^{n+1} = (1/2)\sum_2^{n-1} H_{ij}z^iz^j$, которая является пересечением гиперквадрики $z^{n+1} = (1/2)\sum_1^n H_{ij}z^iz^j$, с гиперплоскостью $z^1 = 0$.

В. Т. Базылев

3231. Об обобщенной форме Дарбу. II. Канитани (Sur la forme de Darboux généralisée. II. Kanitani Jôyô), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1955, A29, № 3, 229—248 (франц.)

Исследуется случай, когда матрица

$$\begin{pmatrix} Q^iR_{i112} & \ldots & Q^iR_{i1,\,n-1,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q^iR_{in12} & \ldots & Q^iR_{in,\,n-1,\,n} \end{pmatrix}$$

имеет ранг $n-2$. Можно считать при этом, что ранг матрицы $\mathfrak{M}_1$ (см. I мемуар автора, реф. 3230) также равен $n-2$. Тогда $R_{12lm} = 0$, $R_{2hlm} = \sum_{j=3}^n \mu^j_h R_{1jlm}$ $(h = 3, \ldots, n;\ l, m = 1, \ldots, n)$. Пусть уравнение

$$\begin{vmatrix} \mu^3_3 - \rho & \ldots & \mu^3_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu^n_3 & \ldots & \mu^n_n - \rho \end{vmatrix} = 0$$

имеет $e \geqslant 3$ различных корней. Гиперповерхность V_n относительно подвижного репера $[A, A_1, \ldots, A_{n+1}]$ имеет уравнение $z^{n+1} = \frac{1}{2}H_{ij}z^iz^j + \frac{1}{6}H_{ijk}z^iz^jz^k + \frac{1}{24}H_{ijlm}z^iz^jz^lz^m + \ldots$; указано выражение H_{ijk} и H_{ijlm} через H_{ij}. При этом прямая AA_{n+1} служит проективной нормалью для V_n. Проективные нормали вдоль любой кривой из R_n порождают развертывающуюся поверхность.

В. Т. Базылев

3232. Об обобщенной форме Дарбу. III. Канитани (Sur la forme der Darboux généralisée. III. Kanitani Jôyô), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1956, A30, № 1, 43—56 (франц.)

Предмет исследования и обозначения те же, что и в I мемуаре автора (реф. 3230). Однако исследование ведется в предположении, что ранг матрицы

$$\mathfrak{M}(Q) = Q^s R_{sik\ k+1} \quad \begin{pmatrix} s,\ i=1,\ \ldots,\ n \\ k=1,\ \ldots,\ n-1 \end{pmatrix}$$

равен $n-2$. В этом случае

$$R_{2klm} = \mu^j_k R_{1jlm}\ (i,\ j,\ k,\ l,\ m=1,\ \ldots,\ n).$$

Пусть $D(\rho) = \det\left|\mu^u_v - \delta^u_v \rho\right|$ $(u,\ v=3,\ \ldots,\ n)$ имеет различные корни $\rho_1, \ldots, \rho_l$ порядка $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ и пусть детерминанты $D(\rho_s)$ $(s=1, \ldots, l)$ имеют соответственно ранги $n-2-h_s$. Случай $l \geqslant 3$, $h_s = \lambda_s$ рассмотрен во II мемуаре автора (реф. 3231).

В реферируемой статье утверждается, что если не все $H_{\sigma\tau\rho}$ равны нулю и $l < 3$, будет иметь место $l=2$, $h_1 < \lambda_1$, $h_2 = \lambda_2$, а если $l=1$, $\lambda_1 = h_1$, форма Дарбу приводится к одному из трех типов: $H_{\sigma\tau\rho}\omega^\sigma\omega^\tau\omega^\rho =$

$$= (H_{12}\omega^1 + \omega^2)\,(3H_{\sigma\tau}\omega^\sigma\omega^\tau - (n+2)\,(H_{12}\omega^1 + \omega^2)^2);$$

$H_{\sigma\tau\rho}\omega^\sigma\omega^\tau\omega^\rho = H_{111}\,(\omega')^3$, $H_{12} \neq 0$; $H_{\sigma\tau\rho}\omega^\sigma\omega^\tau\omega^\rho = H_{333}\,(\omega^3)^3$, $H_{12} = H_{22} = 0$. Л. Е. Евтушик

3233. Дифференциальные инварианты пространства тензорных опорных элементов аффинной связности. **Лаптев Б. Л.**, Уч. зап. Казанского университета, 1956, **116**, № 1, 10—14

Рассматриваются пространства тензорных опорных элементов. Как было ранее показано автором (Уч. зап. Казанского ун-та, 1949, **109**, № 4, 187—216) в таком пространстве введение аффинной связности и ковариантного дифференцирования может быть осуществлено с помощью объекта аффинной связности $L^\alpha_{\beta\gamma}$ и тензора минус первого измерения $C^\alpha_{\beta\lambda_1\ldots\lambda_p}{}^{\mu_1\ldots\mu_q}$.

Так, для относительного тензора $T^{(\alpha)}_{(\beta)}$ ковариантный дифференциал будет иметь вид $\delta T^{(\alpha)}_{(\beta)} = dT^{(\alpha)}_{(\beta)} - \omega^\bullet_\bullet T^{(\alpha)}_{(\beta)}$, где дифференциальные формы ω выражаются через обычные дифференциалы dx^α, $d\omega^{(\lambda)}_{(\mu)}$ опорного элемента, что приводит к двум родам ковариантного дифференцирования. Отсюда, выражая альтернированные ковариантные производные второго порядка, автор приходит к трем тензорам кривизны и получает соответствующие тождества Риччи.

Рассматривая в пространстве тензорных опорных элементов аффинной связности пути как параметризованные прямые, вдоль которых касательный вектор переносится параллельно (при одновременном параллельном перенесении опорного тензора $w^{(\lambda)}_{(\mu)}$), автор получает уравнения путей:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + L^\alpha_{\beta\gamma}(x,\ w)\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0,\quad \frac{dw^{(\lambda)}_{(\mu)}}{dt} + M^{(\lambda)}_{(\mu)\rho}\frac{dx^\rho}{dt} = 0$$

и устанавливает, при надлежащем выборе начальных условий, единственность пути. Это позволяет ввести обобщенные нормальные координаты, для которых точечная часть путей, исходящих из элемента $(a^\alpha,\ p^{(\lambda)}_{(\mu)})$, определяется уравнениями: $y^\alpha = b^\alpha t$. При образовании системы координат $\{x^\alpha\}$ и $\{\bar{x}^\alpha\}$ отвечающие им нормальные координаты связываются между собой линейными однородными преобразованиями. Это позволяет ввести аффинные нормальные тензоры, что делает возможным доказать, что k-е расширение произвольного тензора выражается через его последовательные ковариантные производные и через ковариантные производные производных по $w^{(\lambda)}_{(\mu)}$ рассматриваемого тензора и первого и третьего тензоров кривизны и получить отсюда теорему приведения. А. З. Петров

3234. К теории геометрических объектов. III—IV. III. Специальные геометрические объекты, число компонент которых не меньше числа параметров. IV. Дифференциальные геометрические объекты первого, второго и третьего класса с любым числом компонент в одномерном пространстве. **Ацел** (Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. III—IV. III. Spezielle geometrische Objekte mit nicht weniger Komponenten als Parametern. IV. Differentielle geometrische Objekte erster, zweiter und dritter Klasse von beliebiger Komponentenzahl im eindimensionalen Raum. Aczél J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 1—2, 19—52 (нем.)

Настоящая работа является продолжением ранее изданной работы автора (РЖМат, 1958, 676).

Доказывается лемма: если $\bar{y} = f(\bar{x}, U) = f\left[\begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{X} \end{pmatrix}, U\right]$ — специальный геометрический объект с u компонентами и v параметрами U $(\bar{x}, \bar{y} \in u\text{-мерному}$ точечному множеству Π, $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{X} \end{pmatrix}$, $\bar{x}_0 = (x_1, \ldots, x_{u-v})$, $X = (x_{u-v+1}, \ldots, x_u)$; $U = (U_1, \ldots, U_v)$ пробегают полугруппу $\Sigma \subset \Pi$ такой, что 1) уравнения $f\left[\begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ A \end{pmatrix}, \bar{Y}\right] = \bar{x}$ однозначно разрешимы относительно $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$ при фиксированном A, то уравнения преобразования его компонент имеют вид

$$f(\bar{x},\ U) = \bar{h}\left[\begin{pmatrix} \bar{g}_0(\bar{x}) \\ G(\bar{x}) \circ U \end{pmatrix}\right],$$

где $\bar{g}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{g}_0(\bar{x}) \\ G(\bar{x}) \end{pmatrix}$ — некоторая однозначно обратимая функция, $\bar{h}$ — ее обращение, $\circ$ — символ операции умножения в полугруппе Σ.

С помощью леммы находятся уравнения преобразования компонент чисто дифференциальных геометрических объектов класса w в t-мерном пространстве при предположениях аналогичных 1) и условии $u \geqslant t\left[\binom{t+w}{w} - 1\right]$. Далее находятся все чисто дифференциальные геометрические объекты 1-го, 2-го и 3-го классов с любым числом компонент в одномерном пространстве при условиях типа 1) и несколько ослабленных (условие 1) исключает, в частности, плотности Вейля). Но и это ослабленное условие не дает один объект 3-го класса с 2 компонентами, полученный референтом ранее (Матем. сб., 1950, 26 (2), 161—182). Этот объект автор получает при новом более специальном условии типа 1).

Результаты автора для случаев $u = v$ и $u > v$ кратко могут быть сформулированы так: при условии 1) всякий просто транзитивный, соответственно интранзитивный, дифференциально-геометрический объект класса w с u компонентами в t-пространстве подобен универсальному объекту или соответственно объединению универсального объекта с $u - t\left[\binom{t+w}{w} - 1\right]$ скалярами (Вагнер В., Докл. АН СССР, 1945, **46**, № 9, 383—386). Ю. Е. Пензов

3235. О геодезических координатах в финслеровых пространствах. **Оцуки** (On geodesic coordinates in Finsler spaces. Otsuki Tominosuke),

Math. J. Okayama Univ., 1957, 6, № 2, 135—145 (англ.)

Геодезическими координатами риманова пространства V_n автор называет координаты, введенные в окрестности геодезической дуги $\gamma: x^i = x^i(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, в которых символы Кристоффеля обращаются в нуль вдоль всей линии γ. Аналогично вводятся координаты в окрестности геодезической γ финслерова пространства F_n: берется в точке $s=0$ ортореper $e_1(0), \ldots, e_n(0)$ так, что последний вектор идет по касательной к γ, этот репер параллельно переносится в любую точку s геодезической γ, и по направлению $e = b^\alpha l_\alpha(s)$ ($\alpha = 1, \ldots, n-1$), проводится отрезок геодезической с длиной дуги t. За координаты в окрестности γ принимаются величины $u^\alpha = b^\alpha t$, $u^n = s$.

С каждым векторным полем ξ в F_n связывается риманово пространство $V_n(\xi)$, метрический тензор которого полагается равным метрическому тензору

$$g_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \text{ в } F_n,$$

вычисленному в каждой точке x по направлению вектора ξ в этой точке. Функция $L(x, \xi)$ определяет метрику финслерова пространства $ds^2 = L^2(x, dx)$. Доказывается, что если поле ξ содержит касательные векторы к линии γ, то γ является одновременно геодезической и в F_n, и в $V_n(\xi)$. Если γ является геодезической, а векторное поле ξ, содержащее касательные к γ, трансверсально семейству поверхностей $f(x^i) = \text{const}$ таких, что $\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j = 0$ вдоль γ, то во введенных выше координатах, являющихся геодезическими в $V_n(\xi)$, обращаются в нуль вдоль γ также и коэффициенты связности $\Gamma^i_{jk}(x, \xi)$ в финслеровом пространстве F_n. Коэффициенты $\Gamma^i_{jk}(x, \xi)$ определяются как обычные символы Кристоффеля с добавлением членов, содержащих производные по ξ^i от метрического тензора в F_n. Г. И. Кручкович

3236. О кривизне метрического пространства с кручением, допускающего параллельные пути. К а ц у р а д а (On the curvature of a metric space with torsion tensor admitting parallel paths. K a t s u r a d a Y o s h i e), Tensor, 1955, 5, № 2, 85—90 (англ.)

Изучены необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет тензор кривизны в метрическом пространстве со связностью, обладающей кручением, если оно допускает параллельные пути в произвольных направлениях. Понятие параллельных кривых и условия параллельности аффинных путей рассмотрены автором в предыдущих работах (J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1951, 12, 17—28; Tensor, 1952, 2, 85—88; 1954, 4, 1—8). В настоящем случае эти условия приводят к равенству нулю тензора Риччи и далее к антисимметрии ковариантных составляющих тензора кривизны по всем индексам. Следовательно тензор кривизны такого пространства имеет вид $L^i_{jkl} = L^i_{[jkl]} = 2S^i_{[jk|l]} - 4S^i_{[jk}S^i_{|t|l]}$, где S^i_{jk} — тензор кручения, а $S^i_{jk\ l}$ — его ковариантная производная.

Получены условия того, что тензор кривизны является псевдогармоничным или псевдокиллинговым. Б. Л. Лаптев

3237. Развитие геометрии обобщенных метрических пространств линейных элементов. М о р (Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume. M o ó r A r t h u r), Acta scient. math., 1956, 17, № 1—2, 85—120 (нем.)

Пусть L_n — $(2n-1)$-мерное многообразие линейных элементов $(x^1, x^2, \ldots, x^n, v^1, v^2, \ldots, v^n)$, где x^i определяют точку (центр линейного элемента), v^i — направление. Многообразие L_n называется обобщенным метрическим пространством линейных элементов, если в нем задан основной метрический тензор $g_{ij}(x, v)$, $g_{ij} = g_{ji}$. Предполагается, что g_{ij} по крайней мере четыре раза дифференцируем. Длина кривой $x^i = x^i(t)$ в L_n по отношению к полю направлений $v^i = v^i(t)$ определяется следующим образом:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t), v(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt\,.$$

Обобщенное метрическое пространство линейных элементов является пространством Финслера, если

$$v^r \frac{\partial g_{rk}}{\partial v^i} + v^r \frac{\partial g_{ri}}{\partial v^k} + \frac{1}{2} v^r v^s \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial v^i \partial v^k} = 0.$$

Инвариантный дифференциал вектора ξ^i автор определяет в форме

$$D\xi^i = d\xi^i + M^i_{jk}\xi^j dv^k + L^i_{jk}\xi^j dx^k$$

и предполагает, что M^i_{jk} удовлетворяют соотношениям

$$M^i_{jk}l^k \equiv M^i_{j0} = 0, \quad \overline{M}^j_{0i}\overline{M}^i_{0k} = 0,$$

где

$$l^k = \frac{v^k}{F(x, v)}, \quad F(x, v) = \sqrt{g_{ij}(x, v)v^i v^j}, \quad \overline{M}^i_{jk} = FM^i_{jk}$$

Если обозначим через $\omega^i(d)$ инвариантный дифференциал вектора l^i, то

$$D\xi^i = d\xi^i + \omega^i_j(d)\xi^j,$$

где

$$\omega^i_j(d) = M^{*i}_{jk}\omega^k(d) + L^{*i}_{jk}\,dx^k, \quad M^{*i}_{jk} = \overline{M}^i_{jr}(\delta^r_k - \overline{M}^r_{0k}),$$

$$L^{*i}_{jk} = L^i_{jk} - M^{*i}_{jt}L^t_{0k}.$$

Первая и вторая ковариантные производные вектора ξ^i в работе определены по формулам:

$$\xi^i|_k = \partial_k\xi^i - \xi^i\|_r L^{*i}_{rk}\xi^r, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \|_k = F\frac{\partial}{\partial v^k},$$

$$\xi^i_{jk} = \xi\|_r(\delta^r_k - M^{*r}_{0k}) + M^{*i}_{tk}\xi^t.$$

Автор требует, чтобы параллельное перенесение было метрическим, т. е. чтобы

$$g_{ik;\,m} \equiv g_{ik}\|_r(\delta^r_m - M^{*r}_{0m}) - 2M^{*}_{(ik)m} = 0,$$

$$g_{ik}|_m \equiv \partial_m g_{ik} - g_{ik}\|_r L^{*r}_{0m} - 2L^{*}_{(ik)m} = 0. \qquad (1)$$

В работе показано, что M^{*i}_{jk}, L^{*i}_{jk} определяются из (1) через g_{ij} не однозначно, а с точностью до произвольных тензоров

$$\mu_{ijk},\ \sigma_{ijk},\ \mu_{ijk} = -\mu_{jik},\ \sigma_{ijk} = -\sigma_{jik}.$$

Тензоры кручения и кривизны обобщенного метрического пространства линейных элементов автор определяет с помощью форм

$$\Omega^i = [dx^i,\ \omega^i_l(d)], \quad \Omega^i_j = [\omega^k_j(d),\ \omega^i_k(d)] - D\omega^i_j(d).$$

Во второй части работы рассматривается группа движений обобщенного метрического пространства линейных элементов. Выводятся уравнения Киллинга

$$\zeta_{ik}+\zeta_{ki}=0,$$

где

$$\zeta_{ik}=\xi_i|_k+A_{ikm}\left(\xi^m|_0-2\Omega^{*m}_{t0}\xi^t\right)-2\Omega^{*}_{t(ik)}\xi^t,$$

$A_{ikm}=\frac{1}{2}g_{ik}\|_m$, $\Omega^{*ij}_{tk}=L^{*}_{[tk]}$. Рассматривается строение тензоров кривизны метрических пространств линейных элементов, которые допускают $\frac{1}{2}n(n+1)$-мерную группу движений. Рассмотрены следующие частные случаи:

$A_1)$ $\zeta_{ik}=\zeta_i|_k$, $\bar{R}^j_{0km}=0$, $\Omega^{*ij}_{ik}=0$;

$A_2)$ $\zeta_{ik}=\zeta_i|_k$, $\Omega^{*ij}_{ik}=0$, $\zeta_i\|_r=0$, $\bar{R}^r_{ikr}=\bar{R}^r_{irk}$;

$A_3)$ $\Omega^{*}_{t(ik)}=0$, $A_{ikm}=0$,

где

$$\frac{1}{2}\bar{R}^i_{jts}=\partial_{[s}L^{*i}_{|j|t]}-L^{*m}_{0[s}L^{*i}_{|j|t]}\|_m+L^{*i}_{m[s}L^{*m}_{|j|t]},$$

и доказана теорема: В случае A_1) кривизна метрического пространства линейных элементов L_n тождественно равна нулю; в случае A_2) L_n является пространством скалярной кривизны; в случае A_3) основной тензор кривизны имеет форму

$$\bar{R}_{ktij}=\frac{\bar{R}}{n(n-1)}(g_{ki}g_{tj}-g_{kj}g_{ti})+Q^{*}_{ktij},$$

$$\bar{R}=g^{ki}\bar{R}^t_{kit},$$

где Q^{*}_{ktij} зависят от Ω^{*ij}_{kt} и их ковариантных производных.

Обобщенное метрическое пространство линейных элементов называется пространством скалярной кривизны в смысле Бервальда, если

$$\bar{R}_{ktij}=\frac{\bar{R}}{n(n-1)}(g_{kj}g_{tj}-g_{tj}g_{ki}).$$

В. И. Близникас

3238. О теореме Шура в обобщенных метрических пространствах линейных элементов. Мор (Über den Schurschen Satz in allgemeinen metrischen Linienelementräumen. Móór Arthur), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, A60, № 3, 290—301, Indagationes math., 1957, 19, № 3, 290—301 (нем.)

Автор называет многообразие $\mathfrak{M}$ линейных элементов (x^i, v^i) L_n-пространством, если в $\mathfrak{M}$ определена метрика посредством основного метрического тензора $g_{ij}(x, v)$ и параллельное перенесение векторов в форме

$$D\xi^i=\xi^i|_k\,dx^k+\xi^i_{;k}\omega^k(d),\quad (i, j, k=1, 2, \ldots, n),$$

где $\xi^i|_k$ и $\xi^i_{;}$ — ковариантные производные, определение которых дано в другой работе автора (реф. 3237). L_n-пространство имеет четыре тензора кривизны.

Если тензор кривизны R^i_{pjk} L_n-пространства имеет форму

$$R^i_{0jk}=\frac{2}{3}R\|_{[j}\left(\delta^i_{k]}-l^il_{k]}\right)+2R\delta^i_{[k}l_{j]},$$

где

$$R^i_{0jk}=R^i_{pjk}l^p,\quad l^p=\frac{v^p}{F},\quad F=\sqrt{g_{ij}(x, v)\,v^iv^j},$$

$$R=R(x, v),\quad \|_j=F\frac{\partial}{\partial v^j},$$

то L_n-пространство автор называет L_n-пространством скалярной кривизны первого рода. Если тензор кривизны $\bar{R}^i_{ijk}$ L_n-пространства имеет форму

$$\bar{R}^i_{0jk}=\frac{2}{3}R\|_{[j}\left(\delta^i_{k]}-l^il_{k]}-l^iA_{|00|k]}\right)+$$

$$+2R\delta^i_{[k}\left(l_{j]}+A_{|00|j]}\right),$$

где

$$\bar{R}^i_{0jk}=\bar{R}^i_{pjk}l^p,\quad A_{ijk}=\frac{1}{2}g_{ij}\|_k,$$

го L_n-пространство названо L_n-пространством скалярной кривизны второго рода. В работе найдены классы L_n-пространств скалярной кривизны первого и второго рода, для которых справедлива теорема Шура, т. е. если $R=R(x)$, то $R=\text{const}$. В. И. Близникас

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3239. Общая схема релятивистской физики. Сурьо (Un schéma général pour la physique relativiste. Souriau Jean-Marie), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 23, 2779—2781 (франц.)

Предпринята попытка построить обобщенную теорию, которая включала бы теорию гравитации Эйнштейна, релятивистскую теорию упругих сред и космологическую схему, возникающую при введении в уравнения Эйнштейна космологического члена. Построение опирается на общие групповые свойства физических явлений, сформулированные в форме четырех аксиом: а) вселенная есть упорядоченное риманово многообразие четырех измерений гиперболического типа; б) всякое наблюдаемое физическое явление определяется некоторым числом N переменных состояния $z^\alpha=z^\alpha(x^i)$ $(\alpha=1, 2, \ldots, N)$; в) законы преобразований множеств z^α должны быть таковы, чтобы соответствующее им представление было инвариантным; г) если обозначить через φ полное представление (сумму представлений сосуществующих явлений), то интеграл $\int\varphi d\omega$ должен быть постоянным при всех изменениях переменных состояния и компонент метрического тензора g_{ij} $(d\omega=\sqrt{g}\,dx^1\ldots dx^4)$.

Я. И. Пугачев

3240. Непредположительная теория относительности как неголономная геометрия Лагерра, реализуемая в трехмерном евклидовом пространстве с параллельно переносимым кручением, связанная с неголономными действиями. Такасу (Non-conjectural theory of relativity as a non-holonomic Laguerre geometry realized in the three-dimensional teleparallelismically torsioned cartesian space fibered with non-holonomic actions. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1955, 3, № 1—2, 1—52 (англ.)

Работа подытоживает исследования автора, начатые в 1938 г. и выразившиеся в ряде статей (19 названий) (РЖМат, 1957, 1786). Строится вариант единой теории поля, использующей в качестве инструмента исследования неголономную геометрию Лагерра. Автор считает ее физически необходимой (отсюда термин «непредположительная»). Работа состоит из семи §§ и

вступления, в котором дается терминология и основные определения. Рассматривая векторную форму $dS = \gamma_l \omega^l$ $\left(\omega^l = \omega^l_\mu dx^\mu\right)$ $(l, m, \ldots = 1, 2, 3, 4;\ \lambda, \mu \ldots = 1, 2, 3, 4)$, где ω^l представляет неголономные вообще компоненты действия, а ω^l_μ — компоненты энергии, ω^4_μ — компоненты статического потенциала (x^4 — время), автор определяет далее ω^4 как радиальное действие частицы и налагает требование: $\gamma_h\gamma_k + \gamma_k\gamma_h = 2\delta_{hk}$, $h, l, k = 1, 2, 3, 5$; $\gamma_4 = i\gamma_5$. Тогда форма $dS^2 = \omega^l\omega^l = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ определяет тензор $g_{\mu\nu} = \underset{-}{g}_{\mu\nu} + \underset{\smile}{g}_{\mu\nu}$, где $\underset{-}{g}_{\mu\nu} = \omega^4_\mu\omega^4_\nu -$ $- \omega^i_\mu\omega^i_\nu$, а $\underset{\smile}{g}_{\mu\nu}$ выражается через γ_k и ω^l. Таким образом, вместо 4-мерного многообразия Эйнштейна рассматриваются многообразия $4^2 + 4 = 20$ измерений, определяемое опорным объектом $\left(\omega^l_\mu,\ x^\lambda\right)$.

Автор считает обоснованными следующие принципы: 1) физике отвечает геометрия сфер; 2) классификация физики должна отвечать геометрии положенной в основу и 3) основные физические понятия при двух геометриях, положенных в основу, образуют дуализм, который позволяет ввести соответствие между ними. Так, обычной скорости отвечает в шаровой геометрии дуальная скорость, энергии — дуальная энергия и т. д. В §§ 1 и 2 вводятся геодезические кривые первого рода (Картан) и второго рода (Такасу) и доказывается основная теорема: Геодезические первого и второго рода являются решениями экстремальной проблемы: $\delta S = 0$. Далее определяется геометрия Лагерра как геометрия ориентированных сфер в 3-мерном евклидовом пространстве с дуализмом: 4-мерное пространство $(a^i,\ a^4 = ir) \longleftrightarrow$ 3-мерное пространство ориентированных сфер с центром (a^i) и радиусом r. По такому же принципу римановой геометрии V_n ставится в соответствие неголономное пространство Лагерра L_{n-1}. Дается также определение параболической геометрии Ли. При таком дуализме геодезическим первого и второго рода будут отвечать геодезические гиперсферы первого и второго рода соответственно. Отсюда возникает возможность построения неголономной геометрии Лагерра с кручением, отличным от нуля.

В 3, 4 §§, сопоставляя пространству Минковского голономную 3-мерную геометрию Лагерра, автор рассматривает в таком формализме специальную теорию относительности, записывая уравнения движения свободной частицы и уравнения Максвелла.

Отображение на неголономную геометрию Лагерра дает общий релятивизм (непредположительная теория). Решение уравнения вариации действия $\delta S = 0$, определяющее геодезическую Такасу, будет определять «гомоцентрическую» систему ориентированных геодезических гиперсфер, что приводит к понятию фронта энергии геодезических сфер. Таким образом группе лоренцевых преобразований пространства Минковского сопоставляется классическая геометрия Лагерра, а геометрии пространств Эйнштейна $(R_{\mu\nu} = \varkappa g_{\mu\nu})$ отвечает неголономная геометрия Лагерра L_3. Если Φ^i обозначает вектор электромагнитного потенциала, а Φ^4 — электростатического потенциала, σ^i — компоненты плотности тока и σ^4 — электрической плотности, то обозначая $\Phi = \gamma_i\Phi^i$, $J = \gamma e^{\sigma l}$, можно записать обобщенное уравнение Максвелла в общем релятивизме в компактной форме: $4\dfrac{d^2\Phi}{ds^2} = J$.

В 6 § теория применяется к решению частных задач. Рассматривается случай плоского движения и задача определения планетарных орбит и т. д. Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, автор приходит к выводу об эквивалентности теорий его и Эйнштейна. Библ. 82 назв. А. З. Петров

3241. О корректности постановки задачи Коши и о свойствах гармонических координат в общей теории относительности. Франкль Ф. И., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 189—196

Работа содержит критику некоторых утверждений В. А. Фока, относящихся к общей теории относительности. И. М. Яглом

3242. Замечание к работе Ф. И. Франкля «О корректности постановки задачи Коши и о свойствах гармонических координат в общей теории относительности. Фок В. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 197—198

Ответ на критические замечания Ф. И. Франкля (реф. 3241).

3243. Необходимость сингулярностей в решении уравнений поля общей теории относительности. Комар (Necessity of singularities in the solution of the field equations of general relativity. Komar Arthur), Phys. Rev., 1956, **104**, № 2, 544—546 (англ.)

Как известно, нестационарные решения уравнений Эйнштейна содержат, в частности, особую точку, из которой «расширяется» вся вселенная.

Опираясь на шесть введенных им гипотез и анализируя обычные уравнения тяготения, автор доказывает существование особых точек (сингулярностей) в решении этих уравнений. Отсюда он делает вывод о конечности отрезка времени, протекшего с момента «сотворения вселенной». Я. И. Пугачев

3244. Интегрирование уравнений общей относительности. Фурес-Брюа (Sur l'intégration des équations de la relativité générale. Fourès-Bruhat Yvonne), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 6, 951—966 (франц.)

Рассматривается решение задачи Коши для уравнений поля тяготения Эйнштейна. Эта проблема сведена Лихнеровичем (Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson, 1955) к двум проблемам: 1) проблеме определения начальных данных Коши и 2) проблеме интегрирования по времени, если гиперповерхность Коши гиперболического типа. Проблема 2) приводит к основным затруднениям. В работе для решения этой задачи используется метод подвижного репера Картана. Задача решается в классе C^4 функций, в предположении, что метрика регулярная. Основная форма $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ рассматривается в такой специальной системе координат, где $g^{44} > 0$ и $g_{ij}dx^i dx^j$ — определенно отрицательная форма $(i, j = 1, 2, 3)$. Ориентированная гиперповерхность Коши определяется уравнением $x^4 = 0$. В первом § дается выражение уравнений Эйнштейна в подвижном репере, для чего вводятся линейные формы $\omega^\alpha = a_{\alpha\beta}dx^\beta$, связанные с основной формой условием $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \sum(\omega_\alpha)^2$ и коэффициенты вращения репера $\gamma_{\beta\alpha\lambda}$, определяемые условиями $\omega_{\alpha\alpha} = \gamma_{\beta\alpha\lambda}\omega_\lambda$, $\gamma_{(\alpha\beta)\lambda} = 0$, $\gamma_{\alpha[\lambda\beta]} = C_{\beta\lambda\alpha}$, где $d\omega_\alpha = {}^1/_2 C_{\beta\lambda\alpha}\omega_\beta \wedge \omega_\lambda$. Это позволяет записать компоненты тензора кривизны в виде $K_{\alpha\beta\mu\nu} = \partial_\mu\gamma_{\alpha\beta\nu} - \partial_\nu\gamma_{\alpha\beta\mu} - \gamma_{\alpha\lambda\mu}\gamma_{\beta\lambda\nu} + \gamma_{\alpha\lambda\nu}\gamma_{\beta\lambda\mu} +$ $+ \gamma_{\alpha\beta\lambda}C_{\mu\nu\lambda}$ и, следовательно, компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну пространства.

Полагая $\gamma_{4i4} = P_{ih}$ и $P_{44} = P$, автор записывает систему уравнений поля в виде: $R_{ih} = 0$, $R_{4h} = 0$, $R_{44} = 0$, где первые шесть уравнений служат для интегрирования по времени, а последние четыре для определения начальных данных Коши. Последняя задача связывается со средней кривизной и квадратом второго основного тензора гиперповерхности Коши. Указывается конструктивный метод определения аппроксимаций для начальных данных Коши.

Дается постановка вопроса о решении задачи в целом.
А. З. Петров

3245. Проективное изменение аффинной связности в едином поле Эйнштейна. Хусейн, Мишра (Projective change of affine connections in Einstein's unified field. Husain S. I., Mishra R. S.), Tensor, 1956, 6, № 1, 26—31 (англ.)

Рассматривая второй вариант единой теории Эйнштейна, для которого уравнения поля имеют вид: $g_{ij;\,k}=g_{ij,\,k}-g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik}-g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj}$; $\Gamma_i\equiv\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}=0$; $R_{ij}=0$; $R_{ij,\,k}+R_{jk,\,i}+R_{ki,\,j}=0$, где Γ^i_{jk} — аффинная связность с кручением, g_{ij} — несимметрический тензор и R_{ij} — свернутый тензор кривизны данной аффинной связности. Запятой обозначаются частные производные, а точкой с запятой — ковариантные (относительно Γ^i_{jk}). Авторы исследуют проективные инварианты этой теории.

Так как общее изменение аффинной связности, сохраняющее параллелизм, можно записать в виде: $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+2\delta^i_j\lambda_k$ (λ_k — произвольный вектор), то можно показать, что пути, удовлетворяющие уравнениям поля, будут также и путями для $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}$. Доказательство этого факта приводится и следует из того, что ${}^*\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\delta^i_j\lambda_k+\delta^i_\alpha\lambda_j$, а ${}^*\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\delta^i_j\lambda_k-\delta^i_k\lambda_j$. Отмечается, что ${}^*R^i_{jkl}=R^i_{jkl}$ в том и только в том случае, если λ_k — градиентное поле.

Далее авторы исследуют, какие величины и уравнения будут инвариантами такого преобразования. Находятся следующие проективные инварианты: 1. $R_{jk}={}^*R_{jk}$; 2. $R_{jk,\,l}+R_{kl,\,j}+R_{ij,\,k}={}^*R_{jk,\,l}+{}^*R_{kl,\,j}+{}^*R_{ij,\,k}$; 3. $I^i_{ikl,\,m}+I^i_{ilm,\,k}+I^i_{imk,\,l}\equiv 0$, где $I^i_{jkl}\equiv R^i_{jkl}+\delta^i_jR_{kl}$; 4. $F^i_{jkl}\equiv R^i_{jkl}-\frac{1}{4}\delta^i_j\Lambda_{kl}$, где $\Lambda_{kl}\equiv R^i_{ikl}$; 5. $F_{jk,\,l}+F_{kl,\,j}+F_{lj,\,k}$, где $F_{jk}\equiv F^i_{jki}$.

Определяются также аналоги тождеств Бианки, которые имеют место в этой единой теории для величин $I^i_{jkl;\,m}$ и $F^i_{jkl;\,m}$, что приводит к семи тождествам.

В физической интерпретации является интересным тот факт, что последние две группы уравнений поля — проективно-инвариантны.
А. З. Петров

3246. Алгебраическое исследование метрического тензора общего электромагнитного поля в единой теории Эйнштейна—Шрёдингера. Мавридес (Étude algébrique d'un tenseur métrique et d'un champ électromagnétique général en théorie unitaire d'Einstein — Schrödinger. Mavridès Stamatia), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 9, 1149—1151 (франц.)

Основываясь на том, что согласно теории, предложенной Маурер—Тизон (РЖМат, 1957, 7364), изучение характеристических многообразий в единой теории Эйнштейна—Шрёдингера сводится к изучению двух коник: $h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=a_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=0$, где $a^{\alpha\beta}=\frac{2\gamma}{g}\gamma^{\alpha\beta}-h^{\alpha\beta}$, автор ставит вопрос определения контравариантных компонент тензора $a^{\alpha\beta}$, если заданы ковариантные компоненты $a_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}+n_{\alpha\beta}=I\gamma_{\alpha\beta}+Gh_{\alpha\beta}$, где $\gamma_{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta}$ — симметрическая и кососимметрическая части метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ единой теории и, наоборот, — определение $a_{\alpha\beta}$ при заданном $a^{\alpha\beta}$. Доказывается, что если $a_{\mu\nu}=m_{\mu\nu}+n_{\mu\nu}=I\gamma_{\mu\nu}+Gh_{\mu\nu}$, то

$$a^{\mu\nu}=\frac{1}{a}\{m(1+\alpha)m^{\mu\nu}+n(1+\beta)n^{\mu\nu}-mm^{\mu\rho}m^{\nu\sigma}n_{\sigma\rho}-nn^{\mu\rho}n^{\nu\sigma}m_{\rho\sigma}\},\quad \alpha=m^{\rho\sigma}n_{\rho\sigma},\ \beta=n^{\rho\sigma}m_{\rho\sigma},$$

где a — выражается через m, n, α, β и инварианты $m^{\mu\rho}m^{\nu\sigma}n_{\mu\nu}n_{\rho\sigma}$, $n^{\mu\beta}n^{\nu\sigma}m_{\rho\nu}m_{\rho\sigma}$ и очевидным образом получает выражение для $a_{\mu\nu}$ при заданном $a^{\mu\nu}=p^{\mu\nu}+q^{\mu\nu}$. В приложении к единой теории Эйнштейна—Шрёдингера, когда $p^{\mu\nu}=I\gamma^{\mu\nu}$, $q^{\mu\nu}=Gh^{\mu\nu}$, скаляры, фигурирующие в правых частях, выражаются через I и G.

Аналогично, для электромагнитного поля $F_{\mu\nu}=r_{\mu\nu}+s_{\mu\nu}$, где $r_{\mu\nu}$, $s_{\mu\nu}$ — кососимметрические тензоры, получается $\sqrt{F}F^{\mu\nu}=\sqrt{r}\,r^{\mu\nu}+\sqrt{s}\,s^{\mu\nu}$, где $\sqrt{F}=\sqrt{r}+\sqrt{s}+\frac{\sqrt{r}}{4}r^{\mu\nu}s_{\mu\nu}+\frac{\sqrt{s}}{4}s^{\mu\nu}r_{\mu\nu}$, а также находится $F_{\mu\nu}$ при заданном $F^{\mu\nu}$.
А. З. Петров

3247. Статические сферически симметричные решения в единой теории поля. Моффат (The static spherically symmetric solutions in a unified field theory. Moffat John), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, 53, № 2, 489—493 (англ.)

Дано решение проблемы Нордстрема в рамках единой теории поля с симметричным комплексным метрическим тензором, предложенной автором (реф. 3227).

Полученные результаты и метод решения хорошо известны в теории относительности, они приводятся как иллюстрация эффективности новой теории.
Я. И. Пугачев

3248. О постоянном гравитационном поле с сингулярностями свободной группы звезд. Сен, Рой (On a steady gravitational field of a star cluster free from singularities. Sen N. R., Roy T. C.), Z. Astrophys., 1954, 34, № 2, 84—90 (англ.)

Решается проблема, предложенная Эйнштейном (Ann. Math., 1939, 40) об определении гравитационного стационарного поля для статистического распределения звезд на круговых орбитах. Авторы исходят из идеи, высказанной Эйнштейном, что постоянное сферически-симметрическое гравитационное поле может быть сконструировано как поле, порождаемое большим количеством частиц, двигающихся по круговым орбитам, которые будут перемещаться как большие круги на концентрических сферических поверхностях.

Исходя из метрики $ds^2=-a(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+bdt^2$, где a и b — функции $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, а тензор энергии-импульса, согласно Эйнштейну, имеет вид

$$T_{11}=T_{22}=\tfrac{1}{2}mna^{-1/2}\frac{\beta'}{\alpha'}\left(\frac{\alpha'}{\alpha'-\beta'}\right)^{1/2},$$

$$\frac{a}{b}T_{44}=mna^{-1/2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha'-\beta'}\right),$$

где $\alpha=\ln(r^2a)$, $\beta=\ln b$, а m — масса покоя частиц и n — плотность, уравнения поля, как это можно показать, допускают решения в виде $a=a_0e^{-cr}$, $b=b_0\frac{e^{cr/2}}{2-cr}$, где a_0 и b_0 — постоянные. Это позволяет определить плотность n и записать метрику внешнего поля в форме

$$ds^2=-\left(1+\frac{\mu}{2r}\right)^4(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+\left(\frac{1-\frac{\mu}{2r}}{1+\frac{\mu}{2r}}\right)^2dt^2.$$

Выясняется вопрос, является ли особенность $r=0$ физической сингулярностью. Авторы, используя методы Эйнштейна, приходят к отрицательному ответу. Затем определяются константы, входящие в потенциалы, исследуются возможные значения постоянных и некоторые физические свойства поля.

А. З. Петров

3249. Последовательная линеаризация уравнений последней единой теории поля Эйнштейна. Удескини (Successiva linearizzazione della ultime equazioni del campo unitario einsteiniano. Udeschini Paolo), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 15, № 3—4, 165—170 (итал.)

Рассматривается второй вариант единой теории Эйнштейна и производится исследование уравнений поля при различных аппроксимациях. Как известно, эти уравнения имеют вид

$$g_{ikjl}=0,\ R_{ik}=0,\ \Gamma_i\equiv \underset{\smile}{\Gamma^s_{is}}=0,$$

$$R_{ik,\,l}+R_{li,\,k}+R_{kl,\,i}=0,$$

где в четырехмерном пространстве (x^0, x^1, x^2, x^3) задается поле тензора $g_{ik}=\underset{\frown}{g_{ik}}+\underset{\smile}{g_{ik}}$, симметрическая часть которого $\underset{\frown}{g_{ik}}$ представляет гравитационное поле, а кососимметрическая $\underset{\smile}{g_{ik}}$ — электромагнитное. $\underset{\smile}{\Gamma^l_{(jk)}}$ и $\underset{\smile}{\Gamma^l_{ik}}$ отвечают указанным выше тензорам и служат для построения тензора Риччи

$$R_{ik}=\left[\Gamma^s_{(is)s}-\Gamma^t_{(it)}\Gamma^s_{(sk)}\right]-\left[\Gamma^s_{(is),k}-\Gamma^t_{(ik)}\Gamma^s_{(ts)}\right].$$

В первом варианте предполагалось $\underset{\smile}{R_{ik}}=0$.

Автор строит первую аппроксимацию уравнений поля при предположениях, что $g_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$, где

$$a_{ik}=\begin{cases}1, & i=k=0,\\ -1, & i,\ k=1,\ 2,\ 3,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

а тензор $b_{ik}=\underset{\frown}{b_{ik}}+\underset{\smile}{b_{ik}}$ мал по сравнению с a_{ik}. Это приводит к выводу $\Box\underset{\frown}{b_{ik}}=0$, $\Box\varepsilon^{arik}\underset{\smile}{b_{ik;\,r}}=0$, где $\Box$ — обычный оператор Даламбера, и $\varepsilon^{arik}\underset{\smile}{b_{ik,\,r}}=0$, $\Box\,\mathrm{div}\,{}^*b_{ik}=0$, где ${}^*b$ означает первую аппроксимацию. Третья группа этих уравнений совпадает с уравнениями Максвелла.

Далее автор строит вторую аппроксимацию, полагая $g_{ik}=a_{ik}+b_{ik}+c_{ik}$; тогда a_{ik} и b_{ik} берутся из первой аппроксимации, а c_{ik} определяется условиями порядка малости относительно a_{ik} и b_{ik}, что приводит к уравнениям поля $\Box\,\underset{\frown}{c_{ik}}=\underset{\frown}{B_{ik}}$, $\Box\,\varepsilon^{arik}\underset{\smile}{c_{ik,\,r}}=\varepsilon^{arik}\underset{\smile}{B_{ik,\,r}}$, где $\underset{\frown}{B_{ik}}$ и $\underset{\smile}{B_{ik}}$ выражаются через a_{ij}, b_{ij}, их контравариантные компоненты и через коэффициенты связности. Дается интерпретация этой системы в терминах электромагнитного и гравитационного полей.

А. З. Петров

3250. Единая релятивистская теория гравитации и электромагнетизма. II. Эйзенхарт (A unified theory of general relativity of gravitation and electromagnetism II. Eisenhart Luther P.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 9, 646—650 (англ.)

Рассматривается вариант единой теории, базирующейся на симметрическом тензоре g_{ij}, аффинной связности Γ^i_{jk} и электромагнитном векторном поле φ_i, при помощи которого конструируется тензор электромагнитного поля $F_{ij}=\varphi_{i,\,j}-\varphi_{j,\,i}=\varphi_{i;\,j}-\varphi_{j;\,i}$, где запятая означает частные производные, а точка с запятой — ковариантные производные относительно метрики g_{ij} (РЖМат, 1957, 6643). Это позволяет ввести величины: тензор $a^i_{jh}=\Gamma^i_{hj}-\left\{{i\atop hj}\right\}$, где $\left\{{i\atop hj}\right\}$ — символ Кристоффеля, отвечающий g_{ij}, тензор кривизны Γ^i_{jkl}, отвечающий связности Γ^i_{hj}, и тензор Риччи Γ_{jh} — и определить их связь с тензором кривизны и тензором Риччи определяемыми g_{ij}, если воспользоваться a^i_{jh}.

В статье устанавливаются зависимости между этими величинами. Показывается что симметрическая часть тензора Риччи, отвечающего связности Γ^h_{ij}: $\Gamma_{jh}=0$, а тензор Риччи R_{ij}, отвечающий метрическому тензору, является комитантом от a^h_{ij} и $a^k_{ij;\,l}$; так как, по смыслу теории $a^i_{jh}=F_{jh}\lambda^i$, то R_{ij} можно также выразить через тензорные поля F^i_j, λ^i, $\lambda^i_{;\,j}$, откуда следует, что $R_{jh}={}^1/_2\lambda^i(F_{ij;\,h}+F_{ih;\,j})$. Поэтому, поле λ^i — изотропное. Отсюда следует также, что $\lambda_{i;\,h}=\lambda_i\lambda_k F^k_h$, и поэтому, дифференцируя еще раз, альтернируя и применяя тождество Риччи, получим следующую зависимость между тензором кривизны R_{ijhk} и тензором электромагнитного поля: $\lambda^j R_{jikl}=\lambda_i\lambda^k F_{hl;\,k}$ и, после свертывания, $\lambda^j R_{jh}={}^1/_2\lambda^i\lambda^j F_{ih;\,j}$. Следовательно, $\lambda^i\lambda^j R_{hi;\,j}=0$ и ввиду этого можно констатировать наличие решения $\lambda^i F_{ih;\,j}=a\lambda_h\lambda_j$, $a=\mathrm{const}$, для этой системы уравнений в ковариантных производных. Отсюда важная для этой теории поля теорема: $R_{ij}=a\lambda_i\lambda_j$, $R=0$, $R^j_{h;\,j}=0$.

Полагая, как приближение, $\lambda_{i;\,h}=\lambda_i\lambda^k F_{hk}+F_{ih}$, автор определяет λ как единичный вектор и находит выражения для R_{hj} и $F_{ih;\,k}$ в этом случае, а также уравнения их связывающие.

А. З. Петров

3251. Опыт единой теории гравитации и электромагнетизма. Маравалль-Кассесновес (Ensayo de teoria unitaria de la gravitación y del electromagnetismo. Maravall Casesnoves Dario), Rev. mat. hisp.-amer., 1955, 15, № 5—6, 165—181 (исп.)

Реферируемая статья представляет собой вторую часть работы, начало которой опубликовано ранее (РЖМат, 1957, 4344). Положив в основу геометрию, метрика которой зависит от площади и линейной формы, т. е. комбинируя идеи Картана и Финслера и определяя параллелизм в смысле Леви-Чивита для такого пространства, автор развивает теорию кривых и поверхностей такого многообразия. Так, им получены формулы Френе, введено понятие касательной плоскости и нормали к гиперповерхности и т. д. Если n_i и n^i — ковариантные и контравариантные компоненты единичного вектора нормали, то

$$n_1=n_2=0,\ n_3=\frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\ \text{ и }\ n^1=\frac{g^{13}}{\sqrt{g^{33}}},$$

$$n^2=\frac{g^{23}}{\sqrt{g^{33}}},\quad n^3=\sqrt{g^{33}}.$$

Отсюда, дифференцируя ковариантно, автор получает компоненты дифференциала n:

$$Dn_1 = -n_3\left[\gamma^3_{11}dx^1 + \gamma^3_{12}dx^2 + a^3_1 ds\right],$$

$$Dn_2 = -n_3\left[\gamma^3_{21}dx^1 + \gamma^3_{22}dx^2 + a^3_2 ds\right],$$

$$Dn_3 = -dn_3 - n_3\left[\gamma^3_{31}dx^1 + \gamma^3_{32}dx^2\right].$$

Нормальная кривизна получает выражение

$$\frac{1}{\rho_n} = \left[\gamma^3_{11}\frac{dx^{1^2}}{ds^2} + 2\gamma^3_{12}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \gamma^3_{22}\frac{dx^{2^2}}{ds^2} + a^3_1\frac{dx^1}{ds} + a^3_2\frac{dx^2}{ds}\right]n_3.$$

Вводится понятие кручения и кривизны кривой, обобщаются теоремы Менье, Дюпена, Иоахимсталя и т. д. Физическая интерпретация предполагает, что a^i_j описывают электромагнитное поле, а квадратичная форма — гравитационное. Уравнения поля пишутся в виде:

$$R_{ik} = -\chi\left[T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right],$$

где R_{ik}, T_{ik}, χ — тензор Риччи, тензор энергии и гравитационная константа соответственно. Траектория частицы в таком поле описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + a^i_j\frac{dx^j}{ds} = 0,$$

где, в чисто гравитационном случае, последнее слагаемое обращается в нуль. Наоборот, если предположить, что линейный элемент ds — евклидов, то поведение частицы будет определяться уравнениями $\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{l}{m}F^i_j\frac{dx^j}{ds} = 0$, где F_{ij} — кососимметрический тензор электромагнитного поля, выражающийся через a^j_i. А. З. Петров

3252. Уравнение Дирака в общей теории относительности. Рисс (L'équation de Dirac en relativité générale. Riesz Marcel), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 241—259 (франц.)

Решается задача получения общерелятивистских уравнений Дирака. Если x^k — координаты точки пространства-времени, γ^k — матрицы 4-го порядка, удовлетворяющие соотношениям Клиффорда, то уравнение Дирака для свободной частицы, с массой покоя m, как известно, может быть записано в виде $\left(\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - im\right)\psi = 0$.

Для того чтобы получить обобщенное уравнение Дирака в общей теории относительности, в каждой точке риманова пространства-времени, с формой $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ и лоренцовой сигнатурой, конструируется локальное пространство с клиффордовой алгеброй, определяемой соотношениями $e_ie_j + e_je_i = 2g_{ij}$, где e_i — векторы, отвечающие координатам x^i. Репер $\{e_i\}$ может быть получен из лоренцева репера, возникающего в каждой точке, непрерывной деформацией. Это позволяет определить спиноры как «коллектив» чисел Клиффорда, связанных с лоренцевым репером, что позволяет подойти к решению вопроса о дифференцировании спиноров — задача, имеющая основное значение для решения поставленной проблемы.

Отсюда искомое уравнение Дирака для некоторой частицы с массой m и зарядом e в электромагнитном поле с потенциалом $A = A^je_j = A_je^j$ записывается в виде: $(\nabla - ieA - im)\psi = 0$. Рассматривается вектор тока и исследуются примеры, иллюстрирующие теорию. А. З. Петров

3253. Движение твердого тела в римановом пространстве постоянной кривизны. Стоянович (Кретање чврстог тела у Римановим просторима константе кривине. Стојановић Растко), Зб. радова. Српска АН, 1956, **50**, 219—238 (сербохорв.; рез. англ.)

Дается следующее определение твердого тела в n-мерном римановом пространстве постоянной кривизны K_n. Будем говорить, что система точек M_1, M_2, ... в K_n представляет твердое тело, если расстояние между любыми двумя точками M_i и M_j, измеренное по произвольной кривой, проходящей через эти две точки в любой момент времени остается неизменным, когда эта система точек M_1, M_2, ... перемещается с течением времени t: $\frac{\delta}{\delta t}\int_{M_i}^{M_j} ds = 0$; при этом интегрирование выполняется вдоль произвольной кривой. Проблема движения твердого тела в K_n связывается с теорией групп движений. Основные результаты статьи: 1. Твердое тело в K_n имеет $\frac{1}{2}n(n+1)$ степеней свободы. 2. В случае вращения тела вокруг неподвижной точки в K_n оно имеет $\frac{1}{2}n(n-1)$ степеней свободы и вращение состоит из $\frac{1}{2}n(n-1)$ взаимно независимых движений по тому же количеству вполне геодезических $(n-2)$-мерных подпространств пространства K_n. Все частицы тела принадлежат геодезически-параллельным гиперповерхностям постоянной кривизны в K_n. 3. Когда ориентация тела в K_n зафиксирована, то параллельный перенос тела возможен, если только K_n является плоским или с неопределенной метрикой.

В конце статьи выводятся уравнения движения твердого тела в K_n в форме, аналогичной уравнениям Лагранжа 2-го рода. В. Ф. Рогаченко

3254. Результаты, важные для гравитации в римановой геометрии. Нарликар (Results of gravitational significance in Riemannian geometry. Narlikar V. V.), Nature, 1956, **177**, № 4520, 1138 (англ.)

Пользуясь свертыванием тождества Бианки и предполагая, что риманово пространство V_4 удовлетворяет уравнениям $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, т. е. является пространством Эйнштейна, автор очевидным образом приходит к соотношениям для ковариантных производных тензора кривизны: $R^h_{ijk,\,h} = 0$.

Записывая при помощи известного тождества Риччи выражение для второй альтернированной ковариантной производной от некоторого неизотропного векторного поля, при тех же предположениях и свертывая дважды результат, автор получает, что космологическая постоянная $\lambda = a^n(a^m{}_{,n} - a^m{}_{,m}) / a^la_l$, что позволяет утверждать, что любое неизотропное поле a^m в пространстве Эйнштейна, удовлетворяет этому условию. В частности, при $\lambda = 0$, для любого поля a^α получаем соотношение: $a^m{}_{,m} - a^m{}_{,m} = 0$ А. З. Петров

3255. О гипотезе изменчивости так называемой гравитационной постоянной. Йордан (Über die Hypothese einer Veränderlichkeit der sogenannten Gravitationskonstante. Jordan P.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 157—167 (нем.)

Излагаются основные результаты новой «расширенной» теории гравитации, развитой автором в его книге «Сила тяжести и вселенная» (Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955; РЖФиз, 1957, 16323). Эта теория опирается на те же предпосылки, что и обычные пятимерные теории относительности (Калуза, Клейн): в n-мерном пространстве ищется такое тензорное поле $g_{\mu\nu}$, все компоненты которого не зависели бы от какой-либо одной координаты, например, x_0. Если на гиперповерхности измерения $(n-1)$ определить метрический тензор γ_{kl} и тензор напряженности электромагнитного поля F_{kl} соотношениями

$$\gamma_{kl} = g_{kl} - \frac{g_{k0}g_{l0}}{g_{00}}, \tag{1}$$

$$F_{kl} = \left(\frac{g_{l0}}{g_{00}}\right)_{|k} - \left(\frac{g_{k0}}{g_{00}}\right)_{|l} \tag{2}$$

($k, l = 1, 2, \ldots, n-1$; символ $|_k$ означает производную по k), то уравнения поля для вакуума, которые в n-мерном пространстве сводятся к равенству нулю тензора Риччи ($R_{\mu\nu} = 0$), на гиперповерхности будут иметь вид:

$$G_{jm} + \frac{\sqrt{g_{00}}_{|j|m}}{\sqrt{g_{00}}} + \frac{1}{2} g_{00} F_{jk} F^k_{\ m} = 0, \tag{3}$$

$$\sqrt{g_{00}}|^j_j - \frac{1}{4}\sqrt{g_{00}^3} F_{jm}F^{jm} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\sqrt{g_{00}^3} F^{jm}\right)_{||m} = 0. \tag{5}$$

Здесь G_{jm} — тензор Риччи, образованный из компонент $(n-1)$-мерного метрического тензора (1); символ $||_k$ означает ковариантное дифференцирование.

При отсутствии электромагнитного поля (чистое тяготение) уравнения (3)—(5) значительно упрощаются благодаря условию $F_{jm} = 0$. Еще более изящный вид получают эти уравнения, если метрику (1) подвергнуть конформному отображению

$$\bar{\gamma}_{kl} = g_{00}^{\varepsilon}\gamma_{kl},$$

где показатель степени ε зависит от размерности пространства.

До сих пор компонента g_{00} связывалась с гравитационной постоянной $\varkappa$ соотношением

$$g_{00} = \frac{2\varkappa}{c^2}$$

и считалась, таким образом, сама постоянной. Наоборот, автор постулирует, что g_{00} (а следовательно, и $\varkappa$) является некоторой функцией координат, подлежащей определению из основных уравнений поля.

В связи с этим ряд известных задач общей теории относительности усложняется математически: теряет силу теорема Биркгоффа о единственности решения Шварцшильда, появляются дифференциальные уравнения третьего порядка и т. д.

В отношении физических следствий новая теория объединяет в известной мере выводы, которые получаются при введении в уравнения Эйнштейна космологического члена и результаты теории расширяющейся вселенной. Обсуждение этих следствий можно найти в работах Юста, Элерса, Шюкинга (РЖФиз, 1957, 27018; 13459; 2916). Я. И. Пугачев

3256. О единой теории поля гравитации и электромагнетизма. I. Хусейн (On unified field theory of gravitation and electromagnetism. I. Husain S. I.), Tensor, 1956, 6, № 2, 132—135 (англ.)

Рассматриваются поля гравитационное и электромагнитное и строится теория, их объединяющая, для чего вводится пространство аффиной связности Γ^k_{ij} с кручением $(\Gamma^k_{[ij]} \neq 0)$, в котором определены поля симметрического тензора g_{ij} и вектора φ_i (электромагнитный вектор), что позволяет ввести кососимметрический тензор $F_{ij} = \varphi_{i,\,j} - \varphi_{j,\,i} = \varphi_{i;\,j} - \varphi_{j;\,i}$, где запятая обозначает частные производные, а точка с запятой — ковариантное дифференцирование относительно символов Кристоффеля, отвечающих g_{ij}. Интерпретируя F_{ij} как тензор электромагнитного поля, автор получает отсюда, что его «дивергенция» $F_{ij,\,k} + F_{jk,\,i} + F_{ki,\,j} = F_{ij;\,k} + F_{jk;\,i} + F_{ki;\,j} = 0$.

Уравнения поля получаются из принципа вариации Гамильтона, если за гамильтониан взять скалярную плотность $\sqrt{-g}\,(g^{kl} + F^{kl})\,R_{kl}$, где R_{kl} — тензор Риччи, отвечающий аффинной связности Γ^k_{ij}. Отсюда уравнения поля получаются в виде: $R_{kl} - {}^1/_2 g_{kl}\,(g^{ij}R_{ij}) = 0$, $F_{kl} = \varphi_{k,\,l} - \varphi_{l,\,k}$, $(\sqrt{-g}F^{k\sigma})_{,\sigma} = 0$; что дает 20 уравнений для определения g_{ij}. Если электромагнитный вектор исчезает, то придем к чисто гравитационному полю. В свободном от гравитации пространстве вторая и третья серии уравнений приводят к уравнению Максвелла в свободном пространстве.

А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3257. Об аффинных преобразованиях римановых многообразий. Лихнерович (Sur les transformations affines des variétés riemanniennes. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 12, 1568—1570 (франц.)

Из результата о каноническом разложении касательного векторного пространства T_x в точке x односвязного риманова многообразия V_m в прямую сумму попарно ортогональных подпространств P^a_x $(a = 0, 1, 2, \ldots, k$; $\dim P^a_x = q_a \geqslant 2$ для $a \neq 0)$, инвариантных при преобразованиях однородной группы голономии ψ_x (С. r., 1952, 234, 2332), выводится инвариантность каждого из полей P^a_x при всех аффинных преобразованиях максимально связной подгруппы $A_0(V_m)$ группы $A(V_m)$ всех аффинных преобразований многообразия V_m.

Если V_m $(m \geqslant 2)$ полное (но не необходимо односвязное) и группа голономии ψ неприводима, то $A(V_m) = I(V_m)$, где $I(V_m)$ — группа всех изометрических преобразований V_m.

На полном односвязном многообразии $V_m = W^0 \times W^1 \times W^2 \times \ldots \times W^k$ (W^0 — евклидова часть, W^a $(a \neq 0)$ неприводимы) группа $A_0(V_m)$ совпадает с произведением $A_0(W^0) \times I_0(W^1) \times \ldots \times I_0(W^k)$, где $I_0(W^a)$ $(a \neq 0)$ — максимально связная подгруппа группы $I(W^a)$. Если группа голономии полного односвязного V_m не оставляет никакого инвариантного вектора, то $A_0(V_m) = I_0(V_m)$. Далее этот результат обобщается на случай сокращенной однородной группы голономии полных римановых многообразий V_m путем рассмотрения универсальной накрывающей.

И. П. Егоров

3258. Объемный инвариант накрывающих. Шварц А. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 137

Фундаментальная группа компактного риманова многообразия полностью определяет объемный инва-

риант универсального накрывающего. Приложение: Фундаментальная группа n-мерного компактного риманова многообразия неположительной кривизны не может быть абелевой группой ранга, меньшего n.
В. А. Ефремович

3259. Инфинитезимальные группы голономии связностей в расслоенных пространствах. Одзэки (Infinitesimal holonomy groups of bundle connections. Ozeki Hideki), Nagoya Math. J., 1956, 10, June, 105—123 (англ.)

Пусть (P, M, G, π) — дифференцируемое главное расслоенное пространство со связной базой, ω — некоторая инфинитезимальная связность в P, $H^0(x)$ — связная компонента единицы группы голономии этой связности в точке $x \in P$, $\mathfrak{h}(x)$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$, группы G, отвечающая подгруппе $H^0(x)$. Если U — окрестность точки $\pi(x) \in M$, то обозначим через $H^0(U, x)$ связную компоненту единицы группы голономии расслоенного пространства $\pi^{-1}(U)$ в точке x. Локальной группой голономии в точке x называется группа $H^*(x) = \bigcap_{\pi(x) \in U} H^0(U, x)$. Доказывается, что если $\dim H^*(x)$ одинакова для всех $x \in P$, то $H^0(x) = H^*(x)$ $(x \in P)$.

Пусть Ω — форма кривизны связности ω. Обозначим через $\mathfrak{m}_0(x)$ подпространство алгебры $\mathfrak{G}$, натянутое на элементы вида $\Omega_x(X, Y)$, где X, Y — касательные векторы к P в точке x. Определим по индукции пространство $\mathfrak{m}_k(x) \subset \mathfrak{G}$, натянутое на $\mathfrak{m}_{k-1}(x)$ и на элементы вида $V_k V_{k-1} \dots V_1 \Omega(X, Y)$, где $X, Y, V_1, \dots, V_k$ — произвольные горизонтальные векторные поля на многообразии P. Доказывается, что $\mathfrak{h}'(x) = \bigcup_k \mathfrak{m}_k(x)$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$, содержащаяся в алгебре Ли $\mathfrak{h}^*(x)$ группы $H^*(x)$. Связная подгруппа $H'(x)$, отвечающая подалгебре $\mathfrak{h}'(x)$, называется инфинитезимальной группой голономии в точке x. Если $\dim H'(x)$ одинакова для всех $x \in P$, то $H^0(x) = H^*(x) = H'(x)$ $(x \in P)$. Отсюда выводится, что это равенство имеет место в случае, когда расслоение и связность являются аналитическими. Другие описания алгебры $\mathfrak{h}'(x)$ даются в двух частных случаях — линейной связности и картановской связности.
А. Л. Онищик

3260. О комплексных аналитических многообразиях. Бланшар (Sur les variétés analytiques complexes. Blanchard André), Ann. scient. École norm. supér., 1956, 73, № 2, 157—202 (франц.)

Пусть $E(B, F)$ — аналитическое комплексное компактное расслоенное пространство с базисом B и слоем F. Показывается, что если группа Пуанкаре $\pi_1(B)$ действует на первой группе вещественных когомологий $H^1(F)$ тривиально, то для того чтобы E было келеровым, необходимо и достаточно, чтобы: 1) B было келеровым, 2) на F существовала форма Келера, представляющая класс когомологий, инвариантных относительно $\pi_1(B)$ и 3) первые числа Бетти b_1 были связаны соотношением $b_1(E) = b_1(B) + b_1(F)$. Если $E(B, F)$ — келерово и структурная группа его состоит из конечного числа связных компонент, то для того чтобы E допускало аналитическую форму Келера, необходимо и достаточно, чтобы B и F допускали такие формы. Если слой F связный и структурная группа состоит из конечного числа связных компонент, то для того, чтобы E было проективным алгебраическим многообразием (м.), необходимо и достаточно, чтобы $b_1(E) = b_1(F) + b_1(B)$ и чтобы B, F и многообразие Албанезе $A(E)$ были алгебраическими проективными м. Наконец, если V — компактное келерово м., то м., полученное из V расщеплением вдоль неособенного м., также келерово.

М. Албанезе для аналитического комплексного компактного м. V определяется как аффинный тор $A(V)$, снабженный отображением $p\ V \to A(V)$ и обладающий тем свойством, что всякое аналитическое отображение V в комплексный тор T единственным образом представляется в виде $f \circ p$, где f — аффинное отображение V в T. Это м. и его связи с автоморфизмами V изучаются в первой части работы.

Предварительные публикации результатов в C. r. Acad. sci. с 1951 по 1955 г. (РЖМат, 1953, 440; 1956, 4857; 1957, 4350, 8198; 1958, 213).
В. В. Морозов

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

3261. О разбиении прямоугольников на различные между собой квадраты. Моронь (O rozkładach prostokątów na nierówne kwadraty. Moroń Z.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II — Wiadom. mat., 1955, 1, № 1, 75—94 (польск.)

В 1903 г. Ден доказал, что только прямоугольники с соизмеримыми сторонами можно разбить на конечное число квадратов (Dehn M., Math. Ann., 1903, 57, 314—332). Естественно, что каждый прямоугольник с соизмеримыми сторонами можно разбить на конечное число конгруэнтных квадратов, однако до 1924 г. не был известен ни один пример о разбиении прямоугольника на различные между собой квадраты. Вопрос о возможности такого разбиения был поставлен профессором С. Рузевичем и решен в положительном смысле автором, который дал два примера разбиения прямоугольников: одного прямоугольника со сторонами 33 и 32 с разбиением на 9 разных квадратов и другого со сторонами 65 и 47 — на 10 разных квадратов (Moroń Z., Przegl. mat.-fiz., 1925, 3, 152—153). Он доказал также невозможность разбиения произвольного прямоугольника менее чем на 9 разных квадратов.

В 1939 г. Спрейг опубликовал сообщение о разбиении квадрата на 55 меньших квадратов, которые все различны между собою (Sprague R., Math. Z., 1939, 45, 607—608). В 1940 г. появилась статья четырех авторов: Брукса, Смита, Стоуна и Татта (Brooks R. L., Smith C. A., Stone A. H., Tutte W. T., Duke Math. J., 1940, 7, 213—340), которая содержала разбиение квадрата на 26 разных квадратов; наконец, в 1948 г. Уилкокс нашел разбиение квадрата (со стороной 175) на 24 разных квадрата. Автор предполагает, что это наименьшее число разных квадратов, на которые квадрат может быть разбит.

Важным шагом вперед, сделанным упомянутыми четырьмя авторами, было открытие связи между теорией разбиения прямоугольников на квадраты и теорией электрических токов в замкнутых контурах, отделенных от сети. Что касается разбиения прямоугольников на 10 разных квадратов, автор приводит 6 таких прямоугольников, а из разбиваемых на 11 различных квадратов — 22 прямоугольника.

Пусть S означает множество всех чисел a/b, где a и b $(a \geqslant b)$ означают длины сторон прямоугольника, разбиваемого на конечное число разных квадратов.

Автором было показано в 1925 г. что множество S не пустое и бесконечно. Абе доказал в 1932 г., что число 1 является предельным значением этого множества (Abe M., Proc. Phys., Math. Soc. Japan, 1932, 3, 14, 385—387).

Штёр доказал в 1938 г., что множество S везде плотно (Stöhr A., Dissert., Berlin, 1938). Спрейг доказал в 1939 г., что множество содержит точку 1 и в 1940 г., что оно содержит все рациональные числа не меньше 1 (откуда следует, что любой прямоугольник с соизмеримыми сторонами может быть разбит, по крайней мере одним способом, на разные между собой квадраты). Наконец автор приводит доказатель-

ство Спрейга формулы $x \leqslant (53t^2 - 49t - 2)/2$, где t означает (наименьшее) число конгруэнтных квадратов, на которые данный прямоугольник может быть разбит и x означает число различных между собой квадратов, на которые этот прямоугольник может быть разбит. Автор отмечает, что эту формулу можно уточнить, а именно $x \leqslant (25t^2 + 3)/2$. Автор обращает внимание на то, что проблема разбиения на квадраты, которые между собой отличны, не может быть обобщена. Прежде всего, равносторонний треугольник не может служить элементом разбиения, так как такой треугольник не может быть разделен на конечное число разных равносторонних треугольников. Конечно, никакой другой правильный многоугольник не может быть элементом такого разбиения. Также нельзя распространить проблему на пространство, так как, как доказывает автор, никакой параллелепипед нельзя разбить на конечное число разных кубов.

K. Zarankiewicz

3262. О почти совершенных разбиениях прямоугольников. Моронь (O prawie-doskonałych rozkładach prostokątów. Moroń Z.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, 1, № 2, 175—179 (польск.)

Рассматривается разбиение прямоугольников и квадратов на меньшие квадраты. Разбиение называется совершенным, если в нем появятся только различные между собой квадраты. Если некоторые из квадратов данного разбиения конгруэнтны, однако 1) только неконгруэнтные квадраты имеют общие граничные точки, или 2) конгруэнтные квадраты имеют только общие угловые точки, или 3) если конгруэнтные квадраты имеют общие граничные точки только на некоторой части их сторон, а не вдоль всей стороны, то разбиение называется почти совершенным первого 1), второго 2) или третьего 3) рода.

Полное число квадратов называется порядком, число различных между собой квадратов — степенью разбиения. Конечное множество различных квадратов называется базисом, если из них возможно построить почти совершенным способом (может быть, с повторением некоторых квадратов) прямоугольники с произвольным отношением сторон $m : n$ (m и n — целые числа).

Наименьшее возможное число квадратов базиса называется базисным числом. Автор доказывает справедливость результатов, представленных в следующей таблице:

Почти совершенное разбиение	a	b	c
1-го рода	5	6	7
2-го рода	5	6	6
3-го рода	4	4	5

где a — наименьшая степень разбиения некоторого прямоугольника, b — наименьшая степень разбиения некоторого квадрата, c — базисное число.

K. Zarankiewicz

3263. Группа движений евклидовой плоскости. Бер (Die Bewegungsgruppe der Euklidischen Ebene. Baer Reinhold), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1954/1955—1955/1956, 45—47 (нем.)

Аффинная плоскость Фано — наиболее общая аффинная плоскость, в которой выполняется постулат четырехугольника Фано. Она называется разделяемой, если каждая точка прямой g разделяет отличные от нее точки на g на два класса, и каждая прямая g разделяет не лежащие на ней точки на два класса, причем выполняются условия: (I) если g и h — две различные параллельные прямые, то h лежит целиком в одной из полуплоскостей с ребром g; (II) если две различные прямые g и h пересекаются в точке P, то каждая из двух полуплоскостей с ребром g содержит одну и только одну из полупрямых прямой h, определяемых точкой P; (III) если A, B, C — три различные коллинеарные точки, то в точности одна из них (или же все три) лежит между двумя другими.

Группа Γ сохраняющих разделение аффинных отображений тогда и только тогда просто транзитивна на множестве реперов, когда выполнены условия: 1) Γ транзитивна на прямых; 2) если отображение σ из Γ имеет неподвижную точку и неподвижную прямую, то $\sigma^2 = 1$; 3) инволюция σ из Γ есть отражение в точке или в прямой; 4) для каждой прямой g группа Γ содержит одно и только одно отражение в g.

Разделение аффинной плоскости индуцирует на бесконечно удаленной прямой проективное разделение, индуцирующее в свою очередь на ней же топологию. Если бесконечно удаленная прямая компактна в смысле этой топологии, то из 1)—4) вытекает постулат существования биссектрис («для каждой пары пересекающихся прямых существует инволюция из Γ, меняющая эти прямые местами»), и Γ есть группа движений евклидовой геометрии над действительными числами.

Если группа Γ аффинных отображений аффинной плоскости Фано (не обязательно разделяемой) удовлетворяет условиям 2)—4), то постулат существования биссектрис выполняется в ней тогда и только тогда, когда: а) Γ транзитивна на прямых; б) образующими группы Γ являются ее отражения; в) произведение трех отражений из Γ в прямых, проходящих через одну и ту же точку, есть отражение в одной прямой.

Доказательства не приведены. А. С. Смогоржевский

3264. Покрытие пространства шарами. Уотсон (The covering of space by spheres. Watson G. L.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5, № 1, 93—100 (англ.)

Работа посвящена старой задаче о плотности решетчатого покрытия n-мерного евклидова пространства R^n равными шарами. Покрытие R^n равными шарами называется решетчатым, если центры шаров образуют решетку; в этом случае плотность покрытия ϑ_n (предел, к которому стремится отношение суммы объемов шаров, покрывающих шар $S(\rho)$ пространства R^n радиуса ρ, к объему $S(\rho)$ при $\rho \to \infty$) равна, очевидно, отношению объема одного из шаров покрытия к объему основного параллелотопа решетки. Лучший из имеющихся ранее результатов утверждал, что для достаточно больших n $\vartheta_n < (1{,}15)^n$ (точнее, что $\lim_{n\to\infty} (\vartheta_n)^{1/n} < 1{,}107$; см. Davenport H., Rend. Circolo mat. Palermo, 1952, 1, № 1, 1—16); в настоящей работе путем уточнения и видоизменения рассуждений Давенпорта доказывается, что для достаточно больших n $\vartheta_n < (1{,}107)^n$ (точнее, что $\lim (\vartheta_n)^{1/n} \leqslant 1{,}107$).

И. М. Яглом

3265. Дифференцируемые точки дуг в конформном n-мерном пространстве. Лейн (Differentiale points of arcs in conformal n-space. Lane N. D.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 2, 301—313 (англ.)

Пусть A — дуга, т. е. непрерывный образ интервала, в a-мерном конформном пространстве, $p \in A$, $S^m(P_1, \ldots, P_{m+1}; \tau_0)$ — m-мерная сфера, проходящая через точки $P_1, \ldots, P_{m+1}$, p. Дается следующее индуктивное определение. Дуга A дифференцируема в точке p $m+1$ раз ($m < n$), если для $r = 1, \ldots, m+1$ выполнено условие: если параметр t достаточно близок к p и $t \neq p$, то сфера $S^m(P_1, \ldots, P_{m+1-r}, t; \tau_{r-1})$ однозначно определена и при $t \to p$ стремится

к некоторой сфере $S^m(P_1, \ldots, P_{m+1-r}; \tau_r) = S_r^m$. Дуга называется 1 раз дифференцируемой в p, если это условие выполнено для $m = r = 1$. Если τ_r^m — множество всевозможных сфер S_r^m, то τ_{m+1}^m содержит лишь одну сферу S_{m+1}^m. Точка p называется дифференцируемой, если A дифференцируема в этой точке n раз.

Внутренняя точка $p \in A$ называется точкой опоры для сферы S^{n-1}, если для достаточно малой окрестности U точки p в A обе компоненты множества $U \setminus P$ содержатся в одной и той же части пространства, ограниченной S^{n-1}, и точкой пересечения, если они содержатся в разных частях пространства. Каждой внутренней дифференцируемой точке $p \in A$ автор сопоставляет ее характеристику — набор чисел $(a_0, a_1, \ldots, a_n; i)$, где $a_r = 1$, $2 (r < n)$; $a_n = 1, 2, \infty$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказывается, что p является либо точкой опоры для всех сфер из множества $\tau_r^{n-1} \setminus \tau_{r+1}^{n-1}$, либо точкой пересечения для всех этих сфер. Числа $a_k (k = 0, \ldots, r)$ выбираются в первом случае так, чтобы $a_0 + \ldots + a_r$ было четным, во втором — нечетным. Число a_n выбирается так, чтобы $a_0 + \ldots + a_n$ было четным, когда p является точкой опоры для S_n^{n-1}, и нечетным, когда p — точка пересечения. Если ни то, ни другое не имеет места, то $a_n = \infty$. Наконец, i характеризуется тем, что $S_k^{k-1} = p$ для всех $k \leqslant i$, но $S_{i+1}^i \neq p$. Доказывается, что набор $(a_0, a_1, \ldots, a_n; i)$ может быть характеристикой точки дуги тогда и только тогда, когда $a_0 + \ldots + a_i$ конечно и четно. А. Л. Онищик

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

3266. О наибольшем числе частей, на которые выпуклый многоугольник разбивается своими диагоналями. Бейлен (Over het grootste aantal delen, waarin een convexe veelhoek door zijn diagonalen verdeeld wordt. Beylen E. van), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1955—1956, **43**, № 3, 133—135 (гол.)

Выводится формула $N = \frac{1}{6}(k+1)(k+6)$ для наибольшего числа N частей, на которые выпуклый многоугольник разбивается своими k диагоналями. Предварительно устанавливается известная зависимость $N = F(n)$, где n — число сторон многоугольника; для этого показывается, что последовательность $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$, ... представляет собой арифметический ряд четвертого порядка.

Указывается, что аналогичным способом можно вывести формулу $N' = \frac{1}{24} n (n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6} k (k+1)$ для наибольшего числа N' точек, в которых пересекаются диагонали n-угольника.

Ю. М. Гайдук

3267. Обращение одной теоремы Брунна о центральных выпуклых областях. Вит (Umkehrung eines Satzes von H. Brunn über Mittelpunktseibereiche. Viet Ursula), Math.-phys. Semesterber., 1956, **5**, № 1—2, 141—142 (нем.)

Доказывается, что центр тяжести S плоской выпуклой ограниченной области E делит пополам по крайней мере три проходящие через него хорды. Отсюда выводится, что для того чтобы область E, граница которой не содержит прямолинейных участков, имела центр, достаточно, чтобы всякая ее точка, отличная от S, делила пополам лишь одну хорду. Необходимость этого условия была ранее доказана Брунном. Аналогичная теорема доказывается для трехмерных выпуклых областей. А. Л. Онищик

3268. О некоторых условиях жесткости поверхностей положительной кривизны. Векуа И. Н., Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 2, 143—160 (рез. франц.)

Рассматривается вопрос о возможных бесконечно малых изгибаниях поверхности положительной кривизны при определенных условиях на движение ее края. Пусть $U(x, y)$ — вектор смещения, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — его тангенциальные компоненты относительно подвижного трехгранника, который отвечает внутренним координатам (x, y). В качестве (x, y) берутся сопряженно-изометрические координаты, в которых вторая основная форма поверхности имеет вид: $\Lambda(dx^2 + dy^2)$.

Тогда задача о бесконечно малых изгибаниях приводится к уравнению вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + B(z)\,\overline{w} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\right), \qquad (1)$$

где неизвестная функция

$$w = \frac{\sqrt{E}\,u + i\sqrt{G}\,v}{\sqrt{\sqrt{K}\,(EG - F^2)}};$$

нормальная компонента вектора U выражается через касательные u и v, т. е. через w. Решение $w(z)$ уравнения (1) автор называет обобщенной аналитической функцией в данной области D и показывает, что

$$\Phi(z) = w(z) \exp\left(-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)} \frac{B(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{(\zeta - z)\,w(\zeta)}\,d\xi d\eta\right) \qquad (2)$$

представляет собой обычную аналитическую функцию в области D. Предполагается, что $B(z) \in L_p(D)$, $p > 2$ и $w(z)$ понимается как обобщенное решение в смысле С. Л. Соболева. Обратно, если $\Phi(z)$ — любая аналитическая функция в D, то в D найдется решение (1), которое связано с $\Phi(z)$ формулой (2). Вследствие формулы (2) важнейшие свойства аналитических функций переносятся на обобщенные аналитические функции и, тем самым, получают истолкование в виде теорем о бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны.

Краевые условия, при которых уравнение (1) имеет только тривиальное решение, автор называет жесткими связями; автор различает корректные и некорректные жесткие связи, называя связь корректной, если при малом возмущении она остается совместимой с уравнением (1). В ряде случаев корректные связи устанавливаются заданием на контуре Γ области D одного уравнения между двумя тангенциальными компонентами вектора смещения; подробно излагается вопрос о линейной задаче Римана—Гильберта, когда краевое условие имеет вид: $\alpha u + \beta v = \gamma$, где α, β, γ — вещественные функции на Γ. Автор сообщает теоремы, которые дают необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи Римана—Гильберта и число линейно независимых решений однородной задачи в зависимости от разрешимости сопряженной однородной задачи, от индекса вектора $\{\alpha, \beta\}$ на контуре и от порядка связности области. Эти общие теоремы приводят к ряду конкретных результатов теории бесконечно малых изгибаний: 1. Овалоид с одним плоским отверстием, по краю которого он находится в идеальном контакте с ортогональной идеально гладкой и

абсолютно жесткой поверхностью, является жестким; такая жесткая связь является корректной относительно возмущений, обусловленных упругой податливостью поверхности контакта; 2. Усеченный овалоид, окаймленный плоской полосой, является жестким (ранее доказано референтом); 3. Овалоид с тремя или большим числом отверстий, находящийся в контакте с неподвижными абсолютно жесткими и идеально гладкими ортогональными поверхностями, является жестким. Н. В. Ефимов

3269. Расширение равномерно непрерывных преобразований и гипервыпуклые метрические пространства. Ароншайн, Панитчпакди (Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces. Aronszajn N., Panitchpakdi P.), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 3, 405—439 (англ.)

Пусть D и F — метрические пространства, $T: D \to F$ — равномерно непрерывное отображение. С отображением T связывается функция $\delta(\varepsilon)$ — его модуль непрерывности. Изучается вопрос о продолжаемости отображения T в равномерно непрерывное отображение метрического пространства E, содержащего D в качестве метрического подпространства, в F. Если такое продолжение возможно для любого E, то минимальный модуль непрерывности $\delta_T(\varepsilon)$ обладает свойством субаддитивности: $\delta_T(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \leqslant \delta_T(\varepsilon_1)+\delta_T(\varepsilon_2)$. Метрическое пространство называется гипервыпуклым, если для любого множества его замкнутых шаров $S(x_i, r_i)$ $(i \in I)$ такого, что $\rho(x_i, x_j) \leqslant r_i + r_j$ $(i, j \in I)$, имеем $\bigcap_{i \in I} S(x_i, r_i) \neq 0$. Если это верно лишь в предположении, что мощность множества I меньше $\mathfrak{m}$, то пространство называется $\mathfrak{m}$-гипервыпуклым. Доказывается, что отображение T с субаддитивным модулем непрерывности можно продолжить в любое пространство E с сохранением модуля непрерывности тогда и только тогда, когда F гипервыпукло.

Изучаются некоторые свойства гипервыпуклых пространств. Например, доказывается, что если пространство $\mathfrak{m}$-гипервыпукло для некоторого $\mathfrak{m} > \aleph_0$, то оно полно. Если подпространство $A \subset E$ является гипервыпуклым, то существует ретракция E на A, являющаяся сжатым отображением. Пусть E — гипервыпуклое банахово пространство, S — его замкнутый единичный шар. Существует такая точка $x \in S$, что для всякой прямой l в пространстве E, проходящей через эту точку, x является концом отрезка $\tilde{l} \cap S$. Доказывается также, что пространство всех вещественных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве всегда $\aleph_0$-гипервыпукло.

А. Л. Онищик

См. также: 2604, 2609, 2809, 2840, 2857, 2861, 2994

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

3270. Видоизмененный метод релаксации для задачи о собственных значениях. Клендении (Modified relaxation method for eigenvalue problems. Clendenin W. W.), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 1, 74—81 (англ.)

Предлагается новый численный метод отыскания собственных значений задачи

$$d^2\psi/dx^2 + (\lambda + U(x))\psi = 0, \quad \psi(a) = \psi(b) = 0. \qquad (1)$$

Задача (1) приводится к вариационной задаче, интегралы заменяются суммами с большой степенью точности, после чего совершается обратный переход от вариационной задачи к разностному уравнению. Численное решение получается методом релаксации.

Для тех случаев, когда функция $U(x)$ при $x = a$ имеет особенность вида $A/(x-a)$ или $B/(x-a)^2$, приводятся специальные формулы, позволяющие учесть эту особенность при вычислении интеграла $\int_a^b U(x)\psi^2(x)\,dx$ и при составлении разностного уравнения. Рассматривается также вопрос об удвоении шага разностного уравнения. Приводится несколько примеров, в которых собственные значения, вычисленные изложенным методом, отличаются от точных на 0,05—0,4%.

А. Ф. Филиппов

3271. К практике чаплыгинского способа приближенного интегрирования уравнения первого порядка. Кондратьев Н. А., Тр. Астраханск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 4, 33—43

Для нахождения первых (исходных) приближений в известном методе Чаплыгина автор предлагает использовать начальные значения. Если в уравнении $y' = f(x, y)$ f''_{yy} будет сохранять знак на некотором интервале, то заданное начальное значение y_0 будет верхней (или нижней) границей; другой границей будет $u = y_0 \mp \beta(x)$, где $\beta(x)$ — решение уравнения $\beta'(x) - f'_y(x, y_0) \pm f(x, y_0) = 0$ с нулевыми начальными данными. В зависимости от знака f''_{yy} в уравнениях выбирается «+» или «—». Если вторая производная не сохраняет постоянного знака, то приближения получаются лишь с одной стороны.

Я. И. Алихашкин

3272. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений по интерполяционным формулам Эрмита. Квade (Numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Interpolation nach Hermite. Quade W.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 5—6, 161—169 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Пусть $y = \sum_{i=0}^{2n+1} c_i x^i$ — полином, принимающий в точках x_i значения y_i и имеющий в этих точках производные, равные $f(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ $(y' = f(x, y)$ — заданное дифференциальное уравнение). Считая, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$, полагаем $x = \cos t$. При этом наш полином станет тригонометрическим полиномом

$$y = T = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \cos \mu t; \quad m \leqslant 2n+1.$$

При фиксированных значениях x_k $(k = 0, \ldots, n)$, a_μ суть функции от $y_0, \ldots, y_n$. Если $y_0, \ldots, y_n$ таковы, что $a_m = 0$, то T будет единственным полиномом степени $2n$, проходящим через точки (x_i, y_i) и имеющим направления в этих точках $f(x_i, y_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$. Поэтому квадратурная формула может быть получена, если разрешить уравнение $a_m = 0$ относительно y_m. Так как S_{m-1} — частичная сумма $m-1$-го по-

рядка полинома T, является наилучшим приближением его, то квадратурную формулу можно также получить, приравняв a_{m-1} нулю.

Таким образом, можно получить ряд интерполяционных квадратурных формул $a_m = 0$, $a_{m-1} = 0, \ldots, a_1 = 0$. Причем точность тем больше, чем больше индекс. Аналогичным образом автор получает и экстраполяционные квадратурные формулы. Исследование устойчивости полученных формул автор обещает провести в работе, непосредственно следующей за этой статьей.

Я. М. Каждан

3273. Оценки погрешностей при решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. У л ь м а н (Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. 1. Ordnung. Uhlmann Werner), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 3—4, 88—89 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Через дискретный ряд точек (x_j, η_{ij}), $m \leqslant j \leqslant N$, $x_m \geqslant x_0$ приближенного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i[x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)],$$

$$y_i(x_0) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

проводятся непрерывно дифференцируемые функции $\eta_i(x)$ и оценивается разность $\varepsilon_i(x) = \eta_i(x) - y_i(x)$. Предполагается, что существуют константы d_{iM}, ограничивающие разность

$$|d_i(x)| = \left|\eta_i'(x) - f_i[x, \eta_1(x), \ldots, \eta_s(x)]\right| < d_{iM}$$

на интервале $x_m \leqslant x \leqslant x_N$. Это условие, в частности, выполняется при интегрировании методом Адамса или методом центральных разностей. Далее предполагаем, что отношения Липшица:

$$L_{ik}(x) = \frac{f_i[x, y_1(x), \ldots, y_{k-1}(x), \eta_k(x), \ldots, \eta_s(x)]}{\eta_k(x) - y_k(x)} - \frac{f_i[x, y_1(x), \ldots, y_k(x), \eta_{k+1}(x), \ldots, \eta_s(x)]}{\eta_k(x) - y_k(x)}$$

непрерывны и ограничены на интервале $x_m \leqslant x \leqslant x_N$: $l_{ik} \leqslant L_{ik}(x) \leqslant L_{ik}$ и $|L_{ik}(x)| \leqslant K_{ik}$. При этих предположениях справедливы следующие теоремы:

1) Если $|\varepsilon_i(x_m)| \leqslant E_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, то на интервале $x_m \leqslant x \leqslant x_N$ выполнены неравенства $|\varepsilon_i(x)| \leqslant E_i(x)$, где $E_i(x)$ являются решениями задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$E_i'(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{s} k_{ik} E_k(x) + L_{ii} E_i(x) + d_{iM}; \quad E_i(x_m) = E_i.$$

2) Пусть $(x) = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} v_k(x)$. Введем обозначения

$$(b_{ik}) = (a_{ik})^{-1}, \quad \tilde{L}_{ik}(x) = \sum_{\nu, \mu=1}^{s} b_{i\nu} L_{\nu\mu}(x)\, a_{\mu k},$$

$$\tilde{d}_i(x) = \sum_{\rho=1}^{s} b_{i\rho}(x)\, d_\rho(x).$$

Далее, пусть

$$|v_i(x_m)| = \left|\sum_{k=1}^{s} b_{ik}\varepsilon_k(x_m)\right| \leqslant U_i, \quad |\tilde{L}_{ik}(x)| \leqslant K_{ik},$$

$$L_{ii}(x) \leqslant \tilde{L}_{ii}, \quad |\tilde{d}_i(x)| \leqslant \tilde{d}_{iM}.$$

При этом на интервале $x_m \leqslant x \leqslant x_N$ выполняются следующие неравенства:

$$|\varepsilon_i(x)| \leqslant E_i(x) = \sum |a_{ik}|\, U_k(x),$$

где $U_k(x)$ — решение задачи Коши для системы:

$$U_i'(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{s} \tilde{k}_{ik} U_k(x) + \tilde{L}_{ii} U_i(x) + d_{iM}, \quad U_i(x_m) = U_{i0}.$$

Если $\tilde{\tilde{L}}_{ik}$ — приближенное среднее значение функции $L_{ik}(x)$, то в качестве матрицы (a_{ik}) рекомендуется брать матрицу (a_{ik}), приводящую матрицу $(\tilde{\tilde{L}}_{ik})$ к нормальной форме $J = (a_{ik})^{-1}(L_{ik})(a_{ik})$. В случае действительных характеристических корней матрицы $(\tilde{\tilde{L}}_{ik})$ матрица J имеет нормальную жорданову форму. Далее для некоторых случаев системы 2 уравнений найдены конкретные виды функции $E_i(x)$ и приведены числовые примеры.

Я. М. Каждан

3274. Оценки погрешностей при решении задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка. У л ь м а н (Fehlerabschätzungen bei Anfangswertaufgaben einer gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung. Uhlmann Werner), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 3—4, 99—111 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается приближенное, s раз дифференцируемое решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d^s y(x)}{dx^s} = f[x, y(x), \ldots, y^{s-1}(x)] \quad (s \geqslant 1),$$

$$y^i(x_0) = y_{0i} \, (i = 0, 1, \ldots, s-1),$$

для которого на интервале $x_0 \leqslant x_m \leqslant x \leqslant x_N$ выполнено неравенство $|d(x)| = |\eta_i^{(s)}(x) - f[x, \eta_i(x), \eta_i'(x), \ldots, \eta_i^{s-1}(x)]| \leqslant d_M$. Погрешность $\varepsilon(x) = \eta(x) - y(x)$ и ее первые $s-1$ производные могут быть оценены путем обращения уравнения s-го порядка в систему s уравнений 1-го порядка и перенесения полученных ранее оценок (реф. 3273). Кроме того, для уравнений 2-го порядка оценки могут быть в некоторых случаях улучшены и выписаны в явном виде, при этом, как и в работе (реф. 3273), выписывается мажорантное уравнение с постоянными коэффициентами и в зависимости от характера его решения (экспоненциального, растущего как x^2 или колеблющегося) находится соответствующая оценка погрешности. В случае колеблющегося решения дается верхняя оценка роста амплитуд и нижняя оценка расстояния между 2 экстремумами.

Я. М. Каждан

3275. Аппроксимационные формулы для определенных интегралов и дифференциальных коэффициентов. А д а т и (Approximate formulas for definite integrals and differential coefficients. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci., 1955, A2, № 2, 196—209 (англ.)

Выводятся некоторые приближенные формулы, выражающие определенные интегралы и производные через некоторые значения самой функции. Эти формулы могут быть использованы для численного решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Если $f(x)$ имеет ограниченные производные на заданном интервале (a, b) и $x_i = a + ih$, $y_i = f(x_i)$, $y_i' = f'(x_i)$, $y_i'' = f''(x_i)$, $F_i = \int_a^{x_i} f(x)\,dx$ $(i = 0, 1, 2,$

3, ...), где $h \neq 0$ и $a \leqslant x_i \leqslant b$, то при $|h|$ малом:

I. $F_j = \sum_{i=0}^{p} A_{ij} y_i + 0\,(h^{p+2})$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, где

$$\sum_{i=0}^{p} A_{ij} = jh,$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^m A_{ij} = \frac{j^{m+1}}{m+1} h \quad (j = 0, 1, \ldots, p;\ m = 1, 2, \ldots, p)$$

II. $y'_y = \sum_{i=0}^{p} B_{ij} y_i + 0\,(h^p)$, где $\sum_{i=0}^{p} B_{ij} = 0$,

$$\sum_{i=1}^{p} iB_{ij} = \frac{1}{h},$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^m B_{ij} = \frac{m}{h} j^{m-1} \quad (j = 0, 1, \ldots, p;\ m = 2, 3, \ldots, p)$$

III. $y''_i = \sum_{i=0}^{p} C_{ij} y_i + 0\,(h^{p-1})$, где $\sum_{i=0}^{p} C_{ij} = 0$,

$$\sum_{i=1}^{p} iC_{ij} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{p} i^2 C_{ij} = \frac{2}{h^2};$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^m C_{ij} = \frac{(m-1)\,m}{h^2} j^{m-2}$$

$(j = 0, 1, \ldots, p;\ m = 3, 4, \ldots, p)$.

В. Я. Скоробогатько

3276. Метод численного решения некоторых дифференциальных уравнений. Адати (A method on the numerical solutions of some differential equations. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci. A, 1955, 2, № 3, 244—252 (англ.)

Рассматривается метод нахождения численных решений дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

с граничными условиями. С этой целью используются ранее полученные автором (реф. 3275) формулы:

$$y'_j = \sum_{i=0}^{p} B_{i,j} y_i + 0\,(h^p),$$

$$y''_j = \sum_{i=0}^{p} C_{i,j} y_i + 0\,(h^{p-1}),$$

где $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ — известные постоянные. Дифференциальные уравнения заменяются системой алгебраических уравнений относительно y_i. Из этой системы известными методами находятся численные значения решения y_i. Дается оценка погрешности. Приведены примеры. С. С. Мусина

3277. К определению функции давления в неоднородных пластах. Салехов Г. С., Старшинова Л. В., Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1957, вып. 11, 143—148

Задача определения функции давления $p = p(r, \theta)$ в круговом неоднородном пласте сводится к решению уравнения $\frac{\partial}{\partial r}\left(rk \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(k \frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right) = 0$. На границе значения $p(r, \theta)$ постоянны. Для решения задачи с одной центральной скважиной применяются метод наименьших квадратов и метод Ритца. Приводится пример, когда переменная проницаемость k выбирается равной $k = \lambda (r \cos \theta + 2R)^2$. Сравниваются результаты, полученные по двум методам с точным решением, которое известно для этого случая.

Я. И. Алихашкин

3278. Приближенные методы решения одной пространственной задачи теории фильтрации. Ширинов К. Ф. (Cызылмə нəзəриййəсинин бир фəза мəсəлəсинин тəгриби həлл үсуллары. Ширинов К. Ф.), Элми əсəрлəр. Азерб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-т, 1957, № 5, 21—33 (азерб.; рез. русск.)

Рассматривается приток жидкости к несовершенной скважине. Требуется найти в прямоугольнике решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Граничные условия таковы: $\Phi = \Phi_k = \text{const}$ при $r = r_k$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ при $z = 0$, $z = h$. Здесь r_k — радиус контура питания, h — мощность пласта. Условия при $r = r_c$ (r_c — радиус скважины) автор задает в первом случае следующие:

$$\varphi(r_c, z) = \varphi_c + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos \frac{2k-1}{2l} \pi z, \quad 0 \leqslant z \leqslant l,$$

$$\varphi(r_c, z) = \varphi_c = \text{const}, \quad l \leqslant z \leqslant h,$$

где φ_c — дано, а коэффициенты a_k требуется определить. Для их определения автор требует, чтобы $\int_{\alpha_3(l)}^{\beta_3(l)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_c} dz = 0$, что является хорошей аппроксимацией (уже при $n = 3$) условия $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_c} = 0$ в $[0, l]$. Во втором случае условия при $r = r_c$ такие: $\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sum_{k=0}^{n} q_k z^k$, $0 \leqslant z \leqslant l$, $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$, $l \leqslant z \leqslant h$, где неизвестные коэффициенты q_k определяются по аналогии с первым случаем. Приведена рациональная аппроксимация одного громоздкого выражения. Вычислены встречающиеся в работе ряды.

Я. И. Алихашкин

3279. О наилучшем 9-точечном конечноразностном аналоге уравнения Лапласа. Гринспан (On a «best» 9-point difference equation analogue of Laplace's equation. Greenspan Donald), J. Franklin Inst., 1957, 263, № 5, 425—430 (англ.)

Доказывается следующая теорема. Не существует 9-точечной аппроксимации 8-го порядка уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ вида $L(u) = \sum_{i=0}^{8} a_i u_i = 0$, где $\lim_{h \to 0} a_i \neq 0$ по крайней мере для одного значения $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$. Здесь u_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 8)$ — значения искомой функции в 9 узлах квадратной сетки с шагом h.

Доказательство проводится методом от противного. При этом оператор $L(u)$ записывается при помощи разложения значений u_i в ряды Тэйлора с точностью до членов 9-го порядка относительно h и показывается, что для осуществления аппроксимации 8-го порядка коэффициенты a_i могут быть определены единственным образом в виде $a_i = h\alpha_i^*$, что противоречит условию теоремы.

Отмечается, что аналогичным способом можно показать, что хорошо известная 5-точечная аппроксимация уравнения Лапласа является наилучшей аппроксимацией 3-го порядка. Д. Ф. Давиденко

3280. Метод приближенного решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа. Алеске-

ров С. А., Докл. АН АзербССР, 1956, 12, № 11, 803—809 (рез. азерб.)

Предлагается следующий метод решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа: Ищется решение следующей задачи:

$$\Delta U_R = 0, \quad U_R|_q = f(s), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_R = 0$$

(R — радиус достаточно большого круга). Затем $R \to \infty$ и утверждается, что

$$\lim_{R\to\infty} U_R(x, y) = U(x, y), \qquad (1)$$

где $U(x, y)$ — точное решение внешней задачи Дирихле с граничным условием $U|_q = f(s)$. Для доказательства справедливости (1) выводится следующая оценка:

$$|U(x, y) - U_R(x, y)| \leqslant \frac{M \cdot \text{const}}{R}, \qquad (2)$$

где $M = \max f(x, y)$. В дальнейшем раскрывается смысл входящей в (2) константы.

М. А. Алексидзе

3281. Решение второй краевой задачи с криволинейной границей для уравнения Пуассона методом релаксации. Висванатхан (Solution of Poisson's equation by relaxation method — normal gradient specified on curved boundaries. Viswanathan R. V.), Math. Tables and Other Aids Comput. 1957, 11, № 58, 67—78 (англ.)

Рассматривается граничная задача $\nabla^2\omega = W$, $\partial\omega/\partial\nu = k$. Используя дифференциальные свойства границы области и функции, заданной на границе, выводится следующий конечноразностный эквивалент уравнения Пуассона для граничного узла, у которого один из четырех соседних узлов является нерегулярным:

$$W_0 h^2\left(1 + 2\xi\frac{1}{1-m^2}\right) -$$

$$- 2hk_A\sqrt{1+m^2} + 2\left(\frac{dk}{ds}\right)_A \xi h^2 m\frac{1+m^2}{1-m^2} =$$

$$= \omega_2\left(1 - m + 2\xi\frac{1+m^2}{1-m^2} + \xi\frac{h}{\rho_A}\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1-m}\right) +$$

$$+ 2\omega_3\left(1 + \xi\frac{h}{\rho_A}\frac{m^2\sqrt{1+m^2}}{1-m^2}\right) +$$

$$+ \omega_4\left(1 + m + 2\xi\frac{1+m^2}{1-m^2} - \xi\frac{h}{\rho_A}\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m}\right) -$$

$$- 4\omega_0\left(1 + \xi\frac{1+m^2}{1-m^2} + \xi\frac{h}{\rho_A}\frac{m^2\sqrt{1+m^2}}{1-m^2}\right) + O(h^3).$$

Здесь m — тангенс угла между осью x-ов и направлением внешней нормали ν, в точке границы A, отстоящей от данного узла на расстояние ξh, ρ_A — кривизна границы в точке A, h — шаг сетки. Формула (1) легко переносится и для случая, когда у граничного узла два соседних узла являются нерегулярными. Приводится пример применения выведенных формул.

М. А. Алексидзе

3282. Конечноразностные методы для решения первой краевой задачи с криволинейной границей для уравнения $\Delta u(x, y) = r(x, y, u)$. Альбрехт, Ульман (Differenzenverfahren für die 1. Randwertaufgabe mit krummlinigen Rändern bei $\Delta u(x, y) = r(x, y, u)$. Albrecht J., Uhlmann W.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 5—6, 212—224 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается численное решение первой краевой задачи для уравнения $\Delta u(x, y) = r(x, y, u)$ в случае криволинейных границ методом конечных разностей. Даются разностные схемы для произвольных четырех-, шести- и восьмиугольных «звезд», которые могут быть применены в узлах, расположенных вблизи границы. Исследуется вопрос о точности разностных уравнений. Погрешность в решении не рассматривается. Приведен числовой пример.

Н. К. Чухрукидзе

3283. Аппроксимация шестого порядка при численном решении уравнения Пуассона с тремя переменными. Дюран (L'approximation du sixieme ordre dans le calcul numérique des solutions de l'équation de Poisson à trois variables. Durand Emile), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 7, 788—791 (франц.)

Рассматривается уравнение Пуассона

$$\Delta\psi = \psi_{x^2} + \psi_{y^2} + \psi_{z^2} = f(x, y, z),$$

для которого строится разностная формула с учетом членов шестого порядка относительно шага квадратной сетки h. В формулу входят значения функции ψ в 26 узлах, окружающих центральный узел. Шесть из этих узлов находятся на расстоянии h от центрального узла, двенадцать узлов — на расстоянии $h\sqrt{2}$ и восемь узлов — на расстоянии $h\sqrt{3}$.

Формула получается путем подходящего комбинирования разложений в ряд Тейлора значений ψ в рассматриваемых узлах и имеет вид

$$128\psi_0 = 14\sum_{i=1}^{6}\psi_i + 3\sum_{i=7}^{18}\psi_i + 3\sum_{i=19}^{26}\psi_i - 30h^2 f -$$

$$- \frac{15}{6}h^4\Delta f - \frac{h^6}{12}[f_{x^4} + f_{y^4} + f_{z^4} +$$

$$+ 4(f_{x^2y^2} + f_{x^2z^2} + f_{y^2z^2})]. \qquad (1)$$

Приведены также три типа формул с учетом членов четвертого порядка относительно h:

$$24\psi_0 = 2\sum_{i=1}^{6}\psi_i + \sum_{i=7}^{18}\varphi_i - 6h^2 f - \frac{h^4}{2}\Delta f,$$

$$56\psi_0 = 8\sum_{i=1}^{6}\psi_i + \sum_{i=19}^{26}\psi_i - 12h^2 f - h^4\Delta f, \qquad (2)$$

$$40\psi_0 = 4\sum_{i=7}^{18}\psi_i + \sum_{i=19}^{26}\psi_i - 12h^2 f - h^4\Delta f.$$

Формулы (1), (2) были получены Ш. Е. Микеладзе (формула Микеладзе, соответствующая формуле (1), отличается от нее несущественными деталями) (Изв. АН СССР, сер. матем., 1938, 2, 271—292).

Д. Ф. Давиденко

3284. О некоторых классах частных решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Тополянский Д. Б., Научн. зап. Днепропетр. ун-та, 1956, 45, 207—214

Пусть T — ограниченная область с контуром L. Рассматривается первая краевая задача для эллиптического уравнения

$$M[u] = (pu_x)_x + (pu_y)_y - q^* u = 0, \qquad (1)$$

$$q^* = q - a_x - b_y$$

при некоторых ограничениях, наложенных на коэффициенты уравнения (1) и контур L. Показано, что для интеграла Дирихле $E(u)$ данной краевой задачи (Курант, Гильберт, Методы математической физики, I, II, Гостехиздат, 1945) имеет место оценка

$$E(u^{**}) \leqslant E(u^{*}),$$

где $u^{**} \in U^{(1)}$, (u_0, L) — совокупность функций u, удовлетворяющих уравнению (1) в T и условию

$$\int_L \left[p \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \left(a \frac{\partial x}{\partial \nu} + b \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) \right] (u - u_0)\, ds \leqslant 0,$$

u^* — решение краевой задачи, u_0 — значение u^* на контуре, ν — внешняя нормаль к контуру.

М. Г. Слободянский

3285. О составлении уравнений в конечных разностях при приближенном решении уравнения Лапласа. Бахвалов Н. С., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 259—260

3286. Приближенное нахождение наибольшего напряжения скольжения в закрученном призматическом стержне с общим сечением. Клатил (Přibližné určení největšího smykového napětí v kroucené prismatické tyči s obecným průřezem. Klátil Jiří), Aplikace mat., 1957, 2, № 3, 202—214 (чешск.; рез. русск., франц.)

3287. О сходимости различных итерационных процессов. Лоуан (On the convergence of various iteration processes. Lowan Arnold N.), Scripta Math., 1957, 22, № 3—4, 222—227 (англ.)

Известный способ исследования сходимости итерационного процесса для решения системы линейных алгебраических уравнений $x = Ax + b$ (с помощью собственных значений матрицы A) применяется к системам, возникающим при решении уравнения теплопроводности «неявными» разностными методами. Разобрано несколько примеров.

А. Ф. Филиппов

3288. Конечноразностные методы решения задачи Гурса. Ярышева И. М., Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-т, 1957, № 5, 35—40

Рассматривается вопрос численного решения задачи Гурса:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = f(x, t, U), \quad U|_{x=0} = U|_{t=0} = 0 \qquad (1)$$

аналогами методов Адамса и Коуэлла. Дается вычислительная схема:

$$u_{i+1, j+1} = u_{i+1, j} + u_{i, j+1} - u_{i, j} + hk \sum_{\nu, \mu=0, 0}^{n, m} a'_{\nu, \mu} f_{i+1-\nu, j+1-\mu}, \qquad (2)$$

где h — шаг по оси x, а k — по t.

Доказываются теоремы устойчивости и сходимости для схемы (2) в случае, когда $f(x, t, u) = c(x, t) U(x, t) + \varphi(x, t)$. Отмечается, что можно получить аналогичные теоремы также в случае, когда $f(x, t, U)$ есть нелинейная функция U. Если правая часть задачи (1) имеет вид: $f(x, t, U) + b(x, t) U_x + c(x, t) U_t$, то можно построить схемы, аналогичные схемам (2), для которых будет справедлива теорема устойчивости.

Значения $U(x, t)$ на начальных слоях считаются известными и вопрос о нахождении их не рассматривается.

Н. К. Чухрукидзе

3289. Об одном способе приближенного решения задачи Лаврентьева-Бицадзе. Ладыженская О. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, вып. 4, 187—189

Указывается способ приближенного решения уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} \operatorname{sgn} y = 0 \qquad (1)$$

в области D, ограниченной в верхней полуплоскости гладкой линией L с концами A и B на оси x, а в нижней — кусками характеристик AC и BC, с граничными условиями

$$u|_L = \varphi(x, y), \quad u|_{AC} = \psi(x).$$

Очевидным образом эта задача сводится к следующей: в области D', ограниченной линией L и отрезком AB, найти решение уравнения Лапласа с граничными условиями

$$u|_L = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \qquad (3)$$

где $l = (-1, 1)$. Уравнение Лапласа заменяется разностным уравнением на квадратной сетке. Доказывается, что решение разностного уравнения существует и сходится при измельчении сетки к точному решению задачи в предположении, что точное решение имеет ограниченные третьи производные в области D'.

Для задачи (1), (2) (без приведения к (3)) метод сеток применялся З. И. Халиловым (РЖМат, 1953, 1401).

А. Ф. Филиппов

3290. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма. Бельтюков Б. А., Уч. зап. Иркутского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 87—95

Предлагается приближенное построение решения линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода путем дробления промежутка интегрирования на части и замены данного ядра вырожденным ядром на каждой части промежутка. Приводятся примеры. Оценок погрешности нет.

Н. П. Сергеев

3291. Ошибки в решениях интегральных уравнений. Мун, Спенсер (Errors in the solution of integral equations. Moon Parry, Spencer Domina Eberle), J. Franklin Inst., 1957, 264, № 1, 29—41 (англ.)

Общеизвестными методами даются оценки погрешности в решений линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода при замене данного ядра и данного свободного члена через другое ядро и другой свободный член. Для полученного уравнения предполагается возможность решения в конечном виде. Приведены примеры, где данное ядро заменяется экспоненциальным ядром, зависящим от разности аргументов исходного ядра.

В литературе можно найти более точные оценки (см., например, Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Л.—М., Гостехиздат, 1949, гл. II, § 4, стр. 157).

Н. П. Сергеев

3292. О сходимости процесса вычисления определенного интеграла, доставляемого формулой квадратур. Гиццетти (Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura. Ghizzetti Aldo), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 201—222 (итал.)

Элементарной формулой квадратур автор называет равенство вида

$$\int_a^b f(x)\, y(x)\, dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi} f^{(h)}(x_i) + R(f), \qquad (1)$$

где коэффициенты A_{hi} выбираются так, чтобы (1) выполнялось точно без $R(f)$ для некоторой системы функций. Остаток $R(f)$ представим в виде

$$R(f)=\sum_{h=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\int_a^b \varphi_i(x)\,a_h f^{(n-h)}(x)\,dx, \qquad (2)$$

где φ_i, $a_h(x)$ зависят от упомянутой системы (см. более ранние работы автора, Rend. Semin. mat. fis. Milano, 1954—55, 24; Lezioni di Analisi superiore, Roma, 1955—56, cap. VI).

Пусть отрезок $[a, b]$ разделен на ν частей точками $a=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_\nu=b$. Частичные отрезки $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ линейным преобразованием приводятся к $[a, b]$ и применение формулы (1) к каждому из интегралов $\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}$ при $g(x)\equiv 1$ позволяет построить «обобщенную формулу квадратур»

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{h=0}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{h+1}\times$$

$$\times A_{hi} f\left(\alpha_{j-1}+\delta_j\frac{x-a}{b-a}\right)+\rho(f),\quad (\delta_j=\alpha_j-\alpha_{j-1}). \qquad (3)$$

Процесс вычисления называется сходящимся, если $\rho(f)\to 0$ при

$$\delta\to 0\quad (\delta=\max\delta_j).$$

Теорема. Для того чтобы в (3) остаток $\rho(f)\to 0$ при $\delta\to 0$, необходимо и достаточно выполнение условия $\rho(1)=(b-a)-\sum_{i=1}^{m}A_{0i}=0$. Если же $S_0=\sum_{i=1}^{m}A_{0i}\neq b-a$ и $S_0\neq 0$, то будет сходиться процесс вычислений, определяемый равенством

$$\int_a^b f dx=\frac{b-a}{S_0}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{h+1}\times$$

$$\times A_{hi} f^{(h)}\left(\alpha_{j-1}+\delta_j\frac{x-a}{b-a}\right)+\bar{\rho}(f).$$

Когда $g(x)$ не есть постоянная величина, линейное преобразование $x'=\alpha_{j-1}+\delta_j\frac{x-a}{b-a}$, переводящее $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ в $[a, b]$, изменяет весовую функцию $g(x')$ и преобразует ее в

$$g\left(\alpha_{j-1}+\delta_j\frac{x-a}{b-a}\right)=g(\lambda_j x+(1-\lambda_j)\mu_j)$$

$$[0<\lambda_j\leqq 1,\quad a\leqq\mu_j\leqq b].$$

Для построения «обобщенной формулы квадратур» в этом случае рассматривается интеграл с весом, зависящим от двух параметров

$$\int_a^b f(x)\,g[\lambda x+(1-\lambda)\mu]\,dx\quad [0<\lambda\leqslant 1,\ a\leqslant\mu\leqslant b].$$

В элементарной формуле вида (1) для такого интеграла коэффициенты A_{hi} будут зависеть от λ и μ: $A_{hi}=A_{hi}(\lambda, \mu)$. «Обобщенная формула квадратур» для $\int_b^a fg dx$ будет такой

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{h+1}\times$$

$$\times A_{hi}(\lambda_j, \mu_j) f^{(h)}\left(\alpha_{j-1}+\delta_j\frac{x-a}{b-a}\right)+\rho(t). \qquad (4)$$

Для (4) получен лишь следующий результат: если формула (1) такова, что в представлении (2) остатка $R(f)$ ее, $a_{n-s}\equiv 0$ $(s=0, 1, \ldots, p-1)$, то процесс вычислений для (4) сходится и $\rho(f)=0$ (δ^{p-1}).

В. И. Крылов

3293. Приближенное вычисление интеграла Стилтьеса методом избранных ординат. Хиршлеберг, Экснер (Genäherte Berechnung Stieltjesscher Integrale mit Auswahlordinatenverfahren. Hirschleber A., Exner G.), MT—Mitt., 1957, 4, № 2, 77—88 (нем.)

Рассматривается метод приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x, z)\,dH(x, y), \qquad (1)$$

называемый авторами методом «избранных ординат», который рекомендуется при решении класса задач с одной и той же базисной функцией $H(x, y)$.

Для вычисления интеграла (1) сначала производится определенное разбиение интервала изменения базисной функции и для полученного разбиения выбирается та или иная квадратурная формула. По таблице значений функции $H(x, y)$ с помощью обратной линейной интерполяции на точки выбранного разбиения находятся соответствующие значения «избранных абсцисс» x_j. Зависимость x_j от y может быть выражена с помощью номограмм. Суммирование соответствующих значений $f(x_j, z_0)$ по выбранной квадратурной формуле дает приближенное значение интеграла (1).

Метод избранных ординат неоднократно применялся авторами для решения класса задач с базисной функцией $E_s(\lambda, T)$ — функцией излучения Планка. Метод избранных ординат не обладает высокой точностью, но прост и годен для решения многих практических задач, примеры которых приводятся авторами.

А. Н. Иванова

3294. Об обобщении Голомбом формулы Симпсона. Шарма (On Gołąb's contribution to Simpson's formula. Sharma A.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 240—246 (англ.)

Пусть $f(x)$ в окрестности $x=a$ может быть представлена в виде $f(a+h)=f(a)+a_p h^p+a_q h^q+a_r h^r+\ldots+g(h)$, где $a_p, a_q, a_r, \ldots\neq 0$, p, q, r, s — положительные целые такие, что $1\leqslant p<q<r<s$, а $g(h)$ имеет порядок h^{s+1}.

Рассматривается приближенная формула

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx\cong h[\lambda_0 f(a)+\lambda_1 f(a+\theta_1 h)+$$

$$+\lambda_2 f(a+\theta_2 h)], \qquad (1)$$

где θ_1 и θ_2 — такие числа, что $0<\theta_1\leqslant\frac{1}{2}<\theta_2\leqslant 1$ $\left(\text{при } \theta_1=\frac{1}{2} \text{ и } \theta_2=1 \text{ получается формула Симпсона}\right)$.

Параметры λ_0, λ_1, λ_2 для заданных θ_1 и θ_2 ищутся так, чтобы остаточный член был наивысшего возможного порядка малости относительно h.

Доказывается, что если θ_1 и θ_2 — заданные числа $(0<\theta_1<\theta_2\leqslant 1)$ и λ_1 и λ_2 определяются равенствами:

$$\lambda_1=\frac{(p+1)\,\theta_2^p-(q+1)\,\theta_2^p}{(\theta_2/\theta_1)^p-(\theta_2/\theta_1)^q}\cdot\frac{\theta^{-p-q}}{(p+1)(q+1)},$$

$$\lambda_2=\frac{(q+1)\,\theta_1^{-p}-(p+1)\,\theta_1^{-q}}{(\theta_2/\theta_1)^p-(\theta_2/\theta_1)^q}\cdot\frac{1}{(p+1)(q+1)},$$

а $\lambda_0=1-\lambda_1-\lambda_2$, то остаточный член формулы (1) имеет порядок выше, чем h^{r+1}. Далее рассматривается вопрос, можно ли при фиксированном θ_1, выбрать так θ_2, чтобы увеличить порядок малости остаточного члена. Необходимым и достаточным условием для этого является существование такого θ $(\theta_1<\theta\leqslant 1)$, для которого

$$\begin{vmatrix}(p+1)\,\theta_1^p & (p+1)\,\theta^p & 1\\ (q+1)\,\theta_1^q & (q+1)\,\theta^q & 1\\ (r+1)\,\theta_1^r & (r+1)\,\theta^r & 1\end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Доказывается, что для любого θ_1 из [0, 1] существует единственный корень θ_0 уравнения (2) такой, что $\theta_1<\theta_0<1$, и уравнение (2) не имеет общего корня с уравнением

$$\begin{vmatrix}(p+1)\,\theta_1^p & (p+1)\,\theta^p & 1\\ (q+1)\,\theta_1^q & (q+1)\,\theta^q & 1\\ (s+1)\,\theta_1^s & (s+1)\,\theta^s & 1\end{vmatrix}=0.$$

Это означает, что при $\theta_2=\theta_0$ порядок малости остаточного члена формулы (1) есть точно $s+1$.

А. Н. Иванова

3295. Замечание о некоторых квадратурных формулах. Санкаран (Note on some quadrature formulae. Sankaran M.), Math. Gaz., 1957, 41, № 336, 130—131 (англ.)

Сравниваются остаточные члены квадратурных формул Симпсона, Харди, Буля и Уэддля.

А. Н. Иванова

3296. Численное интегрирование. Пособие для инженеров-химиков. Гидли, Рейс (Numerical integration: a tool for chemical engineers. Gidley John L., Rase Howard F.), J. Chem. Educ., 1955, 32, № 10, 535—538 (англ.)

Детально рассмотрен пример применения известных формул Симпсона и Уэддля для приближенного вычисления одного определенного интеграла, встречающегося в химии.

В. К. Саульев

3297. Решение трехчленных уравнений, встречающихся в строительной механике корабля. Давыдов В. В., Тр. Горьковск. ин-та инж. водн. трансп., 1957, вып. 14, 10—24

Для системы трехчленных алгебраических уравнений $Ax=b$, где x, b — n-мерные векторы, а матрица A имеет вид

$$A=\{\ldots,\ 0,\ a_{i,\,i-1},\ a_{i,\,i},\ a_{i,\,i+1},\ 0,\ \ldots\},$$

автор предлагает следующий метод решения. Каждая компонента x_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ вектора x разыскивается в виде суммы двух слагаемых приближенного значения $\bar{x}_i$ и поправки Δx_i:

$$x_i=\bar{x}_i+\Delta x_i, \qquad (1)$$

где $\bar{x}_i$ и Δx_i определяются посредством формул

$$\bar{x}_i=\begin{cases}\dfrac{b_1}{A_1} & \text{для } i=1\\ \dfrac{b_i-a_{i,\,i-1}\bar{x}_{i-1}}{A_i} & \text{для } i=2,\ 3,\ \ldots,\ n;\end{cases}$$

$$\Delta x_i=\begin{cases}\dfrac{a_{1,2}}{A_1} & \text{для } i=1,\\ \dfrac{a_{i,\,i+1}}{A_i}\,x_{i+1} & \text{для } i=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\\ 0 & \text{для } i=n;\end{cases}$$

$$A_i=\begin{cases}a_{11}, & \text{для } i=1,\\ a_{ii}-\dfrac{a_{i-1,\,i}a_{i,\,i-1}}{A_{i-1}} & \text{для } i=2,\ 3,\ \ldots,\ n.\end{cases}$$

Так как при этом x_n оказывается не приближенным, а точным, то, переходя последовательно от i-й компоненты к $i-1$-й $(i=n,\ n-1,\ \ldots,\ 2)$ в соответствии с формулой (1), можно получить точные значения всех компонент вектора x. Вычисления предлагается проводить в три этапа: вычисление коэффициентов A_i, приближенных значений x_i и, наконец, точных значений x_i.

Обсуждается вопрос о точности метода. Количество арифметических операций в предлагаемом методе решения много меньше, чем в других методах, имеющих применение в строительной механике.

Н. Я. Лященко

3298. О матричном исчислении. III. Бодевиг (Zum Matrizenkalkul. III. Bodewig E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., math., 1956, A59, № 3, 305—312; Indagationes, 1956, 18, № 3, 305—312 (нем.)

Ч. II см. РЖМат, 1957, 4614.

Обращение неособенной матрицы A заменяется суммированием ряда

$$A^{-1}=R_1(E-C)^{-1}=R_1\sum_{k=0}^{\infty}C^k,$$

где $C=E-AR_1$ и R_1 подбирается так, чтобы собственные значения C лежали внутри единичного круга. Приводятся различные приемы получения матрицы R_1. При обращении треугольных матриц, во избежание умножения на нули, автор рекомендует рассматривать элементы матрицы расположенными не по строкам и столбцам, а в виде «параллелей» относительно диагонали. Вводятся действия над параллелями.

В. Н. Кублановская

3299. О матричном исчислении. IV. Теорема Фробениуса. Бодевиг (Zum Matrizenkalkul. IV. Der Satz von Frobenius. Bodewig E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, A60, № 1, 82—87; Indagationes math., 1957, 19, № 1, 82—87 (нем.)

Для определения собственных векторов матрицы A автор рекомендует наряду с рациональными функциями $f(A)$ применять трансцендентные функции, как-то: l^A, $\log A$, $\cos A$, $\sin A$ и др. Эти функции используются для подавления компонент в разложении $f(A)\,x_0$ по собственным векторам, и выбор их зависит от расположения собственных чисел A. Применение различных функций $f(x)$ иллюстрируется на определении собственных векторов матрицы 4-го порядка.

В. Н. Кублановская

3300. Область применимости обобщенной формулы наименьших квадратов. **Велондек** (Zakres ważności uogólnionych wzorów rachunku wyrównawczego. Wielądek Romuald), Acta geophys. polon., 1956, 4, № 1, 43—51 (польск.; рез. англ.)

Рассматривается вопрос о приближенном вычислении линейной комбинации $U = f_1x_1 + \ldots + f_mx_m$ неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ по найденным приближенным значениям $l_1, \ldots, l_n$ для n линейных комбинаций неизвестных $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m$, $i = 1, \ldots, n$ $(n > m)$. Предполагаются заданными математические ожидания $q_{ij} = E\varepsilon_i\varepsilon_j$ $(\varepsilon_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m - l_i$, E — символ математического ожидания), ранг матрицы коэффициентов a_{ij} предполагается равным m. Приближенное значение $\tilde{U}$ искомой величины U ищется в виде суммы $\tilde{U} = g_1l_1 + \ldots + g_nl_n$, коэффициенты $q_1, \ldots, q_n$ подчиняются условиям $a_{1j}g_1 + \ldots + a_{nj}g_n = f_j$, $j = 1, \ldots, m$, в силу которых $U - \tilde{U} = \varepsilon_1g_1 + \ldots + \varepsilon_ng_n$, после чего ищется минимум квадратической формы

$$V(g_1, \ldots, g_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}g_ig_j.$$

Приведено два варианта решения задачи об условном экстремуме функции $V(q_1, \ldots, q_n)$.

В отличие от обычной векторно-матричной записи в статье применена символика «краковианов».

И. М. Рапопорт

3301. Решение кубического уравнения. **Астуни** (La risoluzione dell'equazione cubica. Astuni Enrico), Ricerca scient., 1955, 25, № 7, 2048—2068 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Для решения кубического уравнения

$$f(x) = x^3 + a_2x + a_3 = 0, \qquad (1)$$

определяют параметр m из соотношений

$$m = \begin{cases} t, \text{ если } |t| \leqslant 0{,}01 \\ \sqrt[3]{t}, \text{ если } |t| \geqslant 10^9, \ t = a_3^2/a_2^3. \end{cases}$$

Для промежуточных значений t параметр m находят из таблицы или диаграммы. Тогда один из вещественных корней α_3 (с противоположным знаком) уравнения (1) можно найти приближенно из соотношения

$$\alpha_3 = \frac{1}{1+m}\frac{a_3}{a_2}.$$

Остальные два корня уравнения (1) находятся из уравнения

$$x^2 - \alpha_3x + a_3/\alpha_3 = 0.$$

В. К. Саульев

3302. О приближенной факторизации полинома. **Марковић** (О приближној факторизацији полинома. Марковић Драгољуб), Весн Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 1—2, 53—58 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Предлагается следующий метод приближенного вычисления вещественного корня алгебраического уравнения

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_kx^k + x^m = 0 \qquad (1)$$

с вещественными коэффициентами. Уравнение (1) записывается в форме

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} a_{1k}x^k \Big/ \sum_{k=0}^{m-1} a_{0k}x^k, \qquad (2)$$

после чего строятся соотношения

$$x^j = \sum_{k=0}^{m-1} a_{jk}x^k \Big/ \sum_{k=0}^{m-1} a_{0k}x^k, \ j = 2, 3, \ldots, m-1, \qquad (3)$$

путем умножения обеих частей уравнения (2) на x^{j-1} и понижения степени числителя посредством уравнения (1). Итерационный процесс для системы уравнений (2) и (3) с неизвестными $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ приводит к формулам вида

$$x^j = \sum_{k=0}^{m-1} a_{jk}(n)\,x^k \Big/ \sum_{k=0}^{m-1} a_{0k}(n)\,x^k,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1, \ n = 1, 2, \ldots, \qquad (4)$$

$(a_{jk}(1) = a_{jk}$; $j, k = 0, 1, \ldots, m-1)$. Показано, что если существует общий предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{jk}(n)}{a_{j-1,\,k}(n)} = \lambda \neq 0, \ j = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

то он является корнем уравнения (1).

Приведен числовой пример. И. М. Рапопорт

3303. О сходимости некоторых итерационных процессов. **Салехов Г. С., Мертвецова М. А.**, Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 3, 341—374 (кит.) Перевод с русского (РЖМат, 1956, 2460).

3304. О некоторых условиях сходимости метода Ньютона и о применении метода к решению систем уравнений. **Вертгейм Б. А.**, Науч. тр. Молотовск. горн. ин-та, 1956, сб. 1, 142—153

Рассматривается метод Ньютона для решения нелинейных функциональных уравнений

$$P(x) = 0, \qquad (1)$$

где $P(x)$ — непрерывная операция, первая производная которой в смысле Фреше удовлетворяет условию Гельдера

$$\|P'(x_1) - P'(x_2)\| \leqslant K\|x_1 - x_2\|^{\alpha} \qquad (2)$$

(K и α — постоянные, $0 < \alpha \leqslant 1$) в некоторой области. Доказывается лемма: Если $P(x)$ — дифференцируемая (в смысле Фреше) операция из X в Y (X и Y — пространства Банаха) и для $P'(x)$ выполнено условие Гельдера (2) с фиксированным элементом $x_2 \equiv x_0$, то

$$\|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) - P'(x_0)\,\Delta x\| \leqslant \frac{K}{1+\alpha}\|\Delta x\|^{1+\alpha}$$

При этом достаточно выполнение условия (2) на отрезке $x_t = x_0 + t\Delta t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Справедлива также теорема 1: Пусть для уравнения (1) выполнены условия: а) в начальной точке x_0 линейная операция $P'(x_0)$ имеет обратную $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и известны оценки $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$, $\|\Gamma_0P(x_0)\| \leqslant \eta_0$; б) для $P'(x)$ выполнено ослабленное условие Гёльдера (2) с фиксированной точкой $x_2 \equiv x_0$ и при любом x_1 из области x_0

$$\|x - x_0\| \leqslant N\eta_0, \text{ где } 1 < N \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha} \qquad (4)$$

в) постоянные B_0, η_0, K, α и N в условиях а) и б) таковы, что

$$B_0K\eta_0^{\alpha} = h_0 \leqslant (1+\alpha)\frac{N-1}{N^{1+\alpha}} = \varphi(N). \qquad (5)$$

Тогда в сфере (4) уравнение (1) имеет единственное решение x^*, к которому сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_0)]^{-1}P(x_n) \qquad (6)$$

модифицированного метода, причем

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}, \quad q = h_0 N^\alpha < 1. \qquad (7)$$

Если решение уравнения (1) находится с помощью основного метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n), \qquad (8)$$

то справедлива теорема 2: Пусть выполнено условие а) теоремы 1; пусть для $P'(x)$ выполнено условие Гельдера (2) при любых x_1 и x_2 из сферы $\|x - x_0\| \leqslant \frac{1}{1-s}\eta_0$, $S = \left(\frac{Q}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$; пусть $h_0 = B_0 K \eta_0^\alpha \leqslant Q(\alpha)$, где $Q = Q(\alpha)$ — корень уравнения $\left(\frac{Q}{1+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = 1 - Q$. Тогда уравнение (1) имеет решение x^* в рассматриваемой сфере и приближения (8) основного метода сходятся к x^*, причем $\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{s^n}{1-s}\eta_0$; единственность решения имеет место в сфере более широкой

$$\|x - x_0\| \leqslant L\eta_0, \quad L = \left(\frac{h_0}{1+\alpha}\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}; \quad L \geqslant S^{-1} \geqslant 2$$

при условии, что (2) тоже выполнено в последней сфере.

Рассматриваются условия применения метода Ньютона для приближенного решения систем алгебраических уравнений. Приводится конкретный пример решения системы. М. А. Мертвецова

3305. О кафедре вычислительной математики Московского государственного университета. Березин И. С., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 255—261

3306. Улучшение итерационного процесса для автоматического деления. Бём (Perfezionamento di un processo iterativo atto alla divisione automatica. Bohm Corrado), Ricerca scient., 1955, **25**, № 7, 2077—2080 (итал.; рез. франц., нем., англ.)

Электронная вычислительная машина, которая не имеет органа деления, должна при помощи специальной подпрограммы находить обратные числа. В данной заметке предлагается улучшение этой подпрограммы, которое позволяет, примерно, на 30% уменьшить число операций (умножений и вычитаний) и общее время вычисления без уменьшения точности.

Резюме автора

3307. Обращение ортогональных разложений в последовательность подходящих дробей. Стесин И. М., Вычислит. математика, сб. 1, 1957, 116—119

Подобно обращению степенного ряда в непрерывную дробь осуществляется обращение ряда $R = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x)$, где $\omega_k(x)$ — система ортогональных с весом функций, удовлетворяющих некоторому рекуррентному соотношению, в последовательность рациональных дробей. Эти дроби, как и в случае непрерывных дробей, называются подходящими. Дан пример: функция $\ln(1+x)$ на интервале (0,1) разлагается в ряд по полиномам Чебышева (до восьмого порядка), затем осуществляется указанное выше обращение. В результате $\ln(1+x)$ с большой точностью аппроксимируется рациональной дробью.

Я. И. Алихашкин

3308. Замечание о приближенном вычислении предела последовательности. Чеймберс (Note upon the numerical evaluation of limits of sequences. Chambers Ll. G.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 57, 19—21 (англ.)

Пусть $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ и $s = s_n + r_n$, где r_n — остаточный член, представимый в виде $r_n = Kp_n(1+q_n)$; здесь $q_n = o(1)$, p_n — функция от n простейшего вида (например, $1/n$, $1/2^n$ и т. п.), K — константа, которая может быть и неизвестной.

Умножая уравнение $s = s_n + r_n$ на p_{n+1}, а уравнение $s = s_{n+1} + r_{n+1}$ на p_n и вычитая одно из другого, получим $s = s_n' + r_n'$. Если $\left|\frac{r_n'}{r_n}\right| < 1$, то s_n' будет лучше чем s_n, аппроксимировать s. В качестве примера вычисляется $\pi/2$ с помощью интеграла $\pi/2 = \int_0^\infty dx/(1+x^2)$. Дана оценка ошибки. Я. И. Алихашкин

3309. Новые результаты в численных методах конформного отображения. Варшавский (Recent results in numerical methods of conformal mapping. Warschawski S. E.), Proc. Sympos. Appl. Math., **6**, New York — Toronto — London, 1956, 219—250 (англ.)

Приведены новые данные об оценках погрешностей и результатах расчетов для перечисляемых ниже эффективных методов конформного преобразования односвязных областей на круг.

I. Область R ограничена замкнутой жордановой линией C с непрерывно вращающейся касательной. Пусть уравнение C есть $z = \zeta(s)$, где s — длина дуги, $0 \leqslant s \leqslant L$. $f(z) = w$ — функция, конформно преобразующая R на круг $|w| < 1$ так, что точки $z_0 \in R$ и $z_1 \in C$ переходят в $w = 0$ и $w = 1$. Функция $\theta(s) = \arg f[\zeta(s)]$ удовлетворяет интегральному уравнению (Гершгорин, Матем. сб., 1933, **40**, 48—58):

$$\theta(s) = \int_0^L K(s, t)\,\theta(t)\,dt - 2\beta(s), \qquad (1)$$

$$\beta(s) = \arg\frac{z_1 - \zeta(s)}{z_0 - \zeta(s)}, \quad K(s, t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r},$$

$$r = |\zeta(s) - \zeta(t)|,$$

n — внутренняя нормаль к C в точке t. $\lambda_1 = 1$ есть собственное значение ядра $K(s, t)$ и $\theta(s) = \text{const}$ есть соответствующая собственная функция. Для прочих собственных значений выполняются неравенства $\lambda_1 = 1 < |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots$. Уравнение (1) решалось методом итерации $\theta_{n+1}(s) = \int_C K(s, t)\,\theta_n(t)\,dt - 2\beta(s)$, $[n = 0, 1, \ldots]$. За $\theta_0(s)$ бралась любая непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $\theta_0(L) - \theta_0(0) = 2\pi$. Обозначим $\mu(s)$ плотность «свободного распределения» единичного электрического заряда на C.

Теорема 1. Если C принадлежит классу C'_α, $0 < \alpha \leqslant 1$ и последовательные приближения $\theta_n(s)$ выбраны так, что $\int_C \theta_n \mu ds = \int_C \theta_0 \mu ds$, тогда верна оценка

$$|\theta_{n+1}(s) - \theta(s)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{|\lambda_2|^n}\|K(s, t)\|\,\|\theta_0' - \theta'\|\sqrt{\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - 1}}.$$

Норма понимается в смысле пространства непрерывных функций.

Теорема 2. Если C принадлежит классу C''_α и $\zeta''(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера степени α,

$0 < \alpha \leq 1$, тогда $\theta'_{n+1}(s)$ равномерно на $0 \leq s \leq L$ сходится к $\theta'(s)$ и верна оценка

$$|\theta'_{n+1}(s) - \theta'(s)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda_2|^{n-1}} \|\theta'_0 - \theta'\| \cdot \left\| \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \right\| \left[\frac{\lambda_2^2}{\pi^2(\lambda_2^2 - 1)} \right]^{1/2}.$$

При некоторых предположениях о граничной линии C даны оценки для $|\lambda_2|$. Особо рассмотрены случаи «почти круговых» и «почти выпуклых» областей.

Вычисления проводились для эллипсов с отношениями полуосей $k = a/b = 1{,}2$; $k = 2$; $k = 5$. Результаты получены с хорошей точностью и показали выгодность уравнения (1) и метода итерации для нахождения преобразующей функции. Интеграл в (1) заменялся квадратурной суммой Уэддля.

II. Область R ограничена жордановой линией C z-плоскости с уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где $\rho''(\varphi)$ непрерывна. $z = f(w)$ преобразует круг $|w| < 1$ на R так, что $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$. Ищется соответствие между границами: $\varphi(\theta) = \arg f(e^{i\theta})$. Если $\beta(\varphi)$ есть угол между радиусом-вектором и внешней нормалью к C в точке $[\varphi, \rho(\varphi)]$, то для $\varphi(\theta)$ выполняется интегро-дифференциальное уравнение

$$\lg \varphi'(\theta) + \lg \sec \beta[\varphi(\theta)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{\beta[\varphi(\theta + t)] - \beta[\varphi(\theta - t)]\} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} t\, dt. \quad (2)$$

Решение нормализуется условием

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = 0. \quad (3)$$

Если $u(w)$ есть гармоническая в $|w| < 1$ функция, принимающая на окружности $|w| = 1$ значения $u(e^{i\theta}) = \beta[\varphi(\theta)]$ и $v(w)$ есть сопряженная с ней функция, удовлетворяющая условию $v(0) = 0$, то интеграл, стоящий справа в (2), равен $-v(e^{i\theta})$. Для построения дискретного аналога уравнения (2), функции $\varphi(\theta)$ и $\beta[\varphi(\theta)]$ заменялись интерполяционными тригонометрическими многочленами с равноотстоящими узлами. Производная $\varphi'(\theta)$ заменялась простейшим разностным отношением $\varphi'_n = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{h}$. Полученная система решалась итерациями при соблюдении нормировки (3). Вычисления производились для эллипсов с $k = a/b = \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$.

III. Область ограничена замкнутой спрямляемой линией Жордана C и $p_n(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — системы многочленов, ортонормированных на линии C. Известно, что функция $w = \psi(z)$ $[\psi(r_0) = 0,\ \psi'(r_0) = 1]$, преобразующая область на круг, через многочлены $p_n(z)$ имеет следующее выражение $\psi(z) = K^{-2}(z_0, z_0) \int_{z_0}^{z} K^2(z_0, z)\, dz$, $K(z_0, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{p_\nu(z_0)} \times p_\nu(z)$. Если ряд для $K(z_0, z)$ оборвать на конечном числе членов, получится приближенное выражение для $\psi(z)$. Приведена оценка погрешности такого приближения.

IV. C_ε есть семейство замкнутых линий: $z = \zeta(t, \varepsilon)$ $[0 \leq t \leq 1,\ |\varepsilon| \leq 1]$. $\zeta(t, \varepsilon)$ аналитическая по ε при $|\varepsilon| \leq 1$ и 1-периодическая по t. Внутренность R_ε линии C_ε отображается на круг $|w| < 1$ при помощи функции $w = f(z, \varepsilon)$, так чтобы $f(z_0, \varepsilon) = 0$, $f'[\zeta(z_0, \varepsilon), \varepsilon] = 1$. Тогда $\theta(t, \varepsilon) = \arg f[\zeta(t, \varepsilon), \varepsilon]$ будет удовлетворять уравнению вида (1):

$$\theta(t, \varepsilon) = \int_0^1 K(t, \tau, \varepsilon)\, \theta(\tau, \varepsilon)\, d\tau - 2\beta(t, \varepsilon). \quad (4)$$

Рассматривается степенной ряд $\theta(t, \varepsilon) = \theta_0(t) + \varepsilon\theta_1(t) + \ldots$ Для $\theta_k(t)$ при помощи (4) строится интегральное уравнение $\theta_k(t) = \int_0^1 \theta_k(\tau)\, K_0(t, \tau)\, d\tau + h_k(t)$, где $K_0(t, \tau)$ есть ядро, связанное с C_0. Предлагается ограничиться приближением $\theta(t, \varepsilon) \approx \theta_0(t) + \varepsilon\theta_1(t)$. Приведена оценка погрешности.

В. И. Крылов

3310. Физическая точка зрения в вопросах выравнивания экспериментальных кривых. Вернотт (Le point de vue du physicien dans le problème du lissage des courbes expérimentales. Vernotte Pierre. Publs scient. et techn. Ministère air, 1953, N. T., № 46, 23 p.) (франц.)

3311. К методу подкасательной. Розенкранц А. С., Сб. научн. тр. Ивановск. энерг. ин-та, 1957, вып. 7, 11—22

Ранее известный графический метод приближенного построения интегральных кривых линейного дифференциального уравнения

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = F(t) \quad (\tau = \text{const})$$

(Костенко М. В., Электричество, 1939, № 1, 43—47) распространен на обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами — вещественными и комплексными. Показана также возможность аналогичного графического решения уравнений порядка $n > 2$.

Уравнение

$$a^2 d^2y/dt^2 + 2b\, dy/dt + y = F(t)$$

$(a,\ b = \text{const})$ подстановкою $m + n = 2b$ приводится к виду

$$m[(a^2/m)\, d^2y/dt^2 + dy/dt] + n\, dy/dt + y = F(t). \quad (1)$$

Введя обозначение

$$n\, dy/dt + y = \varphi(t) \quad (2)$$

и выбрав m так, чтобы $n = a^2/m$, можно переписать (2) в виде

$$m \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = F(t). \quad (3)$$

Коэффициент m определяется квадратным уравнением $m^2 - 2bm + a^2 = 0$. Если m и n вещественны, то методом Костенко строится приближенная интегральная кривая $\varphi(t)$, удовлетворяющая уравнению (3) и начальному условию $\varphi(0) = F(0) - m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0}$. Для кривой $\varphi(t)$ и $y(0)$ тем же методом строится искомая кривая $y(t)$.

Если m и n — сопряженные комплексы, то, подставив $m = ae^{i\alpha}$ в (3) и переписав последнее в конечных разностях $ae^{i\alpha}\Delta\varphi/\Delta t + \varphi \cong F(t)$, получаем

$$\Delta\varphi = \frac{F(t) - \varphi(t)}{(a/\Delta t)} e^{-i\alpha}.$$

Построение векторов $\Delta\varphi$ ведется в плоскости комплексного переменного. На действительной оси помечаются точки S_i, соответствующие значениям $F(t)$ при разных значениях $t = t_i$ $(\Delta t = \text{const})$. Затем поме-

чается точка R_0, изображающая $\varphi(0)$. Под отрицательным углом α к направлению R_0S_0 откладывается $\overline{R_0R_1} = \overline{R_0S_0}/(a/\Delta t)$. Под таким же углом к R_1S_1 откладывается $R_1R_2 = R_1S_1/(a/\Delta t)$ и т. д.

Ломаная $R_0, R_1, \ldots, R_i \ldots$ аппроксимирует кривую $\varphi(t)$. По ней в действительной плоскости строится кривая $\mathrm{Re}\,\varphi(t)$ и методом Костенко строится интегральная кривая уравнения (2), переписанного в виде $bdy/dt + y = \mathrm{Re}\,\varphi(t)$, $(\mathrm{Re}\, n = b)$.

Рассмотрен конкретный пример. Применение описанного метода к уравнениям порядка $n > 2$ сводится к предварительному преобразованию их в системе совокупных уравнений первого порядка.

А. Б. Штыкан

3312. Системы уравнений, разрешаемые при помощи номограмм. Рускони (I sistemi di equazioni risolti con nomogrammi ad allineamento. Rusconi Franco), Ingegneria mecc., 1956, 5, № 5, 17—21 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

3313. Об основных проблемах номографии. Бляшке (Sui problemi fondamentali della nomografia. Blaschke Wilhelm), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1—2, 46—52 (итал.)

3314 К. Эксперименты по вычислению конформных отображений. Тодд (ред.) (Experiments in the computation of conformal maps. Ed. Todd John (Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., № 42). Washington, U. S. Gov. Print. Office, 1955, 111, 61 pp., ill.) (англ.)

3315 К. Исследование методов численного решения алгебраических уравнений. Родеха (Investigaciones sobre un grupo de métodos de resolución numérica de ecuaciones algebraicas. Rodeja E. G. Madrid, C. S. de I. C., 1956, 144 p., 100 ptas), Bibliogr. hisp., 1957, 16, № 7—8, 182 (исп.)

3316 К. Численное решение алгебраических уравнений. Пелтье (Résolution numérique des équations algébriques. Peltier Jean. Paris, Gauthier—Villars, Eyrolles, 1957, IV, 245 p., ill., 2 500 fr.) (франц.)

Книга содержит девять глав.

В гл. 1 дается определение алгебраического уравнения степени n вида

$$E(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = 0. \qquad (1)$$

Вводится понятие приближенного арифметического корня уравнения (1) и понятие точного корня, т. е. корня, полученного в виде функции от коэффициентов этого уравнения. Рассматриваются основные свойства алгебраического уравнения: разложимость на множители, связь между симметрическими функциями корней и коэффициентами уравнения и др. Формулируется ряд общих теорем, относящихся к уравнению (1) с вещественными коэффициентами.

Гл. 2 посвящена операциям над полиномами. В частности, указываются два способа вычислений полинома $P(x)$ для заданного значения x. Рассматриваются вопросы делимости $P(x)$ на выражения вида $x - r$, $(x - r)^m$, деление одного полинома на другой, умножение полиномов, вычисление производной от полинома для заданного значения x и т. п. Дается определение общего наибольшего делителя двух полиномов и излагаются два способа его нахождения — при помощи последовательных делений и методом Ньютона, который состоит в замене системы двух уравнений $P(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, $Q(x) \equiv \equiv \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i} = 0$ степени n эквивалентной системой уравнений меньшей степени. Последняя система получается путем преобразования исходных уравнений по формулам $P_1 = b_0 P - a_0 Q$ и $Q_1 = \frac{1}{x}(b_n P - a_n Q)$. Повторение указанного преобразования приводит к одному из двух случаев — либо полиномы P_n и Q_n равны постоянным (в случае, когда исходные уравнения не имеют общих корней), либо на некотором шаге h полиномы P_h и Q_h представляют собой тождественные нули (когда имеются общие корни). Тогда P_{h-1} и Q_{h-1} имеют пропорциональные коэффициенты и одинаковые корни, общие для системы $P = 0$, $Q = 0$. После приведения старшего коэффициента в P_{h-1} или Q_{h-1} к единице получается общий наибольший делитель P и Q.

В гл. 3 излагается основная идея метода Греффе решения алгебраических уравнений вида (1) с вещественными коэффициентами. Уравнения для квадратов корней уравнения (1) получается по формуле $A^2 - A'^2 = 0$, где $A(x)$ — сумма членов с четными степенями x, $A'(x)$ — сумма членов с нечетными степенями x. Вычисления рекомендуется проводить по следующей схеме: сначала вычисляется квадрат полинома $A(x)$, затем — с измененным знаком — квадрат полинома $A'(x)$, после чего результаты складываются. Описываются свойства полиномов Греффе для различных видов алгебраических уравнений; указываются различные способы контроля при вычислениях этих полиномов.

В гл. 4 автор занимается вопросом определения аргументов корней уравнения (1) с вещественными коэффициентами, после того как модули корней найдены. Вводится понятие изолированных и групповых корней. В случае изолированного корня с модулем r определение аргумента сводится к определению знака корня в зависимости от величины $E(r)$ или $E(-r)$. В случае групповых корней, имеющих один и тот же модуль r, предлагаются два способа для определения аргумента. Один из них состоит в нахождении общих корней полиномов $E(x)$ и $F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i P^{n-i}$, где $P = r^2$. Во втором способе при помощи замены $x = r(1 + iz)/(1 - iz)$ $(z = \mathrm{tg}\,(\theta/2)$, θ — аргумент x, взятый между 0 и $2\pi)$ уравнение (1) приводится к виду $G(z) \equiv G_1(z) + iG_2(z)$, где $G_1(z)$, $G_2(z)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, представимые в виде $G_1(z) = G_1'(z^2) = G_1'(v)$, $G_2(z) = zG_2'(z^2) = zG_2'(v)$. Знания общего положительного корня полиномов $G_1'(v)$ и $G_2'(v)$ позволяет вычислить $\mathrm{tg}\,\theta$. Даются два способа вычисления полинома $G(z)$. Общий корень полиномов $G_1'(v)$ и $G_2'(v)$ вычисляется путем нахождения общего наибольшего делителя этих полиномов.

В гл. 5 рассматриваются различные способы уточнения корней как вещественных, так и комплексно-сопряженных. В случае вещественных корней рекомендуются известные методы: метод Ньютона, метод парабол, метод секущих, метод равнобочных гипербол, метод итераций. Излагается модификация метода Ньютона в случае его расходимости.

Для уточнения комплексных корней предлагаются два метода. Если представить $E(z)$ и $E'(z)$ соответственно в виде $E(z) = F(x, y) + iG(x, y)$ $E'(z) = = F_1(x, y) + iG_1(x, y)$, где $z = x + iy$, то поправки к начальным значениям x_0, y_0 можно найти, применяя метод Ньютона, по формулам $x - x_0 = -\dfrac{FF_1 + GG_1}{F_1^2 + G_1^2}$, $y - y_0 = \dfrac{FG_1 - GF_1}{F_1^2 + G_1^2}$, где F, G, F_1, G_1 вычислены для $x = x_0$, $y = y_0$. Второй метод состоит в следующем.

Пусть z_0, z_0' — приближенные значения двух комплексно-сопряженных корней. Если положить $z_0 + z_0' = S$, $z_0 z_0' = P$, тогда

$$z - z_0 = -\frac{1}{2z_0 - S}\,\frac{\alpha z_0 + \alpha'}{\beta z_0 + \beta'},$$

$$z' - z_0' = -\frac{1}{2z_0' - S}\,\frac{\alpha z_0' + \alpha'}{\beta z_0' + \beta'},$$

где α, β, α', β' определяются из соотношений $E(z) \equiv (z^2 - Sz + P)\,E_1(z) + \alpha z + \alpha'$, $E_1(z) \equiv (z^2 - Sz + P) \times E_2(z) + \beta z + \beta'$. Здесь исследуется также возможность улучшения корней путем линейной замены переменной x и отмечается, что такая замена не всегда приводит к желательному результату.

В гл. 6 рассматриваются некоторые вопросы общего приближения корней. Корни уравнения (1) удовлетворяют системе n уравнений $f_k(x_j) \equiv S_k(x_j) - (-1)^k \times \frac{a_k}{a_0} = 0$, где S_k — симметрические функции корней, и могут уточняться методом Ньютона по формулам $(x_j)_1 = (x_j)_0 + \delta x_j$, где δx_j — решение системы

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)_0 \delta x_j + f_k(x_j)_0 = 0. \qquad (2)$$

Для облегчения вычислений предлагается разделить корни на $n/2$ групп по два в каждой группе (в случае нечетного n один корень объединяется с нулевым значением x, т. е. вместо уравнения $E(x) = 0$ берется $xE(x) = 0$) и вычислить сумму и произведение корней каждой группы: $S^{(p)} = x_{2p-1} + x_{2p}$, $P^{(p)} = x_{2p-1} x_{2p}$ ($p = 0, 1, \ldots, n/2$). Числа $S^{(p)}$ и $P^{(p)}$ берутся в качестве новых переменных. Тогда вместо системы (2) получается система вида

$$\sum_{p=1}^{n/2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial S^{(p)}}\right)_0 \delta S^{(p)} + \sum_{p=1}^{n/2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial P^{(p)}}\right)_0 \delta P^{(p)} + b_k = 0,$$

где

$$b_k = S_k(S^{(p)},\ P^{(p)})_0 - (-1)^k \frac{a_k}{a_0}.$$

Коэффициенты последней вычисляются значительно проще, чем коэффициенты системы (2). Исследуется также изменение корней в зависимости от изменения коэффициентов системы.

В гл. 7 решается задача о нахождении корней алгебраического уравнения $E(x) = 0$ с последовательными исключениями известных корней. Если известен корень x_i, то деление $E(x)$ на $x - x_i$ понижает степень уравнения на единицу, что уменьшает количество вычислений для определения оставшихся корней. Отмечается, что при исключении корней, наибольших по абсолютной величине и больших единицы, целесообразно сделать в уравнении замену $x = 1/y$, во избежание потери точности.

Гл. 8 посвящена уравнениям с комплексными коэффициентами. Здесь отмечаются свойства, общие для уравнений с вещественными и комплексными коэффициентами. Приводится схема вычислений полиномов Греффе для уравнений с комплексными коэффициентами и предлагаются два способа образования полинома $G(z)$ для нахождения аргументов корней.

В гл. 9 дается подробное описание методики решения алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами, а также описана схема наиболее важных типов операций над полиномами.

В ходе изложения почти в каждой главе приводятся многочисленные примеры. Книга снабжена большим числом таблиц. Так, приведены 7 таблиц с вычислениями полиномов Греффе до 8-го порядка для 7 алгебраических уравнений 6-й степени и таблицы с вычислениями модулей корней этих уравнений. Приводится также таблица полиномов Греффе для уравнения 10-й степени, имеющего близкие по модулю корни. Имеются таблицы коэффициентов разложения по степеням z функции $(1 + iz)^{n-p}(1 - iz)^p$, используемой при вычислении полинома $G(z)$. Таблицы вычислены для $n = 1, 2, \ldots, 20$. Имеется также ряд других таблиц, иллюстрирующих некоторые рассматриваемые в книге вопросы. Г. И. Бирюк

3317 Д. Метод сеток для одной системы уравнений в частных производных. Лебедев В. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

3318 Д. О составлении уравнений в конечных разностях при приближенном решении уравнения Лапласа. Бахвалов Н. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, б. м., 1957

См. также: 2964, 2999, 3044, 3082, 3083, 3084, 3085

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

3319. Анализ данных радиолокационной станции при помощи цифровых методов. Диннин, Рид (An analysis of signal detection and location by digital methods. Dinneen G. P., Reed I. S.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 1, 29—38, 44—45 (англ.)

Рассматривается разделение отраженных сигналов радиолокационной станции от шумов при помощи цифровой вычислительной техники и исследуется проблема обнаружения центра пачки отраженных сигналов. Предполагается, что при помощи специального устройства информация, поступающая с радиолокационной станции, преобразуется в последовательность единиц и нулей. Единица соответствует наличию (за единичный промежуток времени) сигнала, превышающего определенный порог чувствительности; нуль означает отсутствие такого сигнала. В результате цель представляется в виде последовательности единиц, плотностью которой можно задаваться заранее. Для запоминания информации за несколько зондирований (практически в диапазоне ширины луча станции) необходимо иметь запоминающее устройство достаточно большого объема. Предлагается несколько вариантов схем для выделения целей.

Рассматриваются два варианта работы одной из схем. В первом варианте наличие цели определяется поступлением 18 последовательных импульсов на вход двоичного счетчика. Эти импульсы формируются из цифровой информации, поступающей на вход схемы, по следующему правилу: поступление единицы вызывает поступление одного импульса на счетчик. Одно-, двух- и трехкратное поступление нуля после

единицы также вызывает поступление единицы на вход счетчика. Поступление 4-кратного нуля после единицы сбрасывает счетчик в исходное положение.

Второй вариант работы этой же схемы отличается от первого правилами установки счетчика в исходное положение, происходящего: а) после подачи цифровой информации вида 000 или 100, если максимальное число l, зафиксированное на счетчике, не превышает 3; б) после 000, если $4 < l < 7$; в) после 0000, если $7 < l < 63$.

Другая рассмотренная схема позволяет производить выделение целей по следующим правилам: а) поступление единицы вызывает увеличение показания счетчика на 4; б) поступление нуля уменьшает показания счетчика на 1. Сброс счетчика в исходное положение происходит: а) для цели — при $l \geqslant 16$, б) при наличии шума — при $l \leqslant -3$.

Приводится математический анализ приемов обнаружения и выделения центра цели. Для математического представления цели и шумов используются уравнения Бернулли. Использование метода Монте-Карло в применении к цифровым быстродействующим машинам позволяет авторам решить составленные уравнения и представить решения в виде графиков, характеризующих положение центра цели для различных способов выделения цели. Б. Н. Малиновский

3320. Электронная управляющая система обслуживает наземную противовоздушную оборону (Electronic control system aids ground-to-air defense), J. Franklin Inst., 1957, 264, № 2, 165—167 (англ.)

Сообщение о постройке фирмой «Берроус» (Burroughs Corp.) электронной системы «Матабе» (Matabe — Multiweapon Automatic Target and Battery Evaluator) для централизированного управления огнем зенитной артиллерии. Система включает электронную цифровую вычислительную машину, работающую «в реальном времени» со скоростью 200 тыс. сложений 7-значных десятичных чисел в 1 сек.

Г. Н. Поваров

3321. Цифровая система для обработки данных «Бизмак». Хаммертон (The «Bizmac digital data processing system. Hammerton J. C.), Electronic Engng, 1957, 29, № 350, 174—180 (англ.)

Подробное описание принципа действия цифровой системы «Бизмак», которая использовалась для обработки данных органами технического снабжения армии США. Данные об этой системе были рассекречены в феврале 1956 г. Система служит для анализа инвентарных данных, составления различных сводок, расчета количества приобретаемых и перемещаемых товаров. Суточная производительность системы определяется объемом входной информации, содержащейся на 84 000 перфокартах, и выходной информации, составляющей около 9000 печатных страниц. Система содержит специализированные машины, объединенные в следующие функциональные группы: накопитель, входное, сортирующее, вычислительное и выходное устройства. Эти группы объединяются с помощью коммутирующего блока. В накопителе в качестве запоминающих устройств используются магнитные ленты с импульсной записью информации, представленной двоичным кодом. Во входном устройстве внешняя кодированная информация с помощью перфораторов фиксируется на перфокартах и далее переводится на магнитные ленты. Сортирующее устройство служит для выборки данных по различным признакам составления сводок. Вычислительное устройство представляет собой специализированную цифровую машину, которая может использоваться как для вычислений, так и для сортировки данных. Выходное устройство содержит печатающие приборы. Для эксплуатации системы «Бизмак» требуются 10 человек. А. В. Б.

3322. Электронная машина для обработки данных типа 705 в технике и хозяйстве. Кёлер (EDPM Type 705 in Technik und Wirtschaft. Köhler Helmut), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 102—103, 223. Diskuss., 103—104 (нем.; рез. англ.)

Описание возможностей машины ИБМ-705.

Для ввода данных используются перфокарты и магнитные ленты. Одна карточная головка пропускает до 15 000 карт в 1 час. Один блок магнитных лент вводит до 15 000 знаков в 1 сек. Магнитная лента имеет длину до 730 *мм* и эквивалентна 25—50 тыс. перфокарт. Катушка с намотанной лентой имеет диаметр около 27 *см*. Запоминание осуществляется на магнитных барабанах. С каждого барабана можно считывать до 25 000 знаков в 1 сек. Барабан разбит на 300 участков по 200 разрядов в каждом. Центральный арифметический блок содержит оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью в 40 000 разрядов и накапливающие сумматоры. Для повышения точности при работе с плавающей запятой имеется дополнительное запоминающее устройство на 256 ячеек, состоящее из одного накапливающего регистра на 32 ячейки и 14 накапливающих регистров по 16 ячеек. Одновременно может происходить запись и считывание до 58 800 знаков в 1 сек. Команды в машине пятизначные. Числа могут иметь разную длину. Машина производит 4900 сложений 10-значных чисел или 29 400 логических решений в 1 сек.

Печатающее устройство печатает со скоростью 9000 строк в час. Строка печатается одновременно и содержит 120 знаков. Могут печататься 47 символов (%, + и т. д.). Машина может работать также с быстродействующим печатающим устройством (30—60 тыс. строк в час). Данные могут переноситься также на перфокарты; один итоговый перфоратор дает 6000 карт в час. К пульту управления подсоединена пишущая машинка, которая может выписывать специальные данные для операторов. В целом машина содержит до 100 карточных головок, до 100 блоков для магнитных лент, центральный арифметический блок до 30 магнитных барабанов, до 100 итоговых перфораторов, до 100 печатающих устройств и пульт управления. Скорость сортировки данных в машине выше в 5—15 раз по сравнению с быстрейшими картосортировальными машинами. Приведен пример проведения сортировки.

Д. А. Кузьмичев

3323. Синхронная вычислительная машина ВИСК, созданная проектно-исследовательской группой Висконсинского университета. Асмут, Дейвидсон, Миллер, Нобл, Сидмор (The Wisconsin integrally synchronized computer. A university research project. Asmuth J. L., Davidson C. H., Miller J. B., Noble D. S., Scidmore A. K.), Commun. and Electronics, 1956, № 25, 330—338 (англ.)

Описание устройства и подробное изложение принципов, легших в основу проектирования универсальной цифровой вычислительной машины ВИСК Висконсинского университета США. Машина задумана в 1950 г., постройка (силами университета) продолжалась в течение 1952—1955 гг.

Структурные данные машины ВИСК следующие. Кодирование трехадресное. Ячейка памяти состоит из 55 двоичных разрядов, в том числе 40 значащих цифр числа, затем 8 разрядов порядка и по одному разряду для знаков числа и порядка. Если в ячейке записана команда, то 36 разрядов занимают адреса, 4 разряда — код команды и 10 — некоторые дополнительные сведения о порядке выполнения команд. В остальные 5 разрядов информация не записывается, они служат в качестве пробелов между числами (командами), во время которых выполняются определенные

коммутации. Имеется 15 основных операций, в том числе 6 арифметических и 1 операция логического умножения. Запятая фиксированная. Магнитный барабан объединяет в себе оперативное запоминающее устройство, источник синхронизации, вводные и выводные регистры, буферную память и вспомогательные регистры арифметического устройства. Длительность любой операции машины — 4 периода оборота барабана, т. е. 4×1760 *мксек* $= 7{,}04$ *мксек*. Скорость вычислений, однако, несколько повышается за счет одновременного выполнения сразу 4 операций, так что каждая последующая отстает от предыдущей на 1 цикл барабана. Если необходимо использовать результат n-й операции в качестве одного из чисел, участвующих в операции $n+1$, то последняя задерживается при помощи буферного запоминающего устройства на 1 цикл барабана. Основная частота машины — около 100 *кгц*. Ввод и вывод — на перфоленте.

Схема машины ВИСК выполнена в основном на съемных блоках по 12 двойных триодов 6J6 в каждом (1300 ламп из общего числа 1400); на этих триодах собраны и триггеры и вентили. Используемые в схеме германиевые триоды работают, как правило, в качестве ограничителей. Оборудование (за исключением вращающегося преобразователя питания) размещено в 4 стойках общей площадью 3,5 $м^2$.

3324. Экспериментальная электронная вычислительная машина университета в Торонто. Джонстон (The University of Toronto model electronic computer. Johnston R. F.), Proc. Assoc. Comput. Mach., 1955, 154—160 (англ.)

Описание экспериментальной цифровой вычислительной машины «UTEC Model», построенной университетом в Торонто. «UTEC Model» — параллельная двоичная машина с одноадресным кодом (8 команд), работает с 12-разрядными двоичными числами. Запоминающее устройство на электроннолучевых трубках имеет емкость в 512 чисел. Время выполнения команды 512 *мксек*.

3325. Электронные цепи чехословацкой автоматической вычислительной машины САПО. Хлоуба (Elektronické obvody čs. samočinného počitače SAPO. Chlouba Václav), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 125—135 (чешск.; рез. русск., англ.)

Автоматическая вычислительная машина САПО является машиной релейного типа; все операции — арифметические и управления—выполняются релейными цепями. Электронные цепи используются только в центральной памяти (магнитный барабан) для записи и выбора данных. Дается краткое описание этих электронных цепей. Приводится число электронных ламп, их типы и режим работы. Подробно рассмотрена схема электронного клапана. Рассказывается о конструктивном оформлении электронных узлов и устройства. Указываются методы ухода за ними для обеспечения их надежной работы. Библ. 3 назв.

С. П. Кузнецов

3326. Контрольные цепи арифметического устройства чехословацкой автоматической вычислительной машины САПО. Черный (Kontrolní obvody operační jednotky čs. samočinného počitače SAPO. Černý Václav), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 115—124 (чешск.; рез. русск., англ.)

Чехословацкая вычислительная машина САПО (РЖМат, 1955, 3458) имеет 3 одинаковых арифметических устройства, работающих независимо друг от друга. Устройство управления проверяет правильность результатов действия. При расхождении результатов оценивается ошибка и дается команда на дальнейшую работу машины. Каждое арифметическое устройство имеет контрольную схему, которая проверяет правильность входных и выходных данных и исключает возможность ошибки в системе команд, что могло бы привести к неправильному результату во всех 3 арифметических устройствах. Библ. 3 назв.

С. П. Кузнецов

3327. Метод испытания соединений при постройке автоматической вычислительной машины САПО. Облонский (Metoda zkoušení spojů při stavbě samočinného počitače SAPO. Oblonský Jan), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 137—145 (чешск.; рез. русск., англ.)

Описывается конструктивное оформление релейных частей автоматической вычислительной машины САПО. Формулируется проблема контроля исправности соединений этих частей и рассматриваются возможные методы решения этой проблемы. Описывается несложный прибор, разрешивший эту проблему. Описанным способом было проверено более $5 \cdot 10^8$ соединений.

С. П. Кузнецов

3328. Создание ПЭРМ. Пилоти (Die Entwicklung der PERM. Piloty Hans), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 40—45, 225 (нем.; рез. англ.)

Электронная вычислительная машина ПЭРМ (PERM — Programmgesteuerte Elektronische Rechenanlage München) построена в экспериментальных целях в Мюнхенской высшей технической школе. Она предназначена для научных вычислений. В ней около 2400 электронных ламп и 3000 германиевых диодов. ПЭРМ — одноадресная машина параллельного действия с двоичным представлением чисел, способная работать как с плавающей, так и с фиксированной запятой. При вводе и выводе чисел специальные устройства пересчитывают их из десятичной системы в двоичную и обратно. Количество разрядов в двоичном числе равно 50; при этом порядок числа представляется 8 разрядами, знак порядка — 1 разрядом, мантисса — 40 разрядами и знак мантиссы — 1 разрядом. Команда представляется 32 разрядами (16 разрядов адреса+16 разрядов кода операции); разряды с 1-го по 9-й не используются, а последние 8 разрядов служат для контроля. Оперативным запоминающим устройством служит магнитный барабан. Скорость его вращения 250 об/сек., длина 22 *см*, диаметр 10 *см*. На барабане имеется 217 дорожек шириной в 1 *мм*. На каждой дорожке может быть записано 2048 двоичных разрядов. Числа записываются параллельно, по образующим барабана. Четыре группы по 50 дорожек соответствуют 4 числам, остальные дорожки являются синхронизационными и резервными. Каждая дорожка обслуживается своей магнитной головкой. Поверхностная плотность записи равна 6,5 *имп/мм*. Напряжение считывания 8 *мв*. Арифметические устройства (регистры и схемы совпадения) также являются параллельными. Для ввода и вывода информации в машину и из машины использованы телетайпы «Сименс и Гальске», дающие печатный текст и перфоленту. Данные с перфоленты вводятся при помощи фототрансмиттера «Феррранти» (166 пятиразрядных знаков в 1 сек.); при этом запоминающее устройство заполняется за 13 мин. Скорость вывода данных через телетайп равна 7 знакам в 1 сек.

Для устранения ошибок в машине предусмотрена возможность шаговой работы. В этом случае за работой машины можно следить по состоянию неоновых сигнальных ламп. Система адресных регистров позволяет производить пересчет адресов команд. Начало программы может быть обозначено всегда номером 0, который при вводе программы заменяется числом, стоящим в некотором регистре. В подпрограммах возможны скользящие адреса. Будущие усовершенствования ПЭРМ: 1) дополнение магнитного барабана быстродействующим запоминающим устройством на магнитных сердечниках; 2) магнитные ленты или быстродействующий реперфоратор на выходе; 3) перестройка управления

вводом в направлении облегчения автоматического программирования.

И. Р. Шелихова

3329. Электронная вычислительная машина «Гамма» фирмы «Булль» с подсоединенным магнитным барабаном АЕТ (Der BULL-Elektronenrechner «GAMMA» mit angeschlossener Magnettrommel AET), MTW-Mitt., 1957, 4, № 1, 59—60 (нем.)

Сообщается о демонстрации на Парижской выставке конторских машин 1956 г. магнитного барабана АЕТ фирмы «Булль», подсоединенного к машине «Гамма» (РЖМат, 1954, 1839, 1840; 1955, 3453; 1956, 6914) с помощью промежуточного запоминающего устройства на 64 12-разрядных числа, работающего по принципу магнитострикции. Промежуточное запоминающее устройство делится на 4 блока, которые могут работать одновременно. Время обращения к промежуточной памяти составляет 0,17 *мсек*. «Гамма» с подсоединенным барабаном затрачивает на обращение матрицы ранга 90 около 4 час.

Д. А. Кузьмичев

3330. Фирма «Булль» экспортирует также в Америку... (BULL exportiert auch nach Amerika...), MTW-Mitt., 1957, 4, № 5, 341—342 (нем.)

После кратких сведений о французской электронной промышленности рекламируется машина «Гамма» фирмы «Булль» (реф. 3329). Сообщается, что каждый второй день выпускается одна машина «Гамма». Половина машин экспортируется. Число всех цифровых вычислительных машин в США оценивается в 2500, во Франции — в 300 штук, в Англии, Швеции и других странах Западной Европы — в 200 штук.

Г. Н. Поваров

3331. Быстродействующая высококачественная система обработки данных «Идиот-II». Клейн, Раш (Techniques for a high spaed, high quantity, data processing system; Idiot II. Klein Martin L., Rush Richard B.), IRE Convent. Rec., 1956, 4, № 1, 143—152 (англ.)

Описывается универсальная система обработки цифровых данных «Идиот-II», способная накапливать на магнитной ленте до 4,8 млн. 18-значных двоичных чисел. Система может работать вместе с вычислительной машиной ИБМ-704.

Данные с термопар и других датчиков поступают по 20÷100 аналоговым каналам на вход системы, где имеется узел переключения каналов и взятия проб. Пробы (сигналы, пропорциональные мгновенным значениям напряжений в каждом из каналов) преобразуются с помощью узла кодирования в дискретные последовательности импульсов двоичного 18-значного кода. Затем кодовые импульсы вместе со вспомогательными синхроимпульсами записываются через 8-канальное устройство на магнитную ленту. Эти синхроимпульсы облегчаю воспроизведение кодовых импульсов при перезаписи и вводе данных в вычислительные машины. Скорость движения ленты 1540 *мм/сек*. Плотность записи — около 20 имп. на 1 *мм*. Длина пленки с 4,5 млн. 18-значных чисел составляет 732 *м*. Переключение каналов производится при помощи особого быстродействующего переключателя. Время присоединения переключателя к одному из каналов меньше 10 *мксек*. Точность преобразования непрерывных данных в дискретные 0,1%. Схема преобразования данных основана на сравнении входного сигнала со стабильными напряжениями, отличающимися друг от друга как степени двойки. Библ. 6 назв.

В. С. Бородин

3332. Трехфазовые гистерезисные схемы в электронных вычислительных машинах. Свобода, Вышин (Třifázove hysteresní obvody v elektronkovych počítačích. Svoboda Antonín, Vyšin Vlastimil), Sbor. Českosl. akad. věd. Lab. mat. stroju, 1954, № 2 245—259 (чешск.; рез. русск., англ.)

Описывается новая концепция цепей электронных цифровых вычислительных машин, основанная на использовании гистерезисных схем и трехфазных тактовых импульсов. Применение двух новых типов переключающих электронных ламп в схемах, управляемых трехфазными тактовыми импульсами, приводит к упрощению некоторых вычисляющих и управляющих цепей, как показано на нескольких примерах. Ниже некоторой предельной частоты трехфазные гистерезисные схемы работают при любой, сколько угодно низкой частоте тактовых импульсов. Благодаря этому становится возможным, например, изменять частоту информационных импульсов, преобразовывать параллельное представление чисел в последовательное (и наоборот) и т. п. Схемы позволяют производить простой синтез импульсов сложной формы, а также задержку импульсов (схемы не содержат пассивных элементов задержки). Гистерезисный контур хранит в обоих его состояниях входные импульсы (в отличие от нормальных триггерных контуров), в силу чего от него можно ожидать высокой надежности работы. По резюме авторов

3333. Схемы на полупроводниковых триодах для цифровых вычислительных машин. Дьюич (Transistor circuits for digital computers. Deuitch D. E.), Electronics, 1956, 29, № 5, 160—161 (англ.)

Рассматриваются вычислительные схемы.

1) Клапан «И» на 2 входа. Входные импульсы подаются на базу и коллектор триода, включенного по схеме с заземленным эмиттером. 2) Клапан «ИЛИ» на 4 входа. Входные импульсы через сопротивление подаются на эмиттер плоскостного триода типа *npn*, включенного по схеме с заземленной базой. 3) Статический триггер на 2 плоскостных триодах, собранный по обычной схеме. Длительность переднего и заднего фронтов — 2 и 3 *мксек* соответственно. Задержка 1 *мксек*. 4) Триггер на одном точечном триоде, предназначен для применения в кольцевых счетчиках. Длительность фронтов 0,05÷0,15 *мксек*. 5) Один триггерный каскад счетчика на плоскостных триодах. Время переходных процессов в каскаде 5 *мксек*. 6) Симметричный каскад счетчика на точечных триодах. Длительность фронтов 0,2 *мксек*. Частота повторения входных импульсов 500 *кгц*. 7) Усилитель импульсов на точечном триоде. На выходе образуются 6-вольтовые импульсы на нагрузке 220 *ом*. Входное сопротивление схемы 1 *ком*. Длительность фронтов 0,15 *мксек*, задержка 0,1 *мксек*. 8) Формирователь на точечном триоде. Формирование импульсов осуществляется при помощи линии задержки, включенной между коллектором и эмиттером триода. Амплитуда входных импульсов 5 *в*, задержка схемы 0,3 *мксек*. Используются линии задержки на 1,45 *мксек* и на 0,075 *мксек* для получения длительности выходных импульсов 1 и 0,2 *мксек* соответственно.

А. Н. Зимарев

3334. Плоскостной полупроводниковый триод как вычислительный элемент. Ч. II. Вулфендейл, Морган, Стивенсон (The junction transistor as a computing element. Wolfendale E., Morgan L. P., Stephenson W. L.), Electronic Engng, 1957, 29, № 348, 83—87 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1957, 9007.

Рассматриваются вычислительные схемы на плоскостных полупроводниковых триодах:

1) Схема неспимметричного триггера, обладающего большим выходным сопротивлением и большим быстродействием, чем обычная симметричная схема; применение деталей с допустимым разбросом параметров ± 1% гарантирует постоянство чувствительности к амплитуде запускающего импульса от схемы к схеме. Приводится

методика расчета схемы. Введение катушки индуктивности 0,5 *мгн* в цепь коллектора второго триода (типа ОС-45 с предельной частотой 5 *мгц*) позволяет получить время переключения 0,5 *мксек* при амплитуде запускающего импульса 0,75 *в*.

2) Схема блокинг-генератора. Описана зависимость времени нарастания и ширины выходного импульса и времени восстановления схемы от параметров схемы и от действия нагрузки. Приведены параметры конкретной схемы.

3) Логические схемы импульсного и потенциально-импульсного типа с одним и двумя полупроводниковыми триодами. Приведены частотные параметры этих схем.

В. К. Зейденберг

3335. Схемы на полупроводниковых триодах для цифровых систем и моделирующих устройств. Блекер (Transistor circuits for analog and digital systems. Blecher Franklin H.), Bell System Techn., 1956, **35**, № 2, 295—332, 531 (англ.)

3336. Цифровые аналоги. Дроздов Е. А., Приборостроение, 1957, № 5, 4—6

Статья посвящена построению цифровых блоков, обладающих динамическими свойствами некоторых звеньев систем автоматического регулирования. Для этой цели используются двоичный умножитель и реверсивный счетчик. Под двоичным умножителем понимается устройство, пропускающее в единицу времени количество импульсов, пропорциональное числу, записанному в его входном регистре. Под реверсивным счетчиком понимается устройство, записывающее в числовой форме разность количества импульсов, поступающих на его два входа. Показано, как при помощи двух двоичных умножителей и одного реверсивного счетчика составить схему прецизионного инерционного звена и при помощи трех двоичных умножителей и одного реверсивного счетчика составить схему прецизионного звена, осуществляющего деление двух величин.

Г. М. Петров

3337. Интегрирующая схема, дифференцирующая схема и схема ограничения импульсов. Ашен (Intégrateur, différentiateur et circuit clamp. Aschen Robert), TSF et TV, 1955, **31**, № 323, 236—238 (франц.)

3338. Счетчик импульсов в коде Грея. Фишман (A Gray code counter. Fischmann Arieh F.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 2, 120 (англ.)

Описан счетчик импульсов в коде Грея, использующий триггеры и схемы «И». Показана возможность построения реверсивного счетчика импульсов в коде Грея.

А. Н. Чуйкин

3339. Электронные вычислительные машины. Часть 5. Хансен (Elektronregnemaskiner . . . 5. Hansen Egon), Dansk radio ind., 1957, **23**, № 4, 147, 155 (датск.)

Описаны счетчики на лампах с холодным катодом.

3340. Быстродействующее устройство фирмы «Ферранти» для считывания с перфоленты (Ferranti high speed tape readers), Computers and Automat., 1955, **4**, № 2, 45 (англ.)

Описывается фотоэлектрическое устройство для считывания данных с перфоленты. Скорость считывания 200 знаков в 1 сек. Лента может быть остановлена на полной скорости в пределах 1 *мм* и может быть снова запущена до полной скорости за 5 *мсек*. Простая ручка позволяет переключать считывающее устройство с 5-позиционной ленты на 7-позиционную.

Л. А. Плинер

3341. Печатающая контрольная установка для проверки коммутационных досок. Браун, Варшавский (Verifier prints out patchcord locations. Braun Wolfgang G., Warshawsky L. Milton), Control Engng, 1955, **2**, № 12, 83, 85 (англ.)

Описывается контрольное устройство, предназначенное для автоматической проверки сменных коммутационных досок в электромоделирующих установках. При его помощи определяются соединенные между собой контакты и результат печатается на бумаге.

Устройство рассчитано на проверку коммутационной доски с 528 контактами, разбитыми на 24 группы по 22 контакта в каждой группе. Каждый контакт имеет 4-значный десятичный код, где первые две цифры относятся к группе, а последние две цифры — к номеру контакта внутри группы. Основными элементами схемы являются диодная матрица (1056 диодов) и релейная матрица (552 реле). Среднее время, необходимое для проверки данных набора задачи на коммутационной доске, составляет 2 мин.

Г. М. Петров

3342. Новый «мозг» (New «Brain»), Mech. Engng, 1957, **79**, № 4, 359 (англ.)

Сообщение фирмы ИБМ об универсальной электронной вычислительной машине ИБМ-709, предназначенной для коммерческих, научных и технических вычислений. Основная система счисления — двоичная, но специальные программы позволяют производить быстрые вычисления с данными, приготовленными в других системах счисления. Магнитная лента снабжена устройством, которое автоматически задерживает информацию и сигнализирует при обнаружении ошибки. Емкость запоминающего устройства — свыше 327 тыс. десятичных чисел, каждое число может быть размещено и подготовлено для использования в одну 12-миллионную долю секунды. ИБМ-709 может производить арифметические действия со скоростью 42 тыс. сложений (вычитаний) и 5 тыс. умножений в 1 сек.

В. Л. Евтеев

3343. Вычислительные устройства к северу от границы США (Computers north of the border), Automat. Control, 1957, **6**, № 2, 54—55 (англ.)

Сообщается об использовании моделирующего устройства РЕАК (REAC) в одном канадском вычислительном центре. Устройство РЕАК, построенное фирмой «Ривс Инструмент» (Reeves Instrument, США) из стандартных деталей, позволяет решать задачи по аэродинамике, авиации, навигационным системам, технологии химической, деревообрабатывающей и бумажной промышленности, анализу режима рек и т. д. Конструктивно РЕАК состоит из двух тождественных установок, которые могут работать независимо друг от друга. В каждой установке имеется 20 интеграторов, 36 сумматоров, 40 инверторов и 14 сервосистем.

За 8 лет существования вычислительного центра около 500 учреждений и лиц выполняли свои расчеты на его машинах. Более 100 из 300 клиентов являются учеными и инженерами.

В. С. Бородин

3344. Четвертая общегосударственная конференция по машинам для обработки информации. Свобода (Čtvrtá celostátní konference o strojích na zpracování informací. Svoboda František), Věst. ČSAV, 1956, **65**, № 1—2, 48—52 (чешск.)

Сообщение о IV общегосударственной конференции по машинам для обработки информации (30.XI—2.XII.1955), организованной Институтом математических машин Чехословацкой академии наук. В ее работе участвовали также советские и польские ученые. Были сделаны доклады о чехословацких и польских моделирующих устройствах, о чехословацкой цифровой вычислительной машине САПО (SAPO), о советских машинах БЭСМ и УРАЛ, о польской машине ЭМАЛ (EMAL), о чехословацких машинах для синтеза рядов Фурье, о синтезе и анализе релейных схем, в том числе с помощью полуавтоматической специальной машины, о новых вычислительных методах, о внедрении вычислительной техники в промышленность и т. д. Подроб-

но излагается доклад Свободы (A. Svoboda) о перспективном плане Института математических машин, предусматривающем 4 направления: создание автоматических вычислительных машин, разработку быстрых вычислительных методов, механизация административной работы и автоматическое программное управление производственными процессами. Г. Н. Поваров

3345. VI Международная выставка конторского оборудования. Кутюр (Le VI[ème] Salon international de l'équipement de bureau. Couture A.), Usine nouvelle, 1955, **11**, № 48, 25, 27, 29 (франц.)

3346. Совещание по вопросам влияния вычислительных машин на науку и общество (Symposium on the impact of computers on science and society), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, **EC-5**, № 3, 142—158 (англ.)

Приводится содержание нескольких докладов, прочитанных на совещании, проведенном в 1956 г. Институтом радиоинженеров США. В докладах рассматриваются проблемы, возникшие в США в связи с развитием вычислительной техники; в основном это проблемы подготовки кадров, а также проблемы применения вычислительных машин в самых различных областях науки и техники. Б. И. Шитиков

3347. Метод Кутта 3-го порядка для решения дифференциальных уравнений, требующий минимума памяти. Конт, Ривс (A Kutta third-order-procedure for. solving differential equations requiring minimum storage. Conte S. D., Reeves R. F.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 1, 22—25 (англ.)

При численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка N на цифровых вычислительных машинах методом Рунге—Кутта 3-го порядка требуется $3N+A$ ячеек запоминающего устройства. Этот метод модифицирован авторами с целью использования $2N+A$ ячеек.

Коэффициенты в формулах Рунге—Кутта

$$\begin{cases} k_{i0} = hf_i(Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_N), \\ k_{i1} = hf_i(Y_0 + mk_{00},\ Y_1 + mk_{10},\ \ldots \\ \qquad \ldots,\ Y_N + mk_{N_0}), \\ k_{i2} = hf_i(Y_0 + (n-2)\,k_{00} + rk_{01},\ \ldots \\ \qquad \ldots,\ Y_N + (n-2)\,k_{N_0} + rk_{N_1}), \\ y_i(x_0+h) \approx Y_i + ak_{i0} + bk_{i1} + ck_{i2} \end{cases}$$

для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dy_0} = f_i(y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_N), \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N \\ y_0 = x, \quad f = 1 \text{ и при } x = x_0\ y_i = Y_i \end{cases}$$

определяются по условиям $a = m = n - r$.

Такой выбор коэффициентов позволяет при вычислении использовать $2N+A$ ячеек запоминающего устройства:

$$y_{i0} = Y_i \to B_i,$$

$$k_{i0} = hf_i(y_{00},\ y_{10},\ \ldots,\ y_{N_0}) \to A_i,$$

$$y_{i1} = y_{i0} + ak_{i0} \to A_i,$$

$$k_{i1} = hf_1(y_{01},\ y_{11},\ \ldots,\ y_{N_1}) \to B_i,$$

$$y_{i2} = y_{i1} + rk_{i1} \to A_i,$$

$$y(x_0+h) = y_{i3} = y_{i2} + (b-r)\,k_{i1} + ck_{i2} \to B_i.$$

Здесь A_i и B_i — две группы ячеек по $N+1$ ячеек каждая. В статье также содержатся некоторые предложения относительно изменения вычислительной схемы с целью компенсирования ошибок округления, возникающих при вычислениях на шаге.

Г. С. Росляков

3348. Решение задач устойчивости на цифровых вычислительных машинах. Джонсон, Уорд (Digital computer solution of stability problems. Jonhson D. L., Ward J. B.), Electr. Engng, 1956, **75**, № 11, 1027 (англ.)

Рекомендуется метод Рунге—Кутта для решения задач устойчивости на цифровых вычислительных машинах, как дающий лучшую точность по сравнению с другими методами при одинаковой затрате времени. Приводится график, на котором даны для сравнения решения, полученные разными методами.

О. С. Кулагина

3349. Применение цифровых методов в системах регулирования. Клейн, Вильямс, Морган (Digital process control. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1956, **29**, № 10, 1979—1984 (англ.)

Описываются элементы вычислительной техники применительно к системам автоматического регулирования с большим числом параметров регулирования. Рассматриваются принципиальные схемы: преобразователя параметров регулирования из непрерывной формы в цифровую; распределителя, позволяющего использовать один преобразователь на все каналы регулирования; диодных матриц различных типов, служащих для фиксации величин параметров регулирования, сравнения значений параметров и выполнения ряда логических операций; запоминающего устройства с элементами логики, позволяющего запоминать состояния отдельных параметров и соблюдать определенный логический порядок изменения этих параметров.

Б. И. Шитиков

3350. Теоретико-числовые задачи на машине СВАК. Лемер (Number theory on the SWAC. Lehmer E.), Proc. Sympos. Appl. Math. 6. New York—Toronto—London, 1956, 103—108 (англ.)

Обзор теоретико-числовых задач, решавшихся на машине СВАК (SWAC) за два года. Кратко описаны возможности машины СВАК. Подчеркивается важность точного и разумного кодирования. Задачи делятся на 3 типа: 1) конкретные задачи, для которых СВАК дал окончательный ответ (например, разложение чисел на множители или установление их простоты, решение диофантова уравнения $x^3 + D = y^2$ для $-100 < D < 100$ и др.); 2) проверка предположений и гипотез в более широких пределах, чем это позволяет ручной счет (например, гипотезы Пойя, Римана, теорема Ферма и т. п.); 3) экспериментальные задачи по подготовке материала для исследований (например, вычисление функции Рамануджана, вычисление сумм символов Лежандра и т. п.). Библ. 10 назв. О. С. Кулагина

3351. Вычисление величин π, e на электронной счетной машине. Ли Чжи-чан, Шусюэ тунсюнь, 1956, № 65, 1—8 (кит.)

3352. Декодируемые подпрограммы. Беннетт, Принц, Вудс (Interpretative sub-routines. Bennett J. M., Prinz D. G., Woods M. L.), Proc. Assoc. Comput. Mach., 1953, 81—87 (англ.)

3353. Опыты игры в шахматы. Кистер, Стейн, Юлам, Уолден, Уэлс (Experiments in chess. Kister J., Stein P., Ulam S., Walden W., Wells M.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 2, 174—177 (англ.)

Описаны опыты по программированию игры в шахматы на вычислительной машине МАНИАК-I в Лос-Аламосе (США). Игра несколько упрощена (доска

6×6, без слонов, 6 пешек с каждой стороны, без рокировки и начального двойного хода пешек). Выбирая ход, машина в среднем за 12 мин. перебирает все варианты игры на 2 полных хода вперед. Число вариантов доходит в миттельшпиле до 400 тыс. Ходы оцениваются по материальному выигрышу (сумма весов своих фигур минус сумма весов чужих фигур) и по подвижности (числу возможных ходов) фигур в новых позициях. Этот критерий хорошо показал себя на практике. Сыграны 3 партии: машина сама с собой, машина — сильный шахматист, машина — начинающий шахматист. Приводятся комментарии к партиям. Игра машины сравнивается с игрой лица, имеющего средние способности к шахматам и опыт в 20 полных партий. Для совершенствования игры машина должна прослеживать более длинные серии ходов при обмене фигур, а оценки ходов, более высокие на территории противника, чем на своей территории, сделают машину «агрессивнее». Машина типа ИБМ-704 смогла бы выполнить аналогичную программу для обычных шахмат на доске 8×8. Г. Н. Поваров

3354. О машинном переводе с английского языка на русский. Пурто В. А., Молошная Т. Н., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР 1956, 196

Тезисы доклада на III Всесоюзном математическом съезде. Предлагается метод перевода, при котором выделяются определенные классы английских и русских слов, типовые структуры английского предложения, типовые конфигурации из выделенных классов слов и соответствующие им конфигурации в русском языке. При переводе конфигурации, содержащиеся в английской фразе, должны заменяться соответствующими им русскими конфигурациями и затем русские слова должны подставляться в полученную структуру. О. С. Кулагина

3355. Практическая реализация машинного перевода. Бут (The practical realisation of machine translation. Booth Andrew D.), Methodos, 1956, 8, № 29—30, 23—33 (англ.)

Дается краткий обзор развития машинного перевода. Указывается, что первой попыткой механизации перевода было создание автоматического словаря Риченсом и Бутом (1947—1950 гг.). Этот словарь был рассчитан на одну отрасль литературы и состоял из основ слов. С 1950 г. начинает развиваться машинный перевод в Америке. В 1954 г. был сделан первый опытный перевод (РЖМат, 1954, 5293). Автор возглавляет группу инженеров и лингвистов, занимающихся машинным переводом с французского языка на английский в Англии. Кратко описывается общий характер составленных правил перевода. Сообщается, что автора занимает проблема одновременного перевода со многих языков на многие с помощью языка-посредника. По мнению автора, для более успешного развития машинного перевода необходимо создание специальной быстродействующей переводческой машины. Советские работы не упоминаются. Т. Н. Молошная

3356. Три моделирующие вычислительные машины (3 calculateurs analogiques), Electronique industr., 1956, № **11**, 176—178 (франц.)

Приводится краткое описание основных параметров и характеристик трех вычислительных моделирующих машин. Из них машина «Джинн» (Djinn) является машиной средних размеров и предназначена для решения широкого круга задач, относящихся к аэродинамике, гидродинамике, баллистике, расчету вибраций и сопротивлению материалов. Она состоит из 30 усилителей, 64 точных линейных потенциометров, расположенных на трех отдельных панелях, панели контроля и управления, панели измерений, на которой установлены нуль-гальванометр и два точных вольтметра, коммутационной панели, на которую выведены все элементы и на которой собирается расчетная схема. Машина проста в обращении и может обслуживаться средним по квалификации персоналом. Все ее элементы взаимозаменяемы.

Моделирующая машина ОМЕ-L12 — серийная машина для применения в различных областях техники, главным образом для решения различных математических задач. Ее габариты: высота 165 *см*, ширина 55 *см*, глубина 45 *см*. На вертикальной панели размещены 12 усилителей, 18 потенциометров, предназначенных для ввода коэффициентов уравнений, 24 суммирующих и интегрирующих элемента и 12 потенциометров для ввода начальных условий. На наклонной панели расположены ключи управления, система контроля и измерительные приборы. Вычислительная машина питается от сети переменного тока 127 или 220 *в*, 50 *гц*; потребляемая мощность около 1 *квт*. Возможно подключение нелинейных элементов.

Электронная вычислительная машина ОМЕ-P2 высокой точности состоит из 24 усилителей, разбитых на 6 групп, 60 потенциометров для ввода коэффициентов уравнений, панели управления и измерений. Питание от сети 50 *гц*, 220 *в*; потребляемая мощность около 3 *квт*. Отдельные элементы калиброваны с точностью до 0,1%. Машина ОМЕ-P2 предназначена для решения линейных алгебраических уравнений 8-го порядка и дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. А. А. Крюков

3357. Метод Пикара и вычисление с помощью моделирующей установки. Томович (Picard's method and analog computation. Tomovich Rajko), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 34 (англ.)

Устанавливается соотношение между методом Пикара для решения дифференциальных уравнений (метод последовательных приближений) и техникой вычисления на моделирующей установке. Доказывается существование такого итерационного процесса, при котором ошибка становится непрерывной функцией времени, сходящейся к нулю. При реализации этого процесса на моделирующих устройствах требуется, чтобы интегрирование выполнялось в натуральном масштабе времени и чтобы интегралы получались посредством передаточных функций вычислительных схем. Утверждается, что все задачи, решаемые методом Пикара, в принципе можно решить на моделирующем устройстве. П. В. Тихонов

3358. Электронная модель реактора. Камерон, Остин (An electronic reactor simulator. Cameron Ross, Austin D. A.), Nucl. Power, 1957, 2, № 12, 146—151 (англ.; рез. франц. нем., исп., русск.)

Электронное моделирование реактора позволяет найти оптимальные параметры системы и исследовать аварийные режимы работы. В описываемом устройстве имеется до 100 операционных усилителей для сложения и интегрирования. Множительные устройства электромеханические, их 20. Использование автоматической компенсации дрейфа нуля сводит его до 100 *мкв* в день. Динамический диапазон усилителей от ±10 *мв* до ±100 *в*. При насыщении какого-либо усилителя автоматически изолируются все интегрирующие конденсаторы, их напряжения измеряются и производится изменение масштаба. Такое устройство позволяет исследовать пуск реактора, когда мощность меняется от нескольких *вт* до сотен *мвт*. Для задержки функций используются накопительные конденсаторы. Узлы, решающие основные уравнения кинетики реактора, соединены постоянно.

Остальные соединения производятся на коммутационных панелях. Одновременно можно решать две независимые задачи. Описывается методика работы на модели. Г. Ф. Типалин

3359. Об оценке электронных интегрирующих устройств. Коган Б. Я., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 9, 841—846 (рез. англ.)

Дается сравнительная оценка электронных интеграторов: 1) с пассивным контуром на входе усилителя, 2) с параметрической компенсацией погрешности, 3) с отрицательной обратной связью. Сравнение производится по 2 параметрам: наименьшей допустимой частоте интегрирования входного синусоидального сигнала и наибольшему допустимому времени интегрирования ступенчатого сигнала. Автор приводит также оценки для интегратора 3-го типа, связанные с утечкой конденсатора и с дрейфом нуля усилителя постоянного тока (без вывода). На основании проведенного анализа и полученных числовых результатов делается вывод, что применение интеграторов 1-го типа целесообразно, начиная с частоты входного сигнала 10 *гц*. Для интегрирования более низких частот следует применять интегратор 3-го типа. Наибольшее время интегрирования (до 1000 сек.) дают интеграторы 3-го типа. Оно лимитировано конечностью динамического диапазона и утечкой интегрирующего конденсатора. Дальнейшее увеличение времени интегрирования требует применения шагового интегратора, разработанного И. В. Корольковым и И. А. Бубновым. Ю. И. Ивличев

3360. Новые методы работы ускоряют машинные расчеты электрических сетей. Энс, Раупак (New operating methods speed up network computer. Enns Waldo E., Raupach Richard C.), Proc. Amer. Power Conf., 1956, 18, Chicago, Ill (1956), 537—544 (англ.)

В 1955 г. для нахождения потокораспределения в разветвленных электрических сетях сооружено специальное расчетное устройство. Для воспроизведения расчетной схемы используются переменные активные сопротивления. Питание — от одного регулируемого источника постоянного или переменного тока. Для производства расчетов должны быть известны амплитуды и фазы векторов напряжения в точках сети, к которым подключены электростанции и нагрузки. Устройство выполняется в виде пульта, на лицевую панель которого выведены рукоятки потенциометров, автотрансформаторов и измерительные приборы. Для работы необходим один оператор.

Мощность в произвольной точке схемы определяется из выражения

$$p + jQ = E_a I_a + E_p I_p + j\,(-E_a I_p + E_p I_a),$$

где E_a, E_p и I_a, I_p — соответственно, активная и реактивная слагающие напряжения и тока в этой точке. Согласно предлагаемой методике, на расчетном устройстве собираются две независимые схемы, позволяющие определять в отдельности активные и реактивные составляющие токов в ветвях схемы при помощи ваттметров, каждый из которых имеет по две пары катушек. Описываемое расчетное устройство может быть использовано также для расчетов токов короткого замыкания.

Применение расчетного устройства в несколько раз сокращает время, необходимое для исследования сетей. А. А. Крюков

3361. Моделирующая установка для исследования биологических систем. Янг (An analog computer for studying biological systems. Yang C. C.), Ann. N. Y. Acad. Sci., 1955, 60, № 6, 877—883 (англ.)

Описывается несложная электромоделирующая установка, предназначенная для исследования ряда биологических систем. В ее состав входят 8 интеграторов, 14 сумматоров, 7 блоков перемножения и 20 делителей напряжения для задания постоянных коэффициентов и начальных условий. В основу вычислительных схем положен операционный усилитель с широкой полосой рабочих частот, имеющий коэффициент усиления без обратных связей 600 на частотах до 15 *кгц*. Чтобы избавиться от корректировки «дрейфа нуля» в усилительных звеньях, производится преобразование сигнала постоянного тока в сигнал переменного тока на выходах интеграторов и обратное преобразование сигнала переменного тока в сигнал постоянного тока на входе интегратора. Частота преобразованного сигнала 5 *кгц*. Схемы блоков перемножения построены на базе безынерционных квадраторов; произведение получается как разность квадрата суммы и квадрата разности сомножителей.

С помощью описанной установки было проведено исследование процессов в ферментной системе, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Результаты хорошо согласуются с ранее полученными теоретическими и экспериментальными данными. Г. М. Петров

3362. Микросеть. Дежев (Le microréseau. Degesves A.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 477—478 (франц.; рез. англ.)

Трудности при изучении переходных режимов сложной электрической системы, состоящей из ряда станций и разветвленных сетей, успешно преодолеваются применением электродинамических моделей с вращающимися миниатюрными машинами и трехфазными линиями связи. Вращающиеся электрические машины модели, представляющие собой уменьшенную в n раз копию синхронных машин исследуемой системы, дают возможность просто учитывать такие особенности синхронных генераторов, как несимметричность в продольной и поперечной осях ротора, влияние постоянной инерции и ряд других факторов, учет которых на статических моделях (расчетных столах переменного тока) связан с определенными трудностями и влечет за собой большой расход времени. А. А. Крюков

3363. Расчетный стол Люблянского института экономии электричества. Вайда (Table á calcul de l'Institut pour l'économie électrique à Ljubljana. Vajda Branko), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 474—476 (франц.; рез. англ.)

В 1951 г. был запроектирован, а в 1955 г. пущен в эксплуатацию расчетный стол переменного тока Института экономии электричества в г. Любляна (Югославия). Стол работает на частоте 50 *гц* и имеет 20 генераторных единиц, 40 нагрузочных элементов, 15 автотрансформаторных элементов с переменным коэффициентом трансформации и 165 элементов для замещения линий. Питание производится от специального 3-фазного синхронного генератора, вращаемого с постоянной скоростью двигателем постоянного тока. Источником постоянного тока служит отдельный агрегат, состоящий из асинхронного двигателя и генератора постоянного тока. Напряжение, питающее генераторные единицы, стабилизировано по амплитуде и частоте электронными регуляторами. Для устранения высших гармоник в кривой напряжения синхронный генератор соединен в звезду и в его цепь включены фильтры 5-й, 7-й и 11-й гармоник. Генераторные единицы и пассивные элементы расчетного стола размещены в отдельных блоках. Напряжение на выходе генераторных единиц плавно изменяется в пределах от 0 до 150 *в*, фаза выходного напряжения меняется от 0 до 360°.

Для измерения искомых величин токов, напряжений и мощностей используется центральный измерительный пульт, где установлен амперметр, вольтметр, ваттметры активной и реактивной мощности. Измерительные приборы приключаются к исследуемой схеме при помощи релейной автоматики через электронные усилители, что устраняет влияние собственного потребления измерительных приборов на режим схемы. Измерительные приборы снабжены устройством, автоматически меняющим цену деления, что позволяет замерять токи в пределах от 10 до 1000 *ма* и напряжения от 3 до 300 *в*. Соединение элементов стола в требуемую схему осуществляется на коммутационном поле. Расчетный стол со всеми вспомогательными устройствами, исключая источник питания, занимает помещение 15×6 *м*. А. А. Крюков

3364. Электронное моделирующее устройство для перемножения с использованием несущих. Вейбель (An electronic analog multiplier using carriers. Weibel Erich S.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 1, 30—34, 61 (англ.)

Описываемое устройство содержит 4 кольцевых модулятора. Два используются для преобразования входных сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в высокочастотные колебания $S_1(t)\cos 2\omega_0 t$ и $S_2(t)\cos 3\omega_0 t$. Эти колебания поступают на 3-й кольцевой модулятор, из выходного сигнала которого выделяется напряжение, пропорциональное $S_1(t)\,S_2(t)\cos 5\omega_0 t$, поступающее затем на кольцевой демодулятор. Демодуляция сохраняет знак произведения. Такая схема полностью устраняет искажения, обусловленные нелинейностями до 3-го порядка включительно. В ней нет усилителей постоянного тока, однако возможно перемножение постоянных напряжений. Полоса частот при $F_0 = 45$ *кгц* доходит до 7 *кгц* на входе. Г. Ф. Типалин

3365. Вычислительные моделирующие машины. Нусбаумер (Les machines à calculer analogiques. Nussbaumer H.), Electronique industr., 1956, № 11, 171—175 (франц.)

В популярной форме описываются электронные моделирующие машины. Основные элементы моделирующих машин разделяются на 5 типов: умножители на постоянный коэффициент, сумматоры двух и более переменных, перемножители переменных или функций, интеграторы. Приведены принципиальные схемы основных элементов моделирующих машин. А. А. Крюков

3366. Практический отчет об использовании электронного счетнорешающего устройства технической группой в Канне. Эскюрсан (Exposé pratique relatif a l'utilissation d'un opérateur mathématique électronique au groupe technique de Cannes. Escursan), Techn. et sci. aéronaut., 1954, № 6, 414—425 (франц.)

Описано электронное счетно-решающее устройство OME 111 и его применение в авиационных исследованиях.

3367. Вычислительные машины и их применение в бумажной промышленности. Берджер (Computers and their application in the paper industry. Berger R. C.), Tappi, 1956, **39**, № 6, 371—376. Discuss., 376—378 (англ.)

Приводится краткая справка о принципах работы вычислительных устройств: расчетных столов постоянного и переменного тока, механического интегратора, цифровой вычислительной машины, электронного интегратора. Рассматривается применение моделирующего устройства для изучения поведения регулятора подачи бумаги, проходящей через ряд типографских машин. Отмечается высокая эффективность применения моделирующих устройств при проектировании различных устройств промышленной автоматики.

Б. И. Шитиков

3368. Электронная моделирующая установка предсказывает водный режим реки. Исихара, Исихара (Jshihara Tojiro, Jshihara Yasuo), Добоку гаккайси, J. Japan Soc. Civil Engrs, 1956, **41**, № 8, 21—24 (японск.; рез. англ.)

Сообщается об электронной моделирующей установке для изучения и предсказания водного режима (паводка) реки. Изложена методика проектирования, конструирования и регулирования установки. Приводятся примеры трассы паводка, рассчитанные на установке. П. В. Тихонов

3369. Электронное моделирующее устройство для анализа паводка. Исихара, Хаями, Хаяси (On the electronic analog computer for flood routing. Ishihara Tojiro, Hayami Shoitiro, Hayashi Shigenori), Proc. Japan. Acad., 1954, **30**, № 9, 891—895 (англ.)

Приводится схема моделирующего устройства для определения закона изменения уровня воды при паводке. Решается уравнение, приближенно описывающее характер изменения уровня воды. Сравниваются результаты расчета и наблюдения. Г. Ф. Типалин

3370. Об одном методе моделирования безнапорного неустановившегося движения грунтовых вод при кольматации русла канала. Кленов В. Б., УзССР, Фанлар акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1957, № 6, 5—9 (рез. узб.)

3371. Электросхемная модель для динамики изотопов. Шёнфелд, Берман (An electrical network analogy for isotope kinetics. Schoenfeld Robert L., Berman Mones), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, **5**, № 4, 84—89 (англ.)

3372. «Респектра» — новый расчетный стол для количественной спектрографии. Андерсон (The respectra: a new calculating board for quantitative emission spectrography. Anderson James W.), Appl. Spectroscopy, 1956, **10**, № 4, 195—197 (англ.)

Указаны способы определения чувствительности фотоматериалов по результатам испытаний образцов. Приведена зависимость чувствительности от времени засвечивания, используемая в вычислительном устройстве. Кратко описано вычислительное устройство, выполненное в виде вертикально расположенной линейки с ящиком и специальными шкалами и горизонтально расположенного барабана с номограммами. Библ. 9 назв. И. М. Витенберг

3373. Программирование задач по химической кинетики для электронных моделирующих устройств. Уилер, Кинни (Programming chemical kinetics problems for electronic analogue computers. Wheeler R. C. H., Kinney G. F.), IRE Trans. Industr. Electronics, 1956, **3**, March, 70—79 (англ.)

3374. Принципы действия электронных моделирующих устройств. Совинский (Zasady działania elektronicznych maszyn analogowych. Sowiński Andrzej), Pomiary, automat., kontrola, 1957, **3**, № 2, 74—77; № 3, 116—119 (польск.)

3375. Как работает моделирующее устройство? Надсен (How does the analog computer do it? Knudsen D. F.), Design Engng, 1957, **3**, № 2, 42—43, 79 (англ.)

В популярной форме описываются принципы построения электронных моделей. Г. Ф. Типалин

3376. Моделирующий гармонический анализатор. Потье (Un analyseur harmonique analogique. Pottier J.), Ande électr., 1955, **35**, № 343, 847—866 (франц.; рез. англ.)

3377. Применения электронной моделирующей вычислительной машины. Пласидо-Спкала (Aplicaciones de una calculadora análogica electro-

nica. Plácido Cicala), Publs Fac. cienc. fisicomat. Univ. nac. Eva Perón, 1954, № 202, 11 pp. (исп.)

3378. Математические аналогии некоторых физических явлений и их использование при решении проблем нефтяных пластов. Субик (Analogie matematyczne niektórych zjawisk fizycznych oraz ich wykorzystanie do rozwiązywania problemów złożowych. Subik Jan), Nafta (Polska), 1957, 13, № 5, 131—134 (польск.)

Популярный очерк о моделирующих устройствах и их применении в нефтяной промышленности. Рассказывается об электролитических моделях и об электроинтеграторах на сетках сопротивлений. Сообщается, что в Нефтяном институте в Польше предполагается построить электроинтегратор.

3379. Поквартальный расчет с помощью машины ИБМ-402 зарплаты, облагаемой и необлагаемой налогом. Эдуардс, Мак-Лейн (Calculation of federal and state taxable and non-taxable wages for quarterly earnings report — 402 IBM non-net balance accounting machine. Edwards H. J., McLean J. C.), Punched Card Annual, 1956—1957, 5, 166—167 (англ.)

Описывается один из способов составления на вычислительной машине ИБМ-402 квартальной ведомости заработной платы, облагаемой и необлагаемой налогами. Исходным материалом для составления ведомости служат текущие платежные карточки и итоговые карточки предыдущего квартала. Приводимая коммутация дает возможность начислять зарплату, облагаемую и необлагаемую налогами с начала года, а также и за текущий квартал. А. К. Голубева

3380. Фирма «Консолидейтид Эдисон» применяет электронную вычислительную машину для расчетов по зарплате (Con Edison uses electronic computer for payroll accounting), Gas (USA), 1956, 32, № 12, 60—62 (англ.)

Сообщается, что нью-йоркское отделение компании «Консолидейтид Эдисон» (Consolidated Edison) перевело обработку платежных ведомостей с перфорационных машин на электронную вычислительную машину ИБМ-705. Теперь перфокарты используются только для передачи текущих документов и изменений информации или в добавление к магнитным лентам, с которых вводится и выводится информация из вычислительной машины.

Результаты, полученные машиной, перепечатываются с магнитных лент быстродействующим печатающим устройством, которое в соответствии с командами на ленте выдает платежные ведомости со скоростью более 100 штук в 1 мин. Принятый процесс обработки платежных ведомостей на электронной машине позволяет своевременно начислять еженедельную зарплату 23 тыс. служащим, полумесячную и месячную зарплату 3 тыс. служащим и пенсию 6 тыс. пенсионерам. Применение электронной машины для обработки данных в области материального учета позволит вести учет более чем 100 тыс. артикулов на складах и производить опись инвентаря до 9 млн. артикулов. В статье отмечается, что использование электронного оборудования дает значительный эффект по сравнению со счетно-перфорационными машинами.

Приводятся технические характеристики машины ИБМ-705. А. К. Голубева

3381. Использование перфокарт с электрографическими пометками для анализа ответов экзаменующихся. Аппел, Купер (A refinement in the use of mark-sense cards for test research. Appel Valentine, Cooper George), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, 50, № 270, 557—560 (англ.)

Рассматривается способ анализа ответов экзаменующихся с помощью перфокарточной электронно-статистической машины (ESM) ИБМ-101. Отвечая на предложенные вопросы, студент делает пометки на перфокарте. При этом он может дать либо утвердительный, либо отрицательный ответ. На каждой карте имеется 144 позиции (24 колонки, 12 рядов). Специальный репродуктор считывает пометки и перфорирует в соответствии с пометками ту же перфокарту. Каждый студент заполняет 3 карты, отвечая таким образом на 432 поставленных вопроса. Данные с трех карт затем переносятся на одну 72 колонную перфокарту и поступают для обработки в машину ИБМ-101.

Б. М. Раков

3382. Электрический прибор для автоматического контроля решений, используемый в начальной школе. Дельгадо-Серрано (Un dispositivo electrico de control automatico de soluciones, en enseñanza elemental. Delgado Serrano Julian), Gac. mat., 1956, 9, № 4—5, 130—135 (исп.)

Описывается устройство, предназначенное для оживления преподования математики в начальной школе, основанное на замыкании цепи сигнализации при правильном отыскании учеником клемм решения. Устройство имеет сменную панель набора задачи и поэтому может применяться для решения многих задач. Приводятся схемы монтажа панелей для изучения таблицы умножения и основных геометрических понятий, связанных с изучением окружности. О. В. Бачин

3383. Роль электронных вычислительных машин в управлении воздушным движением. Элбурн (The role of electronic computers in air traffic control. Elbourn R. D.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 8, 114—115 (англ.)

3384. Как вычислительные машины облегчают стратиграфические корреляции. Олифант, Фуллертон (How computers facilitate stratigraphic correlations. Oliphant Charles W., Fullerton Paul), World Oil, 1955, 140, № 5, 132, 134, 136, 138 (англ.)

3385. Расчет потерь энергии в эстуарии во время прилива (Жиронда). Теория и методика расчета с помощью математической машины. Фор (Calcul des pertes d'énergie dans un estuaire à marée (Gironde). Principe et exécution du calcul à l'aide d'une machine mathématique. Faure M.), Houille blanche, 1953, 8, № 13, 692—693, 747—759 (франц.; рез. англ.)

3386. Цифровые методы управления машинами-орудиями. Херхенрёдер (Numerical control of machine tools. Herchrenroeder L. W.), Automation, 1956, 3, № 10, 84—87 (англ.)

Рассказывается о применении цифровых методов для создания программных устройств, управляющих работой различных станков и механизмов. В частности, рассматриваются методы цифрового кодирования некоторых механических параметров: скорости перемещения, расстояний и т. д. Б. И. Шитиков

3387. Большое вычислительное устройство. Хорл (The large computer installation. Hoerl Arthur E.), Chem. Engng Progr., 1956, 52, № 11, 464—466 (англ.)

Рассматриваются вопросы применения больших вычислительных машин для решения технических проблем, в частности в химической промышленности. Указывается на необходимость подготовки технического персонала и создания специальной группы математиков для того, чтобы полностью загрузить машину задачами. Приводятся примеры решения различных технических проблем химического концерна «Дюпон» с помощью вычислительной машины УНИВАК.

Б. И. Шитиков

3388. Составление счетов при помощи электронного множительного устройства (Accountancy by electronic multoplier), Railway Gaz., 1957, **106**, № 7, 196 (англ.)

Сообщается об успешном использовании электронных вычислительных устройств на железнодорожном транспорте. В 1956 г. в угольной ревизионной конторе для восточных и северо-восточных районов Англии было установлено электронное умножающее устройство «Голлерит», позволившее реорганизовать процесс составления счетов на перевозки топлива и сделать его почти полностью автоматическим (за год перевозится около 75 млн. *т* топлива между 35 тыс. пар пунктов). Устройство производит операции умножения веса в тоннах на скорость, отнесенную к 1 *т* груза, дает ответ в шиллингах и пенсах, проверяет результат и пробивает его в соответствующей колонке перфокарты. Скорость работы 6000 вычислений в час. В конце каждого месяца перфокарты механически сортируются и табулируются для выписки счетов. В. С. Бородин

3389. Стандартизированные способы обработки статистических данных. Олман (Standardized procedures for processing statistical data. Alman John E.), Punched Card Annual, 1956—1957, 5, 163—166 (англ.)

Описываются постоянные коммутационные устройства ввода данных для некоторых счетно-перфорационных машин. С помощью этих устройств можно легко коммутировать ввод данных при выполнении подавляющего большинства статистических работ, существенно сокращая время на ввод как информации, так и команд с перфокарт, которое во многих случаях (не только при однократной, но и многократной обработке статистических данных) значительно больше машинного времени. Приводятся два примера использования этих устройств. Первый связан с подсчетом карточек, второй — с получением сумм, сумм квадратов и сумм произведений некоторой последовательности чисел. В последнем примере контроль осуществляется благодаря получению одинаковых сумм произведений. Утверждается, что 90% всех статистических работ можно свести к одному из этих примеров, откуда выводится целесообразность применения таких устройств ввода. А. К. Голубева

3390. Электронно-механическое вычислительное устройство для получения средних моментов прохождений звезд во время наблюдений. Кручиненко В. Г., Платонов Ю. П., Сухов В. Б., Астрон. ж., 1957, **34**, № 4, 609—612 (рез. англ.)

В астрономической лаборатории ГАО было сконструировано и изготовлено устройство, обеспечивающее вычисление средних моментов прохождений звезд во время наблюдений путем усреднения моментов контактов фотоэлектрического усилителя или контактного микрометра. При этом полностью отпадает обработка ленты хронографа, что значительно ускоряет процесс обработки наблюдений. Резюме авторов

3391. Электронные цифровые машины. Глушков В. М., Гнеденко Б. В. (Електронні цифрові машини. Глушков В. М., Гнеденко Б. В.), Вісник АН УРСР, 1957, № 9, 3—10 (укр.)

Рассматривается влияние электронных вычислительных машин на развитие науки и техники. Отмечается, что электронные цифровые машины способствуют бурному развитию ряда научных теорий и установлению новых связей между дисциплинами, еще недавно весьма далекими друг от друга. В качестве примера указывается кибернетика, определяемая в статье как наука о способе приема, хранения, переработки и использования информации в машинах и живых организмах. Авторы оценивают настоящее время как канун новой эпохи, когда силы природы будут служить повышению умственных сил человечества. Отмечая механистический характер попыток отождествить строение нервной системы со строением электронных вычислительных машин, авторы считают, что взаимное проникновение идей, методов, фактов наук о вычислительных машинах и наук о высшей нервной деятельности будет содействовать взаимному обогащению. После краткого обзора применений электронных вычислительных машин для проведения громоздких вычислений и управления производственными процессами рассказывается о работах лаборатории вычислительной техники Института математики АН УССР по созданию и использованию электронных вычислительных машин. Рассматривается также, что лаборатория совместно с клиникой тораканьной хирургии разрабатывает электронные приборы для диагностики сердечных заболеваний. Рассматриваются вопросы повышения быстродействия, надежности и экономичности электронных вычислительных машин, и в заключение дается краткий обзор попыток автоматизировать и программировать процессы творчества, в особенности поиски новых математических теорем. Делается общий вывод, что никогда ни одна машина не будет в состоянии полностью заменить мозг человека, так как мозг человека способен к саморазвитию, а логическая машина может быть лишь помощником человека, расширяя возможности познания природы. Г. Н. Поваров

3392. Развитие вычислительных устройств и их воздействие на технику математических методов. Букович (Die Entwicklung der Rechengeräte und ihre Rückwirkung auf die Technik mathematischer Verfahren. Bukovics E.), Österr. Bauzeitschrift, 1955, **10**, № 10, 188—194 (нем.)

Популярное изложение истории развития машинной математики. Автор обращает внимание на то, что в настоящее время при выборе того или иного метода расчета задачи следует учитывать особенности вычислительных машин. Для пояснения этого сравниваются план работы вычислителя и план работы машины при решении математической задачи, требующей большого количества вычислений. Попутно рассказывается об основных операциях и возможностях машин.

Г. П. Багриновская

3393. Вычислительная машина — вклад электроники в производство. Бут (The computer — electronics' contribution to production. Booth R. H.), Automatic factory what does it mean? London, E. & F. N. Spon Ltd, 1955, 49—56 (англ.)

Перепечатано из «Instn. Prod. Engrs J.» (РЖМат, 1957, 3662) (англ.)

3394. Роботы и автоматы. Краткая история. I. Калбертсон (Robots and automata: a short history. I. Culbertson James T.), Computers and Automat., 1957, **6**, № 3, 32—37 (англ.)

Популярный очерк. Приводятся легенды и мифы о роботах. Излагается история автоматов, подражающих живым существам. Изложение посвящено преимущественно автоматам, построенным в античности и до XX в. в Западной Европе. Отмечается отсутствие обратной связи в старинных автоматах. Из автоматов с обратной связью рассказывается о механической собаке («ориентировочном механизме») Хэммонда (1915 г.). Г. Н. Поваров

3395. Роботы и автоматы. Краткая история. 2. Калбертсон (Robots and automata: a short history. 2. Culbertson James T.), Computers and Automat., 1957, **6**, № 4, 20—24, 38 (англ.)

Ч. 1 см. реф. 3394.

Приводится список литературы, использованной автором при написании первой главы подготавливаемой им книги «Роботы и автоматы. Краткая история».

Список содержит названия 233 американских, английских, русских и др. литературных источников (книг, журнальных статей и т. п.). Б. Н. Малиновский

3396. Введение в автоматические электронные вычисления для технических расчетов. Каганов (An introduction to automatic electronic computing for engineering calculations. Kaganov B. J.), Canad. Aeronaut. J., 1957, **3**, № 5, 155—160 (англ.)

Популярная статья о цифровых и моделирующих вычислительных машинах. Описаны машины КРК (CPC), ИБМ-650, Дататрон», ИБМ-704.

3397. Электронные вычислительные машины (Calcolatrici elettroniche), Quaderni studi e notizie, 1956, **12**, № 211, 54—60 (итал.)

Популярное объяснение устройства быстродействующих цифровых вычислительных машин и принципов их программирования. Кратко рассказывается также о моделирующих и управляющих машинах.

Г. Н. Поваров

3398. О принципах устройства универсальных цифровых вычислительных машин. Ремон (Sur les principes des calculatrices numériques universelles. Raymond François Henri), Electricité, 1956, **40**, № 230, 195—198 (франц.)

3399. Электронные цифровые вычислительные машины. Коттон (Electronic digital computers. Cotton H.), School Sci. Rev., 1956, **38**, № 134, 53—61 (англ.)

Рассматриваются общие принципы работы цифровых электронных вычислительных машин. Приводится описание основных узлов машин и их взаимодействие.

Б. И. Шитиков

3400. Введение в теорию цифровых вычислительных машин (An introduction to digital computers), Nucleonics, 1957, **15**, № 5, 54—55 (англ.)

Приводятся блок-схема и краткое описание основных узлов цифровой вычислительной машины.

А. Н. Чуйкин

3401. Малое цифровое вычислительное устройство. Оплер (The small digital computer installation. Opler Ascher), Chem. Engng Progr., 1956, **52**, № 11, 455—456 (англ.)

Рассматриваются возможности малых электронных вычислительных машин (с очень малой емкостью оперативного запоминающего устройства) применительно к решению научных проблем. Такова, например, машина ИБМ-604. Приводится список научных задач, решенных с помощью малых вычислительных машин.

Б. И. Шитиков

3402. Цифровые машины для инженерных расчетов (Digital computers for engineering calculations), Australas. Manufacturer, 1957, **41**, № 2128, 43—44 (англ.)

Рекламное сообщение о цифровых вычислительных машинах типа «Дециплекс» (Deciplex), импортируемых в Австралию из Англии. Б. Н. Малиновский

3403. Универсальный цифровой интегратор. Уайт, Мак-Адам (Universal, digital tristimulus integrator. White W. E., MacAdam D. L.), J. Opt. Soc. America, 1957, **47**, № 7, 605—611 (англ.)

3404. Расширение силы мозга. Хори (An extension of brainpower. Hori Shizuo), Frontier, 1957, **20**, № 2, 4—6, 13 (англ.)

Популярный очерк о моделирующих устройствах и их применении в исследовательском центре «ARF» (Armour Research Foundation) Иллинойского института технологии к исследованию управляемых снарядов, систем автоматического регулирования и т. д.

3405. Гармонические анализаторы. Хименес-Армендарис (Analizadores armonicos. Jimenez Armendariz J. C.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1954, **3**, № 8, 3—16 (исп.)

Сравнительный обзор различных механических, электрических и электронных методов для автоматизации гармонического анализа. Библ. 15 назв.

3406. Простые вычислительные устройства для контроля и управления производственными процессами. Миллер (Control handbook. Section 4. Simple computing devices in process measurement and control. Miller J. T.), Instrum. Practice, 1955, **9**, № 4, 342—348 (англ.)

Принципы действия простейших вычислительных устройств: пневматических (для суммирования, вычитания и усреднения давлений), механических и электрических. Схемы самобалансирующихся мостов для умножения, деления, сложения, вычитания и усреднения. Описание интеграторов, преобразователей координат и др. Библ. 10 назв. Г. Ф. Типалин

3407. Новый интегратор для расчетов волнового сопротивления. Хогбен (A new integrator for use in wave-resistance calculations. Hogben N.), Quart. Trans. Instn. Naval Architects, 1954, **96**, № 3, 167—181 (англ.)

Описывается фрикционное интегрирующее устройство, предназначенное для определения интеграла вида $F = \int \sin(\gamma x + \varepsilon)\, dy$, где γ и ε — постоянные интегрирования. Выходная величина получается в виде угла поворота вала ролика, фрикционно связанного с диском. Поворот диска в соответствии с изменением независимой переменной y происходит передачей от рейки, конец которой перемещается по кривой, заданной в координатах xy. Перемещение рейки параллельно оси x вызывает смещение всего механизма вдоль оси x. При этом второй вспомогательный диск, поворачиваясь за счет сцепления с колесом, ось которого неподвижно закреплена, приводит в движение второй вспомогательный ролик, изменяющий положение основного ролика на основном диске пропорционально $\sin\gamma x$. Величина γ устанавливается перемещением вспомогательного ролика вдоль радиуса вспомогательного диска, а величина ε — начальным положением основного ролика. Устройство обеспечивает интегрирование при изменении y от нуля до 300 *мм* и при практически неограниченном диапазоне изменения величины x.

Приведены рабочие формулы для определения волнового сопротивления корабля и показано, как можно использовать описанное устройство для этих целей. Указывается возможность определения коэффициентов ряда Фурье. Приведены примеры и результаты сравнения коэффициентов, полученных с помощью устройства, с точными коэффициентами. В материалах дискуссии отмечается целесообразность применения интегратора для расчетов волнового сопротивления корабля и необходимость доработки макета для увеличения точности.

И. М. Витенберг

3408. Счетная линейка для преобразования Фурье и ее применение. Маэкава (Maekawa Takasumi), Дзидо сэйгё, Automatic Control., 1957, **4**, № 2, 83—89 (японск.; рез. англ.)

3409. Самодельная логарифмическая счетная линейка. Долинский (Selbstanfertigung eines logarithmischen Rechenschiebers. Dolinsky R.), Math. und Phys. Schule, 1956, **3**, № 3, 134—137 (нем.)

3410. Артиллерийский логарифмический круг. Остапенко А. С., Артилл. ж., 1953, № 8, 45—48

Описывается устройство, изготовление и употребление логарифмического круга диаметром в 18 *см*, со специальными шкалами, предназначенными для артиллерийских расчетов. В. М. Брадис

3411. Логарифмическая линейка для зенитной метеорологической станции. Артеменко М. Ф., Артилл. ж., 1953, № 12, 30—44

Описаны устройство и употребление номограммы, предназначенной для определения скорости баллистического ветра по скорости действительного ветра для каждого слоя стандартной высоты и для определения баллистического отклонения плотности воздуха от нормальной. В основе лежит формула $n = (a \lg q) : R$, где a постоянно. Номограмма представляет собой счетный диск, имеющий на неподвижной части 13 концентрических окружностей с радиусами от 11 до 17 *см* и на подвижной части круговую логарифмическую шкалу, охватывающую три декады (с метками от 0,1 до 100). Подробно изложен способ построения номограммы, дано ее изображение приблизительно в половину рекомендуемой величины, приведены примеры применения.

Примечание референта. Точность получаемых по номограмме результатов — две значащих цифры (третья цифра получается только в тех случаях, когда первая значащая цифра единица).

В. М. Брадис

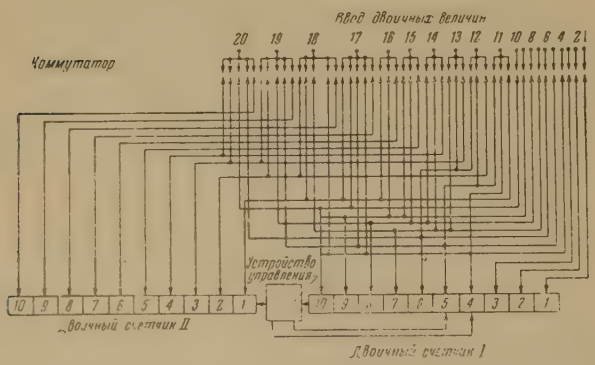
3412 К. Быстродействующая электронная вычислительная машина Академии наук СССР. Доклад на Международной конференции по электронным счетным машинам в г. Дармштадте. Окт. 1955 г. Лебедев С. А., М., АН СССР, 1955. 11 стр., илл. Б. ц.

3413 К. Вычислительные машины в торгово-промышленных системах (Computers in business and industrial systems. Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference. Papers and Discussions presented at the joint ACM—AIEE—IRE computer conference, Boston, mass. Nov. 7—9, 1955. New York Inst.), Radio Eng. Inc., 1956, 100 pp.) (англ.)

3414 К. Программный алфавитный табулятор типа 421 с запоминающими устройствами (Tabulatrice alphanumérique à programmes, type 421, unites de mémoire. Paris, Compagnie I. B. M., 1954, 18 p.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 7, 155 (франц.)

3415 К. Труды конференции по обучению персонала для вычислительных машин. Якобсон Arvid W. Wayne univ. press, 1954, 5 doll. 112 pp.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 7, 86 (англ.)

3416 П. Машина для перевода двоичных чисел в десятичные. Рейнолдс (Machine for translating binary values to decimal values. Reynolds Eugene E.) (Marchant Calculators, Inc.). Пат. США, кл. 235-61, № 2 713 456, 19.07.55



Патент на оригинальную машину для перевода чисел из двоичной системы в десятичную. В машине использован новый способ перевода, позволяющий разбить двоичное число на части и производить параллельный перевод в десятичную систему всех частей числа. Перевод каждой части дает три десятичных знака результата в окончательном виде.

Перевод чисел производится за два периода. В течение первого периода производится перевод двоичных чисел в предложенную автором «расщепленную двоичную систему» (split-binary sistem). В 10 младших разрядах этой системы изображаются числа от 0 до 999. Единица в 11-ом разряде расщепленной системы эквивалентна десятичному числу 1000, а не 1024, как в обычной двоичной системе; единица в 12-ом разряде эквивалентна 2000 и т. д. Блок-схема устройства для перевода в расщепленную систему показана на фиг. Цифры двоичного числа, подлежащего переводу, подаются в виде напряжений на контакты коммутатора. Контакты замыкаются последовательно, начиная с 1-го и кончая 48-ым. Через эти контакты подаются электрические импульсы на двоичные счетчики I и II, где они суммируются. После первого периода в счетчиках получаются числа в расщепленной двоичной системе.

Устройство управления выполняет две функции: а) передает двоичный эквивалент числа 24 в счетчик I каждый раз, когда происходит передача единицы из 10-го разряда счетчика I в 1-й разряд счетчика II; б) передает 24 в счетчик I в случае, когда десятичный эквивалент числа в счетчике I больше 999, т. е. когда в разрядах с 6 по 10 и в 4 или 5 разрядах счетчика I имеются единицы. Все переносы при помощи устройства управления производятся в конце перевода числа в расщепленную систему, т. е. после замыкания и размыкания 48-го контакта коммутатора. Коммутатор выполнен в виде вращающегося барабана с токопроводящими ламелями и 48 скользящих контактов. Перевод в расщепленную двоичную систему производится за 1 оборот барабана. Счетчики и устройство управления выполнены на специально разработанных двухшаговых реле.

Во время второго периода производится отыскание десятичных эквивалентов двоичных чисел, зафиксированных в счетчиках I и II. Принципиально это осуществляется при помощи двух узлов. В каждом узле имеется два барабана: барабан, содержащий двоичные числа от 0 000 000 000 до 1 111 111 111, и барабан, содержащий десятичные цифры от 0 до 999. Оба вращаются на одной оси. Двоичные величины первого барабана сравниваются с показаниями двоичного счетчика (I или II) и в момент совпадения этих величин включается неоновая лампа, освещающая на втором барабане трехразрядное десятичное число, проходящее в этот момент в смотровом окне. При быстром вращении барабанов создается стробоскопический эффект и число в смотровом окне кажется неподвижным. На двух индикаторных барабанах можно регистрировать шестиразрядное десятичное число. Результаты перевода могут сниматься визуально или фотографироваться. Для уменьшения диаметров барабанов и увеличения их скорости применяются барабаны с винтовыми контактными дорожками и перемещающиеся скользящие контакты. Отыскание десятичных эквивалентов происходит за 8 оборотов барабанов.

Примечание референта. Основной недостаток предложенного способа перевода чисел в десятичную систему состоит в том, что практическое его осуществление для чисел, имеющих более 20 двоичных разрядов, вызовет значительные трудности, так как при увеличении числа разрядов значительно увеличивается необходимое оборудование и время на перевод. Машина Рейнолдса может успешно применяться как выходное устройство в быстродействующих вычислительных машинах, работающих в двоичной системе исчисления, где выдаваемые десятичные числа не превышают 999 999.

Е. Н. Маквецов

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абэ 2869
Айзенберг Я. Е. 2918
Алескеров С. А. 3280
Александров П. С. 2575, 2576
Алёхин В. М. 2987
Аржаных И. С. 2898, 2974
Арнольд В. И. 2836, 2837
Артеменко М. Ф. 3411

Б

Баранцев Р. Г. 2953
Басков Б. М. 2717
Бахвалов Н. С. 3285, 3318 Д
Бедельбаев А. К. 2925
Белецкий А. 2921
Бельтюков Б. А. 3290
Беляев В. И. 2659
Березин И. С. 3305
Берлянд Х. Л. 2959
Берштейн И., 2932
Бирючевский Н. Д. 3204
Бланк Я. П. 3225
Блехман И. И. 2931
Богданов Ю. С. 2922
Бонами А. А. 2890 Д
Бондарев А. Л. 3010
Борок В. М. 2937
Бразма Н. А. 3042
Бродский М. С. 2899
Буренин Н. Д. 2672 Д

В

Варвак П. М. 2615
Векуа И. Н. 3268
Вертгейм Б. А. 3304
Виденский В. С. 2853
Виноградов А. И. 2686
Витушкин А. Г. 2838, 2841 Д
Вишик М. И. 2920
Вознюк Л. Л. 2936 Д
Ворович И. И. 2982

Г

Гаврилов М. А. 2777
Геронимус Я. Л. 3038
Гінзбург Г. М. 2658
Глушков В. М. 3391
Гнеденко Б. В. 3391
Го Да-цзюнь 3061
Гохман Э. Х. 2820
Гуань Чжао-чжи 2597, 3083

Д

Давыдов В. В. 3297
Деев А. А. 2660
Делоне Б. Н. 3208 К
Демидович К. А. 2671 Д
Джавадов М. А. 3222
Дин Тун-жэнь 2911
Дольберг М. Д. 2966
Драпкин А. Б. 2961
Дроздов Е. А. 3336
Дубовицкий А. Я. 2839

Е

Евграфов М. А. 2888 К

Ж

Жуков В. Е. 3005, 3016

З

Задорожний А. М. 3201
Захаров В. К. 2949, 2950
Зморович В. А. 2973
Золотарев Ю. Г. 2923

И

Ибрагимов И. И. 2854
Иванов И. 2662
Илиев Л. 2667 К
Илић-Дајовић М. 2618
Ильин В. П. 2834
Имшенецкая Е. Ф. 2980
Исихара 3368
Исихара 3368

Й

Јовичић М. М. 3207

К

Казарян Р. А. 3202
Калафати П. Д. 2917
Калинин С. В. 2571
Касара И. Я. 2710
Кащеев В. 2989
Кислицын С. Г. 3192
Кленов В. Е. 3270
Коган Б. Я. 3359
Кондратьев Н. А. 3271
Корицкий Г. В. 2857
Красовский А. А. 2968
Красовский Н. Н. 2934
Крейн М. Г. 3069
Кручиненко В. Г. 3390
Курода 2859
Кэ Чжао 2711

Л

Лабутин Д. Н. 3013
Лаврук Б. Р. 2962
Ладыженская О. А. 2957, 2984, 3289
Ламбин Н. В. 2871
Лаптев Б. Л. 3233
Лебедев В. И. 3317 Д
Лебедев С. А. 3412 К
Левина С. 2955
Лейфман Л. Я. 2817
Ликова (Лыкова) О. Б. 2929, 2930
Ли Чжи-чан 3351
Лицинский Е. Ф. 3224
Ли Янь 2596
Лопшиц А. М. 3199
Лупан Ю. А. 2900
Люстерник Л. А. 2920

М

Манолов С. 2667 К
Маржик Я. 2819
Марковић Д 3302
Маркушевич Л. А. 2852
Маэкава 3408
Мелдер И. К. 2967
Мертвецова М. А. 3303
Михайлов Г. К. 2867
Молошная Т. Н. 3354
Моссаковский В. И. 2981
Мухина Л. М. 2657

Н

Нарзуллаев Х. Н. 2692
Новожилов В. В. 2983

О

Остапенко А. С. 3410

П

Павлюк И. А. 2635
Паламодов В. П. 3003, 3031
Палладін О. В. 2568
Палувер Н. В. 3205
Петров В. В. 3095
Платонов Ю. П. 3390
Поддерюгин В. Д. 2743
Полубаринова-Кочина П. Я. 2647 К
Потапов М. К. 2835
Прокофьев В. М. 3172
Протасов В. И. 2897
Пурто В. А. 3354

Р

Ригер Л. 2771
Розенкранц А. С. 3311
Романовский П. И. 3026 К
Рохлин В. А. 2813
Румер Ю. Б. 2995

С

Сабиров М. С. 2693
Савчук П. М. 2665 К
Салехов Г. С. 3277, 3303
Самосюк Г. П. 2977
Селиванова С. Г. 2845 Д
Сербина А. И. 3196
Серебренникова І. І. 2866
Симонов Н. И. 2610
Склянский А. Л. 2971
Скопец З. А. 3206
Слепенчук К. М. 3037
Смирнов В. И. 2611
Смирнов М. С. 2978
Соминский И. 2666 К
Старшинова Л. В. 3277
Стесин И. М. 3307
Стипанић Е. 2599
Стојановић Р. 3253
Столова Е. С. 3211
Стрелиц Ш. И. 2862
Субханкулов М. А. 2687
Сухов В. Б. 3390
Ся Дао-син 2858, 2864, 2865

Т

Тайманов А. Д. 2793
Такэда 2598
Талалян А. А. 2822
Теодореску Н. 2965
Тиман М. Ф. 2844
Тихомирова А. С. 3046
Тополянский Д. Б. 3284
Трахтенброт Б. А. 2778
Туманян С. Х. 3098
Тумаркин Г. П. 2849, 2855, 2856

У

Угодчиков А. Г. 2866
Узаков Ю. К. 2621
Успенский В. А. 2677
У Сюэ-моу 2851
У Чжо-жэнь 2863

Ф

Фаддеев Д. К. 2759
Федорченко А. М. 2933
Филатов А. Н. 2975
Фок В. А. 3242
Франкль Ф. И. 3241

Х

Халанай А. 2932
Харкеевич Ю. Ф. 3014
Хион Я. В. 2750
Хованский А. Н. 3182

Ц

Цыбульский Г. П. 2905

Ч

Черняев М. П. 3194

Ш

Шварц А. С. 3258
Шварц Ш. 2745
Шермазанов Р. Г. 3203
Шиманов С. Н. 2926
Ширинов К. Ф. 3278
Широв И. И. 2904
Шлионский Г. Г. 2870
Шмульян Ю. Л. 3062
Шмыглевский Ю. Д. 3000
Шуликовский В. И. 3226
Шэнь Гуан-юй 2763

Э

Эйлер Л. 2645 К
Эльсгольц Л. Э. 2992

Ю

Юран В. Ю. 3200

Я

Яноши Л. 3156
Ярышева И. М. 3288
Ятаев М. 2619

A

Abe H. 2869
Achiezer N. I. 3029 К
Ackermann W.-G. 3104 К
Aczél J. 3008, 3234
Adachi R. 3275, 3276
Agnew R. P. 3036
Akaike H. 3114
Albert A. A. 2632, 2761
Albrecht J. 3282
Alman J. E. 3389
Altman M. 3084, 3085
Amir-Moéz A. R. 3173
Anderson J. W. 3372
Appel V. 3381
Aronszajn N. 3269
Arscott F. M. 2896
Artin E. 2695
Aschen R. 3337
Asmuth J. L. 3323
Astuni E. 3301
Aubert K. E. 2767
Audin M. 3059
Austin D. A. 3358

B

Babister A. W. 3043
Badillo M. C. 2787
Baer R. 2772, 3263
Ball B. J. 2795
Banditch I. 2893
Barlotti A. 3219
Barnett I. A. 2732
Baron R. 2600
Barricelli N. A. 3158
Barrucand P. 3181
Basu S. K. 3033
Batchelor J. H. 3137
Baum W. 2804
Bellman R. 2731, 3140, 3141, 3142
Bennett J. M. 3352
Berger R. C. 3367
Berman M. 3371
Bers L. 2887
Bessaga C. 3055, 3056
Beylen E. van 3266
Bezem J. J. 3119
Bielecki A. 2921
Biernacki S. 2663
Bihari I. 2901
Birkhoff G. 2912
Bittner I. 2640
Blanchard A. 3260
Blanchard R. 3179
Blaschke W. 3313
Blecher F. H. 3335
Bodewig E. 3298, 3299
Bohm C. 3306
Booth A. D. 3355
Booth R. H. 3393
Bosanquet L. S. 3035
Bose A. G. 3159
Bose P. K. 3115
Bouligand G. 2586
Bowers F. A. I., Jr 3025 К
Brahana T. R. 2807
Brandt R. N. 3025 К
Brauer A. 2733
Braun W. G. 3341
Brooks R. W. 2785
Browder F. E. 2940
Brownell F. H. 2945
Brusotti L. 3213
Bukovics E. 3392
Burkholder D. L. 3101

C

Calabi L. 2801
Cameron R. 3358
Capel C. E. 3025 К
Carlitz L. 2706, 2707, 2712, 2784
Carr A. J. 3032
Carver W. B. 3221
Casal P. 2788
Cassina U. 2605
Castans Camargo M. 3092
Cazacu C. A. 2876, 2877
Cecconi J. 2818
Cell J. W. 2892
Černý V. 3326
Chambers Ll. G. 3308
Chandrasekhar S. 2919
Chenon R. 2998
Chernoff H. 3117
Chern Shiing-Shen 3229
Chlouba V. 3325
Cholewicki T. 3190
Ciorănescu N. 2988
Clagett M. 2607
Clendenin W. W. 3270
Colebrook F. M. 2668 К
Colino A. 2986
Colombo S. 2946
Conolly B. W. 3148
Conte S. D. 3347
Conti R. 2902
Cooper G. 3381
Corput J. G. van der 2685
Cotton H. 3399
Court N. A. 2612
Couture A. 3345
Craig A. T. 3105
Cugiani M. 2719
Culbertson J. T. 3394, 3395

D

Dantzig D. van 2653
Dantzig G. B. 3132
Darkow M. D. 2652
Darling D. A. 3099
Darmois G. 2624
Davidson C. H. 3323
Davis P. 3065
Deaux R. 3187
Degesves A. 3362
Delange H. 2697, 2698
Delgado Serrano J. 3382
Denjoy A. 2636, 2811
Denniston R. H. F. 2809
Destouches J. L. 3090 К
Deuitch D. E. 3333
Deuring M. 2694
Devi Singh K. 3228
Diliberto S. P. 2924
Dinghas A. 3020
Dinneen G. P. 3319
Dionísio J. J. 2729
Dixmier J. 2764
Dolinsky R. 3409
Domar Y. 3078, 3079
Doornbos R. 3125
Doss S. 3116
Drazin M. P. 2756, 2766
Drbohlav K. 2773
Dreyfus S. E. 3143
Drimbă C. 2909
Dugas R. 2646 К, 2664 К
Durand E. 3285
Duren W. L., Jr 3025 К
Durst L. K. 2768
Duschek A. 2577
Dvorétzky A. 3151

E

Eckstein O. 3146
Edwards H. J. 3379
Effertz F. H. 2878
Egerváry J. 3011
Ehrenfeld S. 3123
Eisenhart L. P. 3250
Elbourn R. D. 3383
Ellis R. 2746
Enns W. E. 3360
Ercoli P. 2786
Erdös P. 2705
Erfurth H. 2608
Eringen A. C. 2948
Errera M. A. 2688
Escursan 3366
Eubanks R. A. 2951
Exner G. 3293

F

Fabian W. 3170
Faure M. 3385
Feldmann L. 2915
Felix L. 2636
Ferrer Figueras L. 3041
Feys R. 2614
Fichera G. 2938, 2939, 2954
Fischmann A. F. 3338
Fladt K. 3198
Fleming W. H. 2994
Foerster H. von 2595 К
Ford L. R. 3138
Fort T. 2964
Fourès-Bruhat Y. 3244
Franchetta A. 3210 К
Froda A. 2799
Fry T. C. 2585
Fryer K. D. 2769
Fuchs L. 2737
Fujiwara K. 2796
Fulkerson D. R. 3138
Fullerton P. 3384

G

Gårding L. 2956
Gelfand I. M. 3089 К
Germain P. 2952
Gheorghiu Ch. Th. 2727
Gherardelli F. 3216
Ghermănescu M. 3024
Ghika A. 2765
Ghizzetti A. 3292
Ghosh P. K. 3019
Ghurye S. G. 3006, 3128
Gidley J. L. 3296
Gillesfrie R. P. 3027 К
Gillman L. 2802
Gini C. 2634
Ginsburg S. 2803
Glovazky A. 3155
Godeaux L. 3217, 3218
Goffman C. 2740
Goldmann A. J. 2798
González M. O. 2880
Goodman A. W. 2861
Goodner D. B. 2824
Gould H. W. 3002
Gourevitch G. 2752
Greco D. 2942, 2943
Greenspan D. 3279
Gröbner W. 3214, 3215
Gruenberg K. W. 2741
Grzegorczyk A. 2676
Gumbel E. J. 3129
Günther G. 2592
Gyires B. 2895

H

Hahn W. 2927
Halperin I. 2769, 3052, 3053
Ham F. S. 3045
Hammerton J. C. 3321
Hansen E. 3339
Harris B. 2783
Hartman P. 2908, 3064
Haskins E. W. 2655
Hatta K. 2999
Havel V. 3195
Hayami S. 3369
Hayashi S. 3369
Hecquet J. 3179
Heemert A. van 2721
Henkin L. 2683 К, 2775
Henriksen M. 2802, 3071
Herchenroeder L. W. 3386
Higman G. 2762
Hilbert D. 3176 К
Hintikka K. J. J. 2674
Hirschleber A. 3293
Hoag M. W. 3145
Hochstadt H. 2985
Hochstadt H. 2985
Hoerl A. E. 3387
Hogben N. 3407
Hogg R. V. 3105
Homma T. 2792
Hori S. 3404
Hornfeck B. 2689
Horváth J. 2990
Hudimoto H. 3109
Husain S. I. 3245, 3256
Huzurbazar V. S. 3106

I

Ikeda N. 3096
Infeld L. 2996
Inoue Y. 2806
Inzinger R. 2633
Iosifescu M. 2825
Iséki K. 2749
Ishaq M. 2730
Ishihara T. 3368, 3369
Ishihara Y. 3368
Ishiguro K. 2843
Ivanovitch B. 3131 Д
Izumi S. 2842

J

Jacobson A. W. (ed.) 3415 К
James G. S. 3120
Jaśkowski S. 2681
Jenkins J. A. 2868
Jerison M. 3054
Jimenez Armendariz J. C. 3405
Johnson D. L. 3348
Johnson E. S. 2913
Johnson K. R. 3165
Johnston R. F. 3324
Jordan P. 3255

K

Kaganov B. J. 3396
Kalicki J. 2776
Kalmár L. 2682
Kanitani J. 3230, 3231, 3232
Kanold H.-J. 2691
Kasahara S. 2794
Katsurada Y. 3236
Keller H. 3044
Kelley J. E., Jr 3139
Kennedy P. B. 3017
Kertész A. 2737
Kiefer J. 3151
Kinney G. F. 3373
Kister J. 3353
Klátil J. 3286
Klee V. L., Jr 2582
Klein M. L. 3331, 3349
Klier E. 2972
Knapowski S. 2718
Knudsen D. F. 3375
Koch R. A. 2588
Koch R. J. 2748
Ko Chao 2711
Köhler H. 3322
Kolberg O. 2725
Koller A. 2626
Komar A. 3243
Kořínék V. 2572
Koschmieder L. 3039
Köthe G. 3058
Kotzig A. 2791
Krabbe G. L. 3063
Král J. 3021
Krzyz S. 3030
Kubo T. 2884
Kudō H. 3107
Kuipers L. 2699
Kulik S. 2872
Kuniyoshi H. 2757
Kurepa G. 2584
Kuroda I. 2859
Kuttner B. 3015

L

Labrador J. F. 2628
Lacoarret M. 2604
Lages Lima E. 2805
Landin J. 2738
Lane N. D. 3265
Lang S. 3212
Langelütke H. 2627
Lashof R. K. 3229
Lax P. D. 2941

Leach E. B. 2831
LeBeau G. S. 2644
Lebesgue H. 2609, 2623
Ledermann W. 2753 К
Lehman R. S. 2675
Lehmer E. 3350
Leja F. 2889 К
Leko T. 2894
Leonhard S. 2620
Leumann H. 3169
Levey M. 2601
Lewandowski Z. 2360
Leżański T. 3082
Libois P. 3174
Lichnerowicz A. 3257
Lieberman G. J. 3117
Liedl G. 2656
Linke P. F. 2673
Lions J. L. 3070
Loonstra F. 2587
Lopes W. 2643
Loud W. S. 2906, 2914
Lowan A. N. 3287
Lusternik L. A. 3001 К
Luxemburg W. A. J. 3052, 3053

M

Maak W. 2881
MacAdam D. L. 3403
McAuley L. F. 2797
McCluskey E. J., Jr 2782
McFadden J. A. 3164
McLean J. C. 3379
Magenes E. 2958
Maekawa T. 3408
Malgrange B. 2963
Malinvaud E. 3127
Mambriani A. 2960
Mandel L. 3122
Marakathavalli N. 3111
Maravall Casesnoves D. 3251
Marchand A. 2649
Marcus S. 2826, 2827, 2830, 2832
Margulies G. 3191
Mařík J. 3021
Martin A. V. 2828
Masse P. 2606
Matschinski M. 3162
Mattsson P. 3150
Matusita K. 3109
Mautner F. L. 2739
Mavridès S. 3246
Meijer C. S. 3012
Mendel C. W. 2732
Meng Ching-Hwa 3067
Menger K. 2594 К
Meyer H. 2589
Mikhail M. N. 2874
Mikolás M. 2829
Miller J. B. 3323
Miller J. T. 3406
Mishra R. S. 3228, 3245
Mitrinovitch D. S. 2891
Moessner A. 2726
Moffat J. 3227, 3247
Molinaro I. 3057
Monseau M. 3229
Montel P. 2636
Moon P. 3291
Moór A. 3237, 3238
Morgan H. 3349
Morgan L. P. 3334
Morin F. 3152
Moriya M. 2754
Moroń Z. 3261, 3262
Müller M. 3100
Myhill J. 2678

N

Naas J. 3175 К
Naddor E. 3153
Nagami K. 2800
Nagel E. 2593
Nakanishi S. 2816
Narlikar V. V. 3254
Nef W. 3048, 3049, 3050
Neumark M. A. 3089 К
Neumeister R. 3197
Nevanlinna R. 2622, 3023
Newman J. R. 2593
Newns W. F. 2850
Neyman J. 3110
Nisigaki H. 2886
Niven I. 2716
Noble C. E. 3136
Noble D. S. 3323
Noble M. E. 2848
Nussbaumer H. 3365

O

Oberhettinger F. 2879
Oblonský J. 3327
Obrechkoff N. 2702
Oden H. 2790
Ocagne M. de 2646 К
Oliphant C. W. 3384
Onicescu O. 2815
Opler A. 3401
Oshio S. 3094
Ostrowski A. 2700, 2701
Otsuki T. 3235
Ou-Šo-mo 2851
Ozeki H. 3259

P

Pachner J. 2997
Palamà G. 2714, 2715
Panitchpakdi P. 3269
Papoulis A. 2728
Parameswaran M. R. 3060
Pavel M. 3051
Pełczyński A. 3056
Pellegrino F. 2642
Peltier J. 3316 К
Peyovitch T. 3018
Pikal F. 2661
Piloty H. 3328
Plácido Cicala 3377
Poitou G. 2847
Pokorny J. 2617
Pottier J. 3376
Prékopa A. 3097
Price G. B. 3025 К
Prinz D. C. 3352
Profos P. 3044
Putnam C. R. 2903

Q

Quade W. 3272

R

Rabbeno G. 2590
Rådström H. 3080
Rajagopal C. T. 3034
Ransom W. R. 2722
Rase H. F. 3296
Raupach R. C. 3360
Raymond F. H. 3398
Reed I. S. 3319
Reeves R. F. 3347
Redheffer R. M. 2704
Reid W. H. 2919
Reiner I. 2738
Reissig R. 2907, 2910
Reiter H. 3076, 3077
Renner C. 3180
Renyi A. 3093, 3097
Rényi K. 3022
Reynolds E. E. 3416 II
Ridderström S. 3118
Rideau G. 3066
Rider P. R. 2631, 3112
Richmond D. E. 2846
Rieger L. 2637
Riesel H. 2720
Riesz M. 3252
Ringleb F. O. 2670 К
Riordan J. 2784
Ríos S. 3130 К
Rixecker H. 3185
Roberts J. B. 2724
Robinson R. M. 2680, 2723
Rodeja E. G. F. 3007, 3186, 3315 К
Rogers H., Jr 2679
Roldão Dias Agudo F. 3188
Rollof Y. 3154
Rothstein J. 3163
Rothstein W. 2882
Roumieu C. 3086
Roy T. C. 3248
Rufener E. 3149
Rühs F. 2744
Rusconi F. 3312
Rüsh R. B. 3331
Rushton S. 3124
Rychlík K. 2637

S

Sacerdote G. 2789
Sade A. 2751
Saemann W. 2602
Sakuma M. 2755
Sanders J. 2947
Sankaran M. 3295
Sansone G. 2902
Satô M. 2842
Satterly J. 3183
Sauer R. 2976
Schafer R. D. 2580
Schein M. 2616
Schoenfeld R. L. 3371
Schröder K. 3175 К
Schützenberger M.-P. 2747
Schwartz L. 2650
Schwarz Š. 2578
Scidmore A. K. 3323
Scott D. 2776
Scott W. R. 3025 К
Seibert P. 2873
Selmer E. S. 2713
Sen N. R. 3248
Servais W. 2651
Shah Tao-Shing 2858, 2864, 2865
Sharma A. 3294
Sherman S. 3088
Shia Wen-Hou 2735
Sibuya Y. 2928
Singer I. 3047, 3081
Sittler R. W. 3160
Slepian D. 3166
Slomiński J. 2774
Smid L. J. 3108
Solomon L. 3068
Souriau J.-M. 3239
Sowiński A. 3374
Spencer D. E. 3291
Steck M. 2603
Steenbeckeliers G. 3223
Steffensen J. F. 2970
Stein P. 3353
Steinhaus H. 2840, 3103 К
Stephenson W. L. 3334
Sternberg E. 2951
Steyn H. S. 3102
Stipanić E. 3193
Stolt B. 2709
Störmer H. 3167
Strubecker K. 2579
Subik J. 3378
Sucheston L. 2812
Suzuki Y. 3109
Svoboda A. 2779, 2780, 3332
Svoboda F. 2781, 3344
Swartz W. J. 2935 Д
Szász F. 2736, 2760
Szele T. 2737
Szüsz P. 2703

T

Taam Choy-Tak 2913
Takács L. 3157
Takasu T. 2886, 2944, 3240
Tandori K. 2823
Tarski A. 2684 К
Tatarkiewicz K. 2654
Tatchell J. B. 3035
Thébault V. 3178
Theiler G. 2821
Thom R. 2808
Thomas I. 2613
Thorne R. C. 3040
Titchmarsh E. C. 2916
Todd J. 2639, 3314 К
Tomovich R. 3357
Tortorici P. 3189 К
Tranter C. J. 3028 К
Trickett W. H. 3120
Tsuji K. 3073, 3075
Tustin A. 3147 К

U

Udeschini P. 3249
Uematu T. 2999
Uhlmann W. 3273, 3274, 3282
Ulam S. 3353

V

Vajda B. 3363
Valle Collantes F. 3177 К
Van der Waerden B. L. 3113
Vasilach S. 3087
Vazsonyi A. 3133
Vekua I. N. 2991
Verhulst M. 3144
Vernotte P. 3310
Viet U. 3267
Vietoris L. 3091
Viola T. 2814
Viswanathan R. V. 3281
Vocke W. 2969
Volkmann B. 2690
Votaw D. F., Jr 3134
Vuysje D. 2591
Vyčichlo F. 2629
Vyšin V. 3332

W

Wagner D. H. 2742
Wagner G. 3121
Wahlund S. 2630
Walden W. 3353
Wallace A. D. 2748
Walter E. 3126
Ward J. B. 3348
Warner S. 3072
Warren L. J. 2716
Warschawski S. E. 3309
Warshawsky L. M. 3341
Watson G. L. 2708, 3264
Weber E. 3161
Weibel E. S. 3364
Weich B. L. 3120
Wells M. 3353
Wendel J. G. 3004
Werner H. 2993
Weston J. D. 3074
Wheeler R. C. H. 3373
White W. E. 3403
Whitin T. M. 3135
Whittaker J. M. 2625
Wieląd ek R. 3300
Williams F. K. 3349
Wintner A. 2908
Wirsing E. 2689
Wirth E. M. 2875
Wolfendale E. 3334
Wolfowitz J. 3151
Wolk E. S. 2770
Wong Y. K. 2734 К
Woods M. L. 3352
Wottling A. 3171, 3184
Wu Zwao-Jen 2863

Y

Yamanaka Y. 3009
Yamasuge H. 2883, 2885
Yamazaki K. 2696
Yang C. C. 3361
Yoshida M. 2755
Youngs J. W. T. 2581, 3135

Z

Zassenhaus H. 2758
Zaubek O. 2833
Zeuli T. 2979
Zigány F. 3209 К
Zink R. E. 2810
Zwierz Z. 2669 К

Поправка к реф. 8149 (1956 г.)

В этом реферате допущена существенная ошибка и потому статья прореферирована повторно (РЖМат, 1958, 493).